Wiskunde

voor

economie

drs. H.J.Ots

Hellevoetsluis

Wiskunde voor economie

Drs. H.J. Ots
ISBN 90-70619-05-9

Studiewijzer

Doel van het studieboek
Dit boek is geschreven voor eerstejaarsstudenten, die wiskunde moeten toepassen bij hun economie-studie in het hoger onderwijs. De meeste wiskundeboeken voor economie zijn veel te technisch en uitgebreid; enkele honderden pagina's is heel gewoon. In deze boeken worden tal van onderwerpen behandeld die voor een goed begrip van economie niet nodig zijn. De onderwerpen die wel van belang zijn worden veel te uitgebreid behandeld, bijvoorbeeld het differentiëren van functies. In dit boek wordt alleen de wiskunde die noodzakelijk is voor het oplossen van economievraagstukken behandeld. Alle ballast is geschrapt. Men zal in dit boek ook geen bewijzen van stellingen aantreffen. De wiskunderegels worden echter wel aannemelijk gemaakt.

Na zorgvuldige bestudering van het boek heeft u voldoende basiskennis en vaardigheid om de benodigde wiskunde bij de economische vakken toe te passen.

Inhoud
Het boek bestaat uit drie hoofdstukken:

Hoofdstuk 1	Het begrip differentiaalquotiënt
Hoofdstuk 2	Extreme waarden van functies
Hoofdstuk 3	Grafieken van functies, die niet van de eerste graad zijn

Structuur
Elk hoofdstuk is op dezelfde wijze opgebouwd:

- de behandeling van de leerstof in een aantal korte, kernachtige paragrafen, waarin u vertrouwd wordt gemaakt met de verschillende wiskunderegels
- aan het eind van een paragraaf staan de te maken opgaven

Studie-aanwijzingen
Bestudeer de theorie van een paragraaf en vergeet niet dat u de leerstof slechts kunt verwerken als u actief met de leerstof bezig bent. Dit betekent dat u de theorie niet alleen moet lezen, maar dat u de cijfervoorbeelden ook moet 'doorrekenen'. U kunt slechts wiskunde leren door veel te oefenen en door te controleren of u de leerstof begrijpt. Verder moet u goed controleren of u de leerstof kunt reproduceren.
Maak vervolgens de opgaven. Dit is van groot belang om u de leerstof eigen te maken. Evenals economie is wiskunde een 'doe-vak', dat men slechts onder de knie krijgt door de theorie toe te passen. Door het maken van de opgaven kan worden gecontroleerd of het behandelde is begrepen. Het uitwerken van vraagstukken is ook essentieel om u goed voor te bereiden op een tentamen of examen.

In mijn boek *Bedrijfsrekenen voor het hoger onderwijs* (Pearson education Nederland), heb ik de volgende elementaire leerstofonderdelen behandeld:

- Bewerkingen met getallen
- Rijen
- Vergelijkingen en ongelijkheden
- Grafieken van eerstegraadsfuncties

Eventueel kunt u eerst deze onderwerpen bestuderen, alvorens aan Wiskunde voor Economie te beginnen.

Drs. H.J. Ots

Inhoud

Lijst van symbolen

$=$	is gelijk aan
$\neq$	is niet gelijk aan
$<$	is kleiner dan
$>$	is groter dan
$\geq$	is groter dan of gelijk aan
$\leq$	is kleiner dan of gelijk aan
$y = \mathrm{f}(x)$	y is een functie van x
Δy	verandering van y
Δx	verandering van x
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	differentiequotiënt
$\frac{dy}{dx} = \mathrm{f}'(x)$	eerste afgeleide van $y = \mathrm{f}(x)$
$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{f}''(x)$	tweede afgeleide van $y = \mathrm{f}(x)$

1 Het begrip differentiaalquotiënt

1.1 Helling van een rechte lijn

We kunnen de *helling* of mate van steilheid van lijnstuk AC in fig. 1.1.1 meten door de breuk $\frac{\text{BC}}{\text{AB}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

We spreken dit uit als: delta y delta x.

Δy is de verandering van y en Δx is de verandering van x.

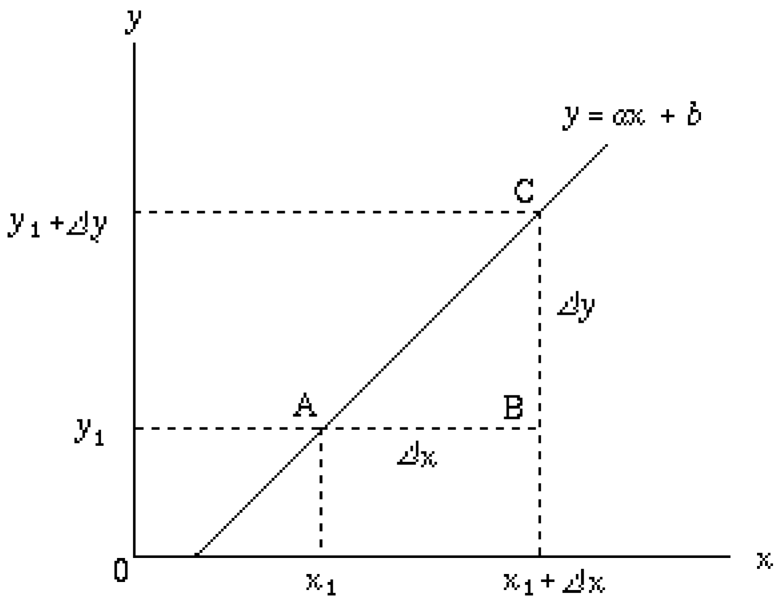


fig. 1.1.1

De helling van AC in fig. 1.1.1 geeft aan hoe y reageert op een verandering van *x.* Omdat van een rechte de helling overal even steil is, moet de verandering van *y ten opzichte van* de verandering van *x* steeds gelijk zijn. Het quotiënt van de veranderingen, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dat we *differentiequotiënt* noemen, moet dus constant zijn. We zullen dit nu controleren met een berekening.

De coördinaten van punt C moeten voldoen aan $y = ax + b$. Dus:

$y_1 + \Delta y = a(x_1 + \Delta x) + b$

$\Delta y = ax_1 + a\Delta x + b - (ax_1 + b)$

$\Delta y = a\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Als we in fig. 1.1.1 de afstand AB steeds kleiner nemen, wordt de afstand BC ook steeds kleiner. Het quotiënt van AB en BC blijft gelijk aan a. We noemen *a* de *richtingscoefficiënt* van y. Hoe groter deze coefficiënt, hoe steiler de rechte met vergelijking $y = ax + b$. Zie fig. 1.1.2.

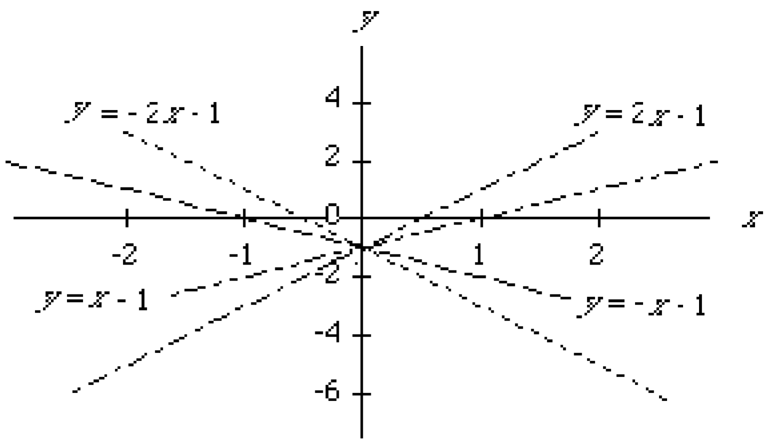


fig. 1.1.2

1.2 Helling van een kromme

De helling van een kromme is *niet* in elk punt van de kromme gelijk. Zie fig. 1.2.1 en 2, waarin een kromme lijn is getekend.

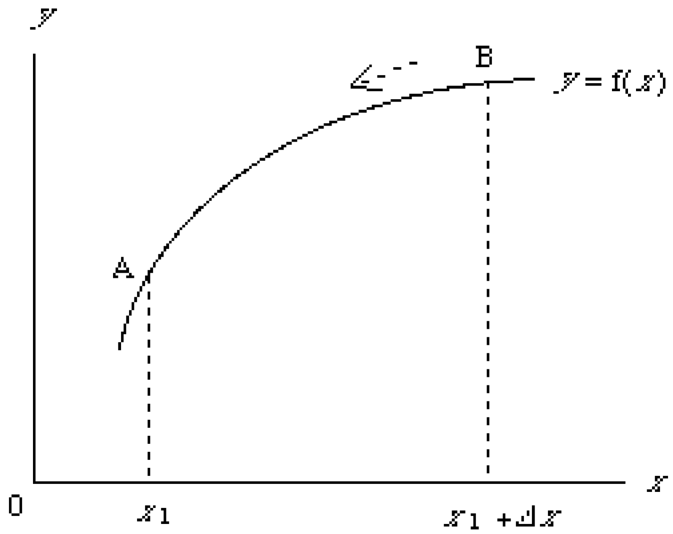


fig. 1.2.1

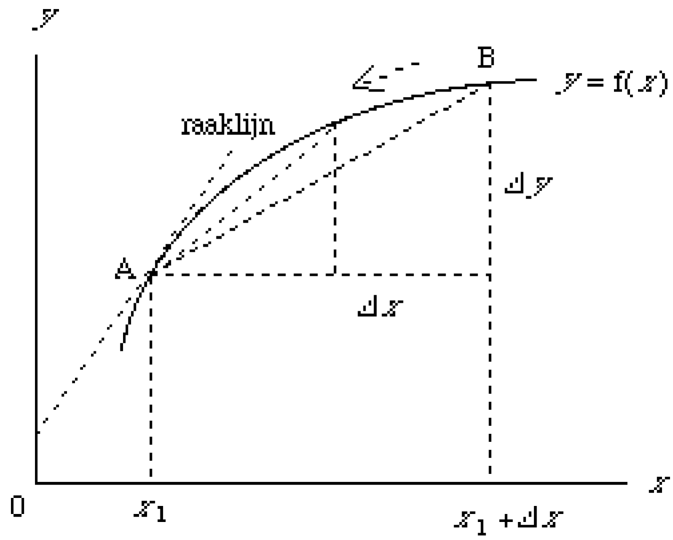


fig. 1.2.2

De helling van *boog* AB is te benaderen door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, de helling van het rechte stippellijnstuk AB (zie fig. 1.2.2), mits AB niet te groot is.

Als we punt B langs de kromme tot punt A laten naderen, zullen de differenties Δy en Δx steeds kleiner worden. Als Δx nadert tot 0, zal het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ naderen tot de richtingscoefficiënt van de *raaklijn* aan de kromme in punt A.

Deze richtingscoëfficiënt is gedefinieerd als $f'(x_1)$ of $\frac{dy}{dx}$ voor $(x = x_1)$. Dit spreken we uit als: dé *y* dé *x*.

$\frac{dy}{dx}$ noemen we *differentiaalquotiën*. Dit quotiënt is het symbool van de richtingscoefficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = f(x)$ in punt A.

De schrijfwijze $\frac{dy}{dx}$ heeft uitsluitend symbolische betekenis en mag in tegenstelling tot het differentiequotiënt niet als een gewoon quotiënt worden opgevat. De schrijfwijze $\frac{dy}{dx}$ is de notatie van het quotiënt van Δy en Δx *als* Δx *nadert tot* 0.

De helling van een grafiek in een bepaald punt is gelijk aan de richtingscoefficiënt van de raaklijn in dat punt aan de grafiek.

1.3 Continuïteit, differentieerbaarheid

De grafiek van een *continue* functie is een doorlopende lijn, zonder sprongen of gaten. In fig. 1.3.1 is de grafiek van een *discontinue* functie getekend.

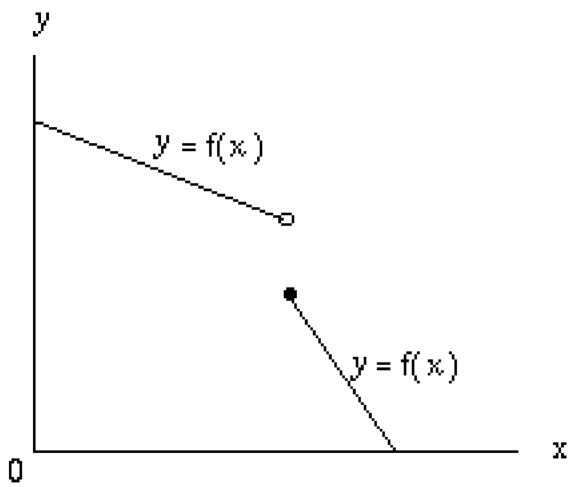


fig. 1.3.1

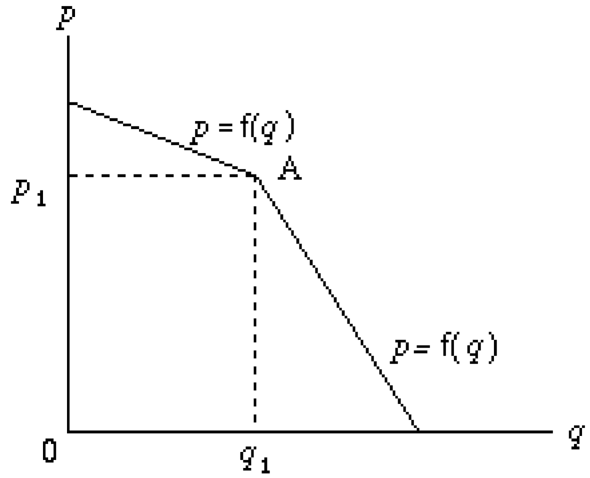


fig. 1.3.2

Als y = f(x) een differentiaalquotiënt heeft voor alle waarden van x, waarvoor y gedefinieerd is, noemen *we y* een *differentieerbare functie.*
Een differentieerbare functie moet continu zijn. Het omgekeerde hoeft niet te gelden; niet elke continue functie is differentieerbaar. In fig. 1.3.2 is de grafiek getekend van een continue functie p = f(q). Men noemt dit de geknikte vraaglijn. De functie is niet differentieerbaar voor $q = q_1$. In punt A kunnen we geen raaklijn trekken aan de grafiek.
We zullen ons verder beperken tot differentieerbare functies, tenzij het tegendeel vermeld wordt.

1.4 Een toepassing

In fig. 1.4.1 zijn twee *prijs-afzetgrafieken* getekend, die elkaar raken in punt C. Zoals gebruikelijk in economieboeken is de p-as vertikaal en de q-as horizontaal getekend.

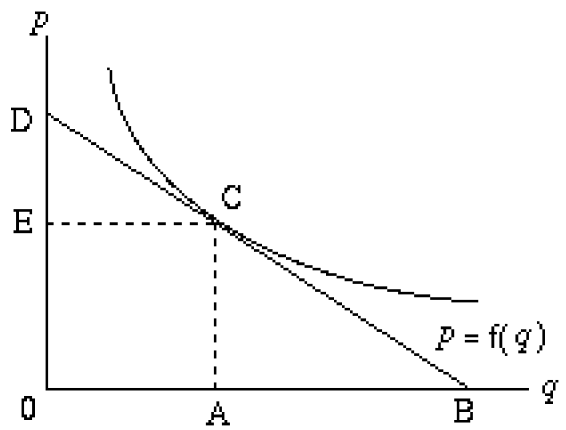


fig. 1.4.1

De prijselasticiteit van de gevraagde hoeveelheid van een artikel is gedefinieerd als

$$Ep_V = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \qquad (*)$$

waarin p en q respectievelijk de prijs en de gevraagde hoeveelheid zijn van het artikel.

In punt C geldt:
het differentiaalquotiënt $\frac{dq}{dp} = \frac{-\text{AB}}{\text{AC}}$
p = AC en q= OA
Als we dit substitueren in (*) krijgen we:

$$Ep_V = \frac{-\text{AB}}{\text{AC}} \cdot \frac{\text{AC}}{\text{OA}} \qquad \rightarrow \qquad Ep_V = \frac{-\text{AB}}{\text{OA}}$$

In de economie noemt men dit het Marshall-criterium.

1.5 Differentiëren

Differentiequotiënt

We bepalen eerst het differentiequotiënt van $y = f(x) = x^2$ voor een willekeurige waarde van x. Hiertoe laten we deze x -waarde willekeurig veranderen met Δx. De daardoor veroorzaakte verandering van y noemen we Δy

Nu geldt:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$
$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - y$$
$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$
$$\Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2xDx + Dx^2}{Dx}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Differentiaalquotiënt

We gaan nu over naar het differentiaalquotiënt:

Als Δx nadert tot nul, nadert $2x + \Delta x$ tot $2x$. Dus $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$

Het differentiaalquotiënt is blijkbaar ook een functie van x. We noemen deze functie de *afgeleide functie* van y of korter de *afgeleide.*

Behalve als $\frac{dy}{dx}$ en $f'(x)$ schrijft men de afgeleide ook wel als y'.

Op dezelfde wijze als voor $y = x^2$ kunnen we berekenen:

$$y = f(x) = 2x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x = 2 \,.\, 2x^{2-1}$$

$$y = f(x) = 3x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x = 2 \,.\, 3x^{2-1}$$

$$y = f(x) = 4x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 8x = 2 \,.\, 4x^{2-1}$$

$$y = f(x) = ax^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 2ax = 2 \,.\, ax^{2-1}$$

(a is een bekend getal)

$$\boxed{y = f(x) = ax^n \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = n \,.\, ax^{n-1}}$$

n mag ook een (negatieve) breuk zijn. Hieruit volgt:

Als $y = \mathrm{f}(x) = ax^0$, dan is $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{f}'(x) = 0 \,.\, a^{0-1} = 0 \,.\, \dfrac{1}{a} = 0$, dus

Als $y = \mathrm{f}(x) = a$, dan is $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{f}'(x) = 0$

Als $y = \mathrm{f}(x) = ax^1$, dan is $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{f}'(x) = 1 \,.\, ax^{1-1} = ax^0 = a \,.\, 1 = a$,

Als $y = \mathrm{f}(x) = ax$, dan is $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{f}'(x) = a$

Nog enkele toepassingen:

Toepassing 1:

$y = \mathrm{f}(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \mathrm{f}'(x) = 2 \,.\, \dfrac{1}{2}\, x^{2-1} = x^1 = x$

Toepassing 2:

$p = \mathrm{f}(q) = 3q^2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dp}{dq} = \mathrm{f}'(q) = 2 \,.\, 3q^{2-1} = 6q$

Toepassing 3:

$k = \mathrm{f}(a) = 2a^4 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dk}{da} = \mathrm{f}'(a) = 4 \,.\, 2a^{4-1} = 8a^3$

Toepassing 4:

$y = \mathrm{f}(p) = \dfrac{1}{4}\, p^{1/4}$

$\dfrac{dy}{dp} = \mathrm{f}'(p) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4}\, p^{1/4-1} = \dfrac{1}{16}\, p^{-3/4} = \dfrac{1}{16p^{3/4}} = \dfrac{1}{16\sqrt[4]{p^3}}$

Toepassing 5:

$$y = \text{f}(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^{1/2}}$$

Eerst vereenvoudigen: $y = \frac{1}{4}x^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \text{f'}(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{3/2 - 1} = \frac{3}{8}x^{1/2} = \frac{3}{8}\sqrt{x}$$

De somregel

Als u, *v* en *w* functies van *x* zijn en

$$\boxed{y = u + v - w \text{ dan geldt } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}}$$

Om een veelterm te differentiëren neemt men elke term afzonderlijk.

Toepassing 6:

$y = \text{f}(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b en c zijn bekende getallen)

$$\frac{dy}{dx} = \text{f}'(x) = 2ax + b$$

Toepassing 7:

$$p = \text{f}(q) = 2q^2 - \frac{1}{2}q + 2 \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dq} = \text{f'}(q) = 4q - \frac{1}{2}$$

Tweede afgeleide

Als we een functie $y = \text{f}(x)$ gedifferentieerd hebben en daardoor een afgeleide functie ontstaan is, kunnen we deze nieuwe functie ook weer differentiëren. De afgeleide van de afgeleide van y wordt de *tweede afgeleide* van y genoemd.

Men schrijft de tweede afgeleide als $f''(x)$ of als $\frac{d^2y}{dx^2}$

Voorbeeld:

$y = \text{f}(x) = x^4$

$\frac{dy}{dx}$ = f'(x) = $4x^3$ en $\frac{d^2y}{dx^2}$ = f''(x) = $12x^2$

Opgaven

Differentieer de volgende vergelijkingen naar x of q.
(a, b en c zijn bekende getallen)

1 $y = 6q^2$

2 $y = 4q^2 + q$

3 $y = 7q^4 - 6q^2 + \frac{1}{2}q + 4$

4 $y = 2(q - 2)^2 + 6$

5 $y = ax^2 + bx + c$

6 $y = (6x^2)(4x + 1)$

7 $y = (6x^2)(4x - 3)$

8 $y = ax - 2$

9 $y = \frac{2x}{4}$

10 $y = \frac{1}{2}q^2 - \frac{4}{3}q + q^4$

11 $q - y = 3q^2 + 2y$

12 $3y - q^2 = \frac{1}{2}y - q$

13 $y = \frac{1}{q^2}$

14 $y = \sqrt{7q}$

15 $q = \frac{1}{3y}$

16 $k = \frac{2}{x} + 4x^2$

17 $k = \frac{4q + 2}{2q}$

18 $q = \frac{3x + 4}{\frac{1}{2}x}$

19 $q = \frac{1}{x^4} - \sqrt{x}$

20 $p = \sqrt{5q} - 1$

21 $p = \sqrt{q} + 7q$

22 Differentieer $p = -2q + 1$ naar p.

23 Differentieer $q = -a^2 + 12$ naar a.

Differentieer de volgende vergelijkingen naar q of a.

24 $p = -2q + 1$

25 $p = -q^2 + 4q$

26 $q = \frac{1}{2} a^{1/3}$

27 $k = \frac{1}{3} q^3 - 2q^2 + 8q$

28 $TK = 2q^3 - \frac{1}{2} q^2 + 7q + 1$

2 Extreme waarden van functies

2.1 Gedrag van een functie en zijn eerste afgeleide

In fig. 2.1.1 is een stijgende grafiek getekend. De raaklijn aan de grafiek heeft een positieve richtingscoëfficiënt. De afgeleide $\frac{dy}{dx}$ is in het raakpunt dus positief.

Voor de waarden van x, waarvoor de afgeleide positief is, stijgt de grafiek van y = f(x) (en omgekeerd)

In fig. 2.1.2 is een dalende grafiek getekend. De raaklijn aan de grafiek heeft een negatieve richtingscoëfficiënt. De afgeleide $\frac{dy}{dx}$ is in het raakpunt dus negatief.

Voor de waarden van x, waarvoor de afgeleide negatief is, daalt de grafiek van y = f(x) (en omgekeerd)

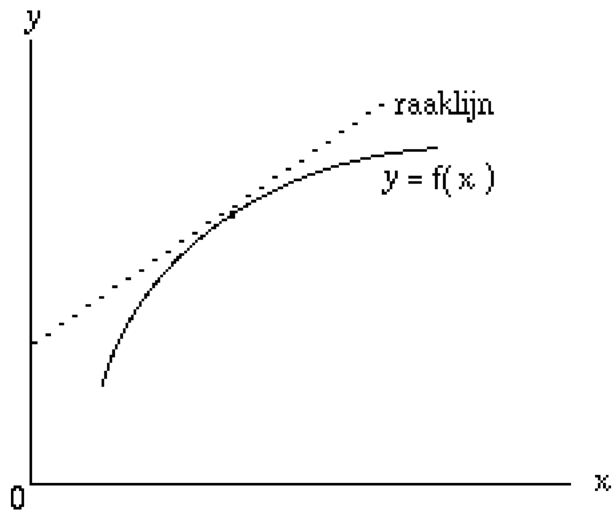


fig. 2.1.1

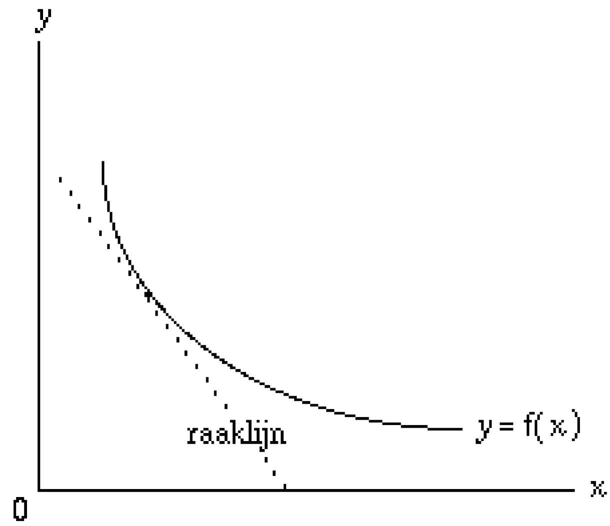


fig. 2.1.2

2.2 Bepaling van extreme waarden en buigpunten met behulp van het tekenverloop van de afgeleide

Voor de bepaling van *extreme waarden* (maximum/minimum) moeten we letten op het *tekenverloop* van de afgeleide functie. Het tekenverloop van de afgeleide kunnen we snel bepalen door waarden van x te substitueren in f'(x). We beschouwen nu fig. 2.2.1:

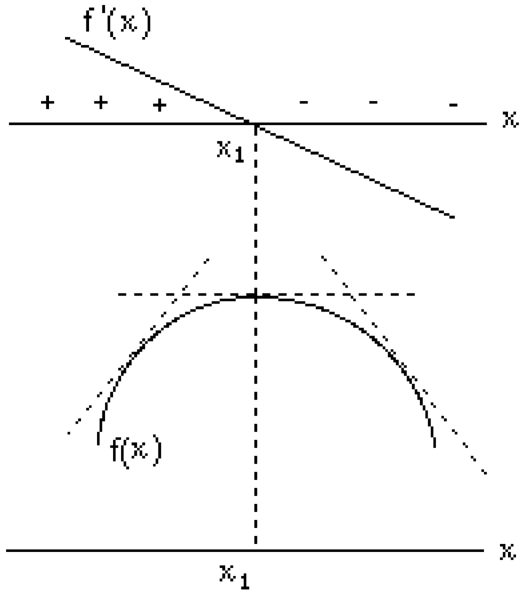


fig. 2.2.1

Voor $x < x_1$ is f'(x) positief en f(x) stijgend
Voor $x = x_1$ is f'(x) = 0 en f(x) maximaal
Voor $x > x_1$ is f'(x) negatief en f(x) dalend
De grafiek van de eerste afgeleide is dalend, dus de tweede afgeleide is negatief.

Voor de waarde(n) van x, waarvoor geldt: eerste afgeleide = 0 en tweede afgeleide < 0, is f(x) maximaal

Vervolgens beschouwen we fig. 2.2.2.

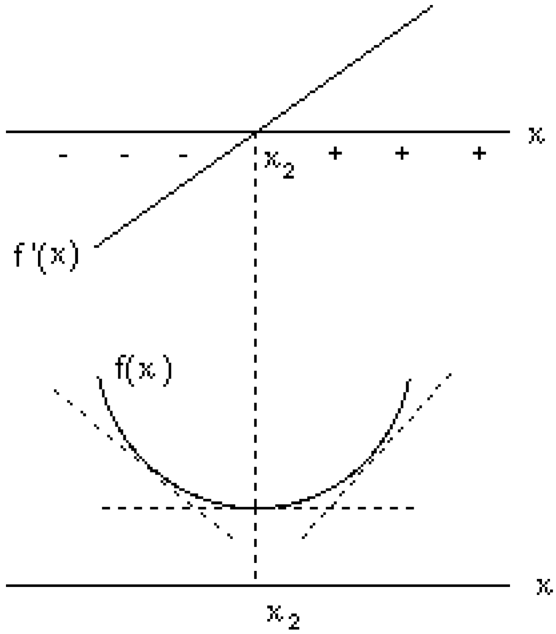


fig. 2.2.2

Voor $x < x_2$ is f‘(x) negatief en y = f(x) dalend
Voor $x = x_2$ is f‘(x) = 0 en y = f(x) minimaal
Voor $x > x_2$ is f‘(x) positief en y = f(x) stijgend
De grafiek van de eerste afgeleide is stijgend, dus de tweede afgeleide is positief.

Voor de waarde(n) van x, waarvoor geldt: eerste afgeleide = 0 en tweede afgeleide > 0, is f(x) minimaal

Het is ook mogelijk dat de afgeleide over zijn nulwaarde niet van teken wisselt. De grafiek van y = f(x) heeft dan een *buigpunt* met horizontale raaklijn. De raaklijn in zo'n punt gaat door de grafiek heen. Zie fig. 2.2.3 en 4.

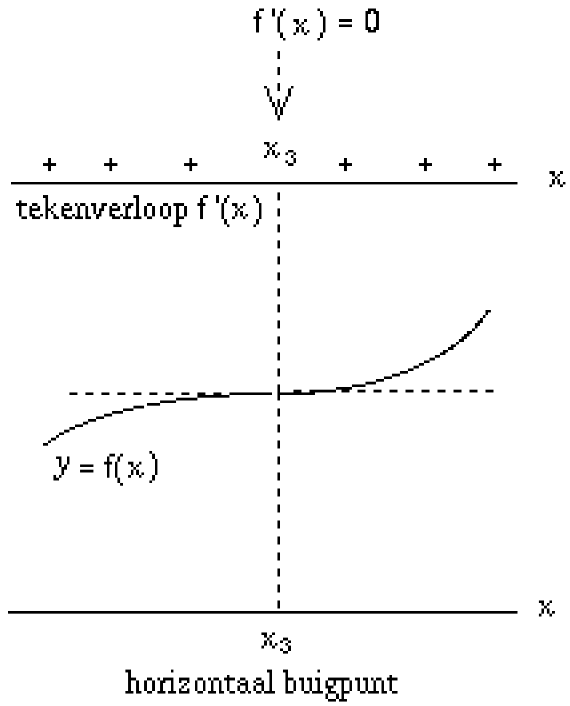


fig 2.2.3

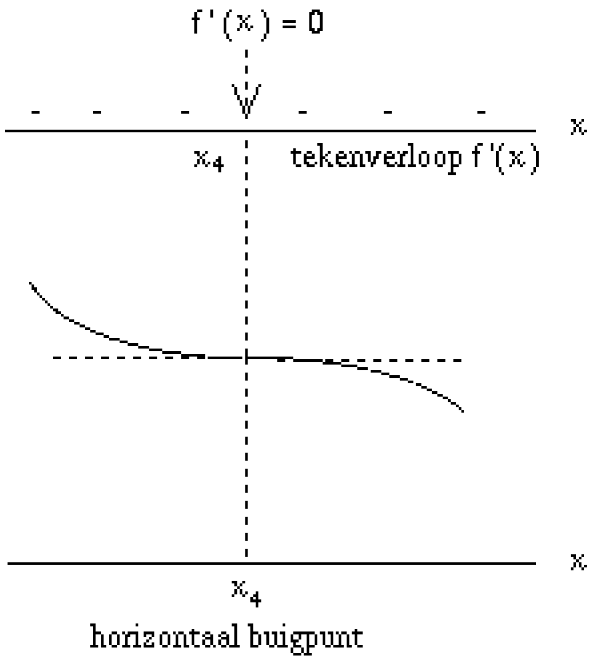


fig. 2.2.4

Een buigpunt met schuine raaklijn is ook mogelijk. De afgeleide neemt in dat punt een maximale waarde aan. De raaklijn is in een schuin buigpunt het steilst. Zie fig. 2.2.5.

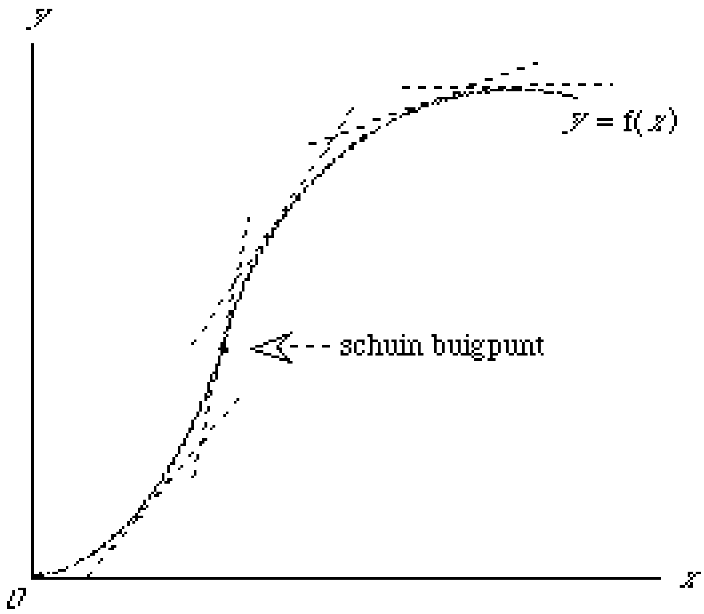


fig. 2.2.5

Als voor een waarde van *x* de eerste - en tweede afgeleide beide gelijk aan 0 zijn, is het mogelijk dat f(*x)* voor die waarde van *x* een extreme waarde heeft, maar het is ook mogelijk dat de grafiek van f(*x)* voor die waarde van *x* een horizontaal buigpunt heeft. De methode van het tekenverloop van de afgeleiden is veiliger.

3 Grafieken van functies, die niet van de eerste graad zijn

Voor het schetsen van een kromme letten we op:
- het definitiegebied
- het minimum en/of maximum
- het buigpunt
- nulpunt(en)
- snijpunt met de vertikale as

We komen verder een heel eind door het bepalen van een aantal willekeurige punten. Hoe nauwkeuriger de tekening moet worden, hoe meer functiewaarden we moeten berekenen.

3.1 Parabolen

A Schets een diagram van $y = f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

Uitwerking:

We berekenen enkele functiewaarden:

f(- 3)	$= 2(-3)^2$	- 12(- 3)	+ 10	= 64
f(- 2)	$= 2(-2)^2$	- 12(- 2)	+ 10	= 42
f(- 1)	$= 2(-1)^2$	- 12(- 1)	+ 10	= 24
f(0)	$= 2(0)^2$	- 12(0)	+ 10	= 10
f(1)	$= 2(1)^2$	- 12(1)	+ 10	= 0
f(2)	$= 2(2)^2$	- 12(2)	+ 10	= - 6
f(3)	$= 2(3)^2$	- 12(3)	+ 10	= - 8
f(4)	$= 2(4)^2$	- 12(4)	+ 10	= - 6
f(5)	$= 2(5)^2$	- 12(5)	+ 10	= 0
f(6)	$= 2(6)^2$	- 12(6)	+ 10	= 10
f(7)	$= 2(7)^2$	- 12(7)	+ 10	= 24
f(8)	$= 2(8)^2$	- 12(8)	+ 10	= 42
f(9)	$= 2(9)^2$	- 12(9)	+ 10	= 64

Het diagram, een *dalparabool,* is geschetst in fig. 3.1.1. De *top* is punt C(3, - 8). De rechte, die we beschrijven met $x = 3$ en door de top gaat, noemen we de *symmetrie-as*.

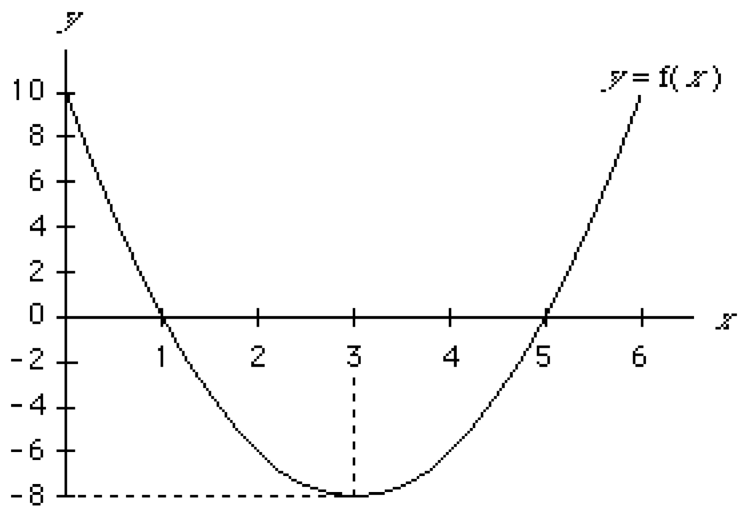


fig. 3.1.1

B Schets een diagram van $y = f(x) = - 2x^2 + 8x$

Uitwerking:

We berekenen weer enkele functiewaarden:

$f(-1) = -2(-1)^2 + 8(-1) = 10$
$f(0) = -2(0)^2 + 8(0) = 0$
$f(1) = -2(1)^2 + 8(1) = 6$
$f(2) = -2(2)^2 + 8(2) = 8$
$f(3) = -2(3)^2 + 8(3) = 6$
$f(4) = -2(4)^2 + 8(4) = 0$
$f(5) = -2(5)^2 + 8(5) = -10$

Het diagram, een *bergparabool, is* geschetst in fig. 3.1.2. De top is punt B(2, 8). De rechte, die behoort bij $x = 2$ en door de top gaat, is de symmetrie - as.

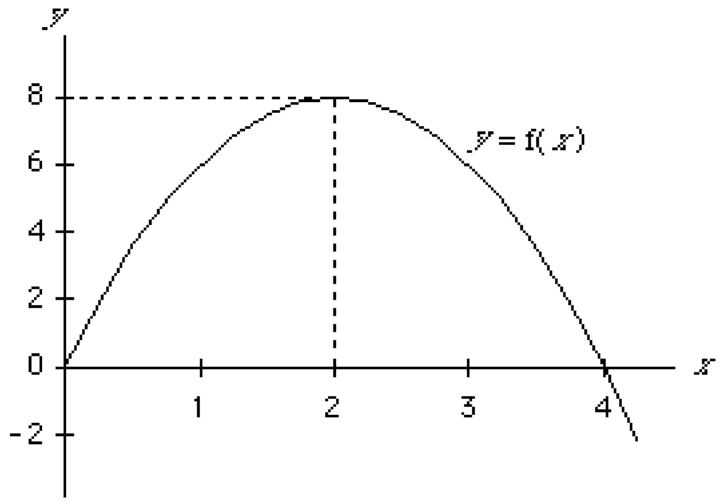


fig. 3.1.2

C Onderzoek van $y = \mathrm{f}(x) = ax^2 + bx + c$. De getallen a, b en c zijn bekend ($a \neq 0$)

Uitwerking:

Om de parabool te kunnen tekenen, bepalen we de volgende karakteristieke punten.

Extreme waarde:

$\mathrm{f}'(x) = 2ax + b$ en $\mathrm{f}''(x) = 2a$

Er zijn nu twee mogelijkheden:
- Als a een positief getal is, dan is de grafiek van $\mathrm{f}(x)$ een dalparabool; er is immers een minimum, omdat $\mathrm{f}''(x) > 0$.
- Als a een negatief getal is, dan is de grafiek van $\mathrm{f}(x)$ een bergparabool; er is nu een maximum, omdat $\mathrm{f}''(x) < 0$.

Snijpunt met de y-as:

Het snijpunt van de parabool met de y - as is te vinden door x gelijk aan nul te stellen. We krijgen dan:
$y = a \,.\, 0^2 + b \,.\, 0 + c$
$y = c$. Dus punt $(0, c)$.

Nulpunten:

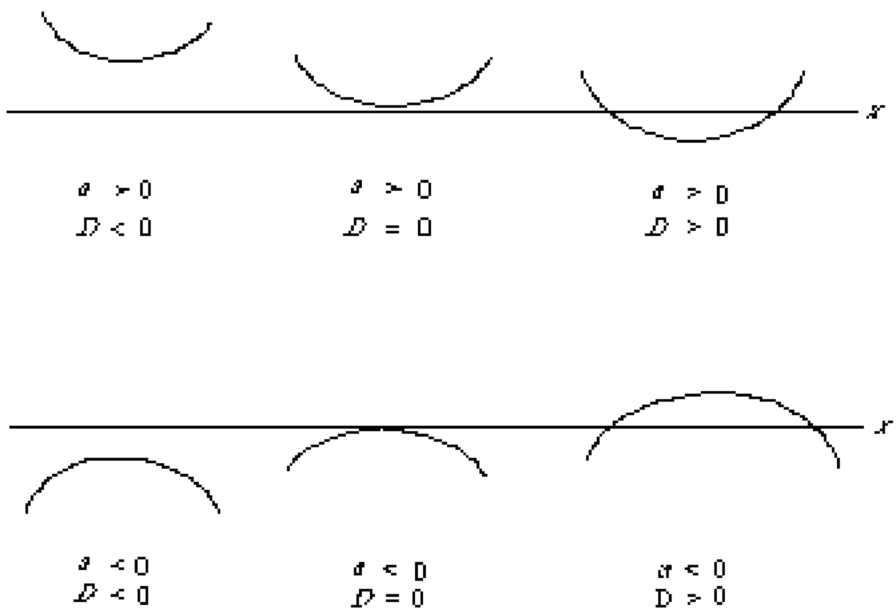
De snijpunten van de parabool met de x - as noemen we *nulpunten*. Deze zijn te vinden door y gelijk aan nul te stellen. We krijgen dan:
$0 = ax^2 + bx + c$.
Dit is een tweedegraadsvergelijking. Er zijn drie mogelijkheden:

I De discriminant $D = b^2 - 4ac$ is kleiner dan nul. Er zijn dan geen reële wortels. De parabool snijdt de x - as niet.

II De discriminant is gelijk aan nul. Er is dan één wortel. De parabool raakt de x-as.

III De discriminant is groter dan nul. Er zijn nu twee verschillende wortels. De parabool snijdt de x - as in twee punten.

Overzicht:



D Schets de kromme, behorende bij $y = 2q^2 - 12q + 10$.

Uitwerking:

We bepalen eerst de karakteristieke punten.

Extreme waarde:

$f'(q) = 4q - 12 = 0$, als $q = 3$
y is *minimaal* $2(3)^2 - 12(3) + 10 = - 8$,

Snijpunt met de y - as:

als $q = 0$ $\rightarrow$ $y = 2(0)^2 - 12(0) + 10$ $\rightarrow$ $y = 10$.

Nulpunten:
als $y = 0$ $\rightarrow$ $2q^2 - 12q + 10 = 0$ $\rightarrow$ $q^2 - 6q + 5 = 0$
$(q - 1)(q - 5) = 0$, als $q = 1$ of $q = 5$.

Eventueel kunnen we nog een paar extra punten berekenen. Het diagram is geschetst in fig. 3.1.1.

Opgaven

Schets de parabolen, die beschreven worden door:

1 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$

2 $y = - 5x^2 + 60x$

3 $y = 4x^2 - 6x + 2$

4 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$

3.2 Berekening van snijpunten en raakpunten

Break-evenafzet

Bedrijfseconomen berekenen vaak de zogenaamde break-evenafzet. Dit is de afzet waarbij de kosten precies gedekt zijn door de opbrengst (= omzet).

Voorbeeld:

Voor welke waarde(n) van q geldt dat
de totale geldopbrengst $TO = - 2q^2 + 12q$ gelijk is aan
de totale kosten $TK = 2q + 8$?
q = aantal eenheden verkochte = aantal geproduceerde goederen
$(0 \leq q \leq 6)$

Oplossing:

We moeten *TO* gelijk stellen aan *TK*:
$-2q^2 + 12q = 2q + 8 \rightarrow \quad -2q^2 + 12q - 2q - 8 = 0$
$q^2 - 5q + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (q - 4)(q - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad q = 4$ of $q = 1$.
Zie fig.3.2.1.

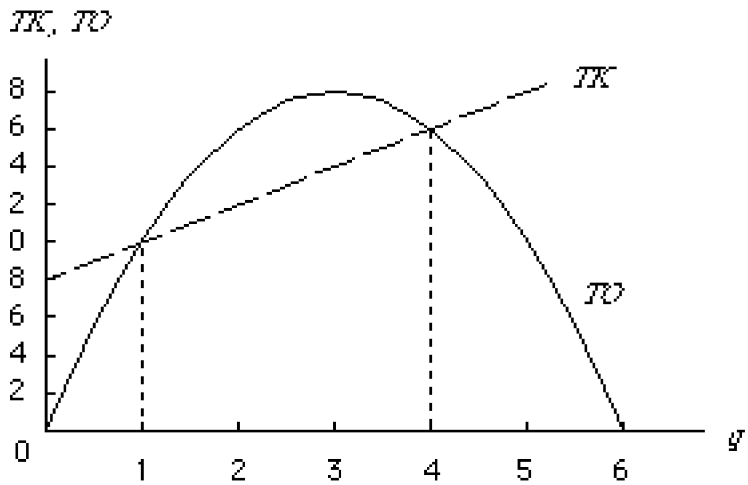


fig.3.2.1

Marginale- en gemiddelde kosten

Een totale-kostenfunctie luidt: $TK = f(q) = \frac{1}{2}q^3 - 3q^2 + 6q$
(q = aantal eenheden product; $0 \le q \le 6$).
Bereken de snijpunten van de grafiek van de gemiddelde kosten *GTK* en de grafiek van de marginale kosten *MK* .
De marginale kosten krijgen we als we de afgeleide van de totale-kostenfunctie bepalen.

Oplossing:

$GTK = \frac{TK}{q} \quad \rightarrow \quad GTK = \frac{1}{2}q^2 - 3q + 6$

$MK = f'(q) \quad \rightarrow \quad MK = \frac{3}{2}q^2 - 6q + 6$

In de snijpunten geldt:

$GTK = MK \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}q^2 - 3q + 6 = \frac{3}{2}q^2 - 6q + 6$

We herleiden nu op 0:

$\frac{1}{2}q^2 - 3q + 6 - \frac{3}{2}q^2 + 6q - 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad q^2 - 3q = 0$

$q(q - 3) = 0$

$q = 0 \quad \rightarrow \qquad MK = GTK = \frac{1}{2}(0)^2 - 3(0) + 6 = 6$

$q = 3 \quad \rightarrow \qquad MK = GTK = \frac{1}{2}(3)^2 - 3(3) + 6 = 1\frac{1}{2}$

Dus snijpunt (0, 6) en snijpunt $(3, 1\frac{1}{2})$. Zie fig. 3.2.2.

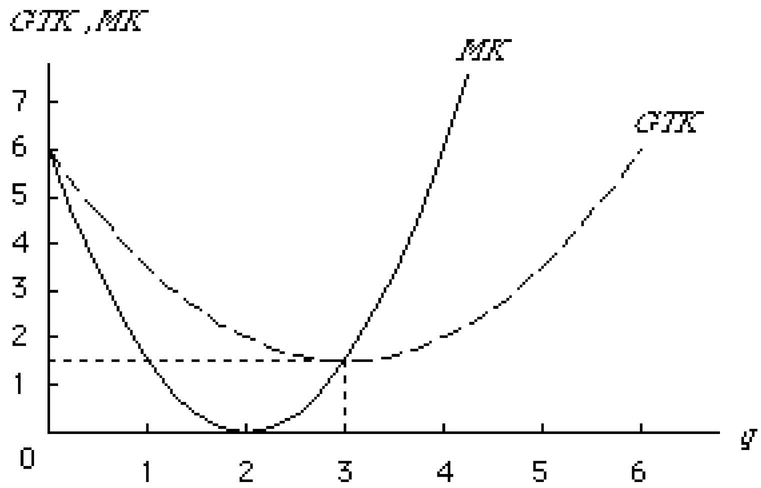


fig. 3.2.2

Prijs-afzetlijn

Gegeven zijn:

$p = -1\frac{1}{2}q + b \qquad\qquad (p \geq 0, q \geq 0)$

$GTK = \frac{3}{8}q^2 - 3q + 8 \qquad\qquad (0 \leq q \leq 8)$

q = aantal eenheden verkochte = aantal geproduceerde goederen.

GTK = gemiddelde totale kosten.

Voor welke waarde van *b* raakt de grafiek van de prijs-afzetfunctie
$p = \mathrm{f}(q)$ de grafiek van de kosten per eenheid product *GTK* ?

Oplossing:

In het raakpunt geldt:

helling grafiek *GTK* = helling grafiek *p*

$$\frac{dGTK}{dq} = \frac{dp}{dq}$$

$\frac{6}{8}q - 3 = -1\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad q = 2.$

Dit gesubstitueerd in $GTK = \frac{3}{8}q^2 - 3q + 8$ geeft

$k = \frac{3}{8}(2)^2 - 3(2) + 8 \quad \rightarrow \quad k = 3\frac{1}{2}$

$q = 2$ en $GTK = p = 3\frac{1}{2}$ gesubstitueerd in $p = -1\frac{1}{2}q + b$ geeft

$3\frac{1}{2} = (-1\frac{1}{2})2 + b \quad \rightarrow \quad b = 6\frac{1}{2}$

Dus $p = -1\frac{1}{2}q + 6\frac{1}{2}$

Raakpunt $(2, 3\frac{1}{2})$. Zie fig. 3.2.3. Hierin is het zogenaamde raaklijntheorema bij monopolistische concurrentie uit de micro-economie weergegeven.

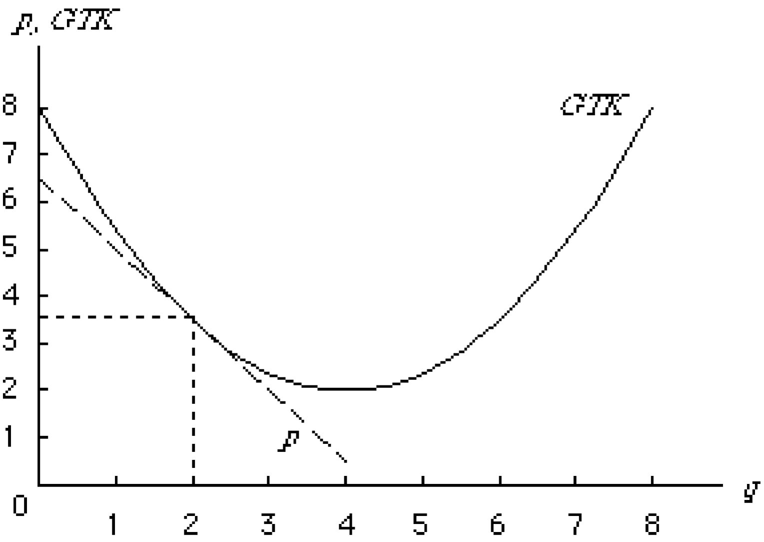


fig. 3.2.3

Opgaven

1 Schets in één figuur de parabolen *GTK* en *MK*.

$GTK = \frac{1}{3}q^2 - 2q + 6$ en

$MK = q^2 - 4q + 6$.

Bepaal ook de coördinaten van het snijpunt.

2 Schets in één figuur de parabolen *GP* en *MP:*

$GP = -\frac{1}{3}a^2 + 6a$

$MP = -a^2 + 12a$.

3 Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool, die we beschrijven met $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\frac{1}{2}$.

De raaklijn moet evenwijdig zijn aan de lijn, die tot vergelijking heeft $y = - x + 6$.

4 Een producent wordt geconfronteerd met de volgende vergelijkingen:

$p = -5q + 60$ (prijs-afzetvergelijking)
$TK = 10q + 80$ (totale-kostenvergelijking)

p = prijs per product
q = aantal geproduceerde = aantal verkochte goederen
TK = totale kosten Verder geldt: $0 \leq q \leq 12$.

a Druk de totale geldopbrengst $TO = pq$ uit in q.

b Druk de totale winst $TW = TO - TK$ uit in q.

c Bereken hoeveel producten deze producent moet verkopen om een maximale geldopbrengst te behalen. Hoe groot is die opbrengst? Bereken ook de bijbehorende prijs.

d Bereken hoeveel producten de producent moet verkopen om een maximale winst te behalen. Hoe groot is die winst? Bereken ook de bijbehorende prijs.

e Schets in één diagram:
- de geldopbrengst per product
- de totale kosten
- de totale geldopbrengst
- de totale winst.

3.3 Tweedegraadsongelijkheden

Een kwadratische ongelijkheid kunnen we grafisch oplossen.

Voorbeeld:

Voor welke waarde(n) van x geldt:

$2x^2 - x + 4 > x^2 - 2x + 6$?

Oplossing:

Eerst vereenvoudigen we de ongelijkheid:

$2x^2 - x + 4 - x^2 + 2x - 6 > 0$
$x^2 + x - 2 > 0$

Het diagram In fig. 3.3.1 van $y = x^2 + x - 2$ laat zien dat y groter is dan nul, als $x > 1$ en ook voor $x < -2$.

Om het vraagstuk op te lossen, hoeven we alleen de nulpunten van *y* te berekenen. een gedetailleerde grafiek is immers niet nodig.

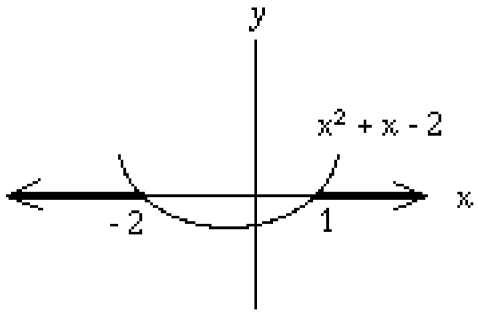


fig. 3.3.1

3.4 Hyperbo1en

De grafiek van een gebroken functie noemen we een hyperbool. In deze paragraaf worden enkele veel voorkomende typen behandeld.

Gemiddelde constante kosten

De constante kosten van een productieproces luiden $TCK = 100$. Schets een diagram van $GCK = \dfrac{TCK}{q}$

TCK = totale constante kosten
GCK = gemiddelde constante kosten
q = aantal eenheden product
$q \geq 0$

Uitwerking:

$$GCK = \frac{100}{q}$$

We berekenen enkele functiewaarden:

$f(\frac{1}{3}) = 300$

$f(\frac{1}{2}) = 200$

$f(1) = 100$

$f(2) = 50$

$f(3) = 33\frac{1}{3}$

$f(100) = 1$

$f(1.000) = \frac{1}{10}$

Dus:
- als *q* heel groot wordt, *nadert GCK* tot 0 (de *q* - as)
- als *q* nadert tot 0, wordt *GCK* heel groot (nadert tot de *GCK*- as).

De grafiek, die we een *hyperbool* noemen, is getekend in fig. 3.4.1.

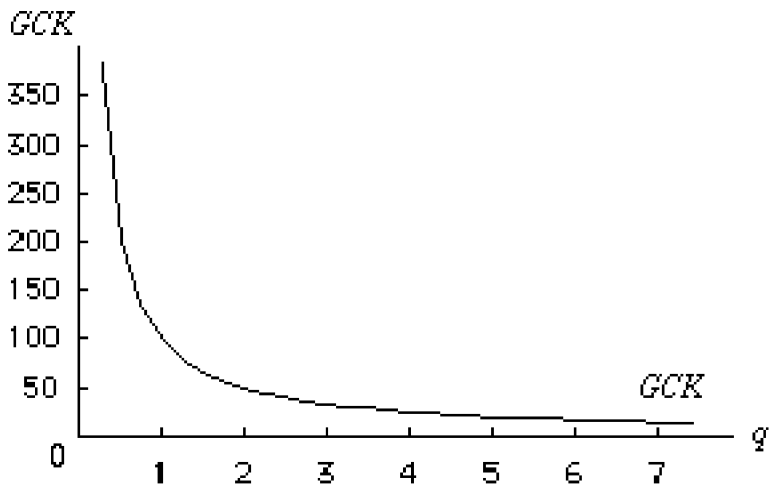


fig. 3.4.1

Gemiddelde- en marginale consumptiecurve

Gegeven is de consumptiefunctie $C = f(y) = 0,8y + 10$, waarin C = consumptie en y = inkomen ($y > 0$).

Teken in één diagram

- de gemiddelde-consumptiequote $\frac{C}{\text{y}}$
- de marginale-consumptiequote $\frac{dC}{dy}$

Uitwerking:

$\frac{dC}{dy} = 0{,}8$

$\frac{C}{\text{y}} = \frac{0{,}8y + 10}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{\text{y}} = 0{,}8 + \frac{10}{y}$

Als y heel groot wordt, nadert $0{,}8 + \frac{10}{y}$ tot 0,8, want $\frac{10}{y}$ nadert dan tot 0.

Als y heel klein wordt, wordt $0{,}8 + \frac{10}{y}$ heel groot, want $\frac{10}{y}$ wordt dan heel groot.

Verder berekenen we nog enkele punten:

f(25)	= 1,2
f(50)	= 0,10
f(l00)	= 0,9
f(200)	= 0,85
f(400)	= 0,825

Zie fig. 3.4.2.

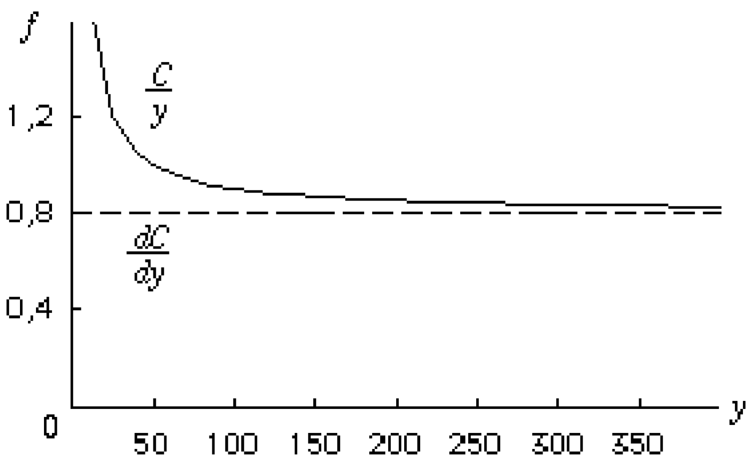


fig. 3.4.2

Gemiddelde totale-kostencurve

Een totale-kostenvergelijking luidt $TK = q^2 - q + 4$

Schets een diagram van $GTK = \dfrac{TK}{q}$

TK = de totale kosten
GTK = de kosten per eenheid product
q = aantal eenheden product.

Uitwerking:

$GTK = \dfrac{q^2 - q + 4}{q} \quad \rightarrow \quad GTK = q - 1 + \dfrac{4}{q}$

Als q heel groot wordt, nadert GTK tot $q - 1$, want $\dfrac{4}{q}$ nadert dan tot 0.

Als q heel klein wordt, wordt GTK heel groot, want $\dfrac{4}{q}$ wordt dan heel groot.

Nulpunten:

Bij de vorige twee hyperbolen konden we direct zien dat ze geen nulpunten hebben. De grafiek van GTK heeft nulpunten als $q^2 - q + 4$ (de teller van de breuk) gelijk is aan nul. dit is onmogelijk, want de discriminant is negatief. Immers $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 . 1 . 4 = -15$.

Extreme waarden:

Extreme waarden vinden we door de afgeleide gelijk aan nul te stellen.

$GTK = q - 1 + 4q^{-1} \quad \rightarrow \quad f'(q) = 1 - 1 . 4 . q^{-2} \quad \rightarrow$

$f'(q) = 1 - \dfrac{4}{q^2}$

$f'(q) = 0$ als $1 - \dfrac{4}{q^2} = 0 \quad \rightarrow \quad q^2 = 4$ als $q = 2$ of $q = -2$

De laatste waarde van q kan niet, want q moet positief zijn.
Er is dus een extreme waarde als $q = 2$.
Vervolgens gaan we na of de tweede afgeleide voor deze waarde van q positief is of negatief. In het vorige hoofdstuk hebben we geleerd dat in het eerste geval $f(q) = GTK$ een minimum heeft en in het tweede geval een maximum.

$f'(q) = 1 - 4 . q^{-2} \quad \rightarrow \quad f''(q) = 0 - 2 . -4 . q^{-3} = \dfrac{8}{q^2}$

We substitueren $q = 2$ in $f''(q)$:

$f''(2) = \dfrac{8}{2^3} = 1$

f(q) = *GTK* heeft dus een minimum als q = 2, want f''(q) is dan positief.

GTK is dan $\dfrac{2^2 - 2 + 4}{2} = 3$. Zie fig. 3.4.3.

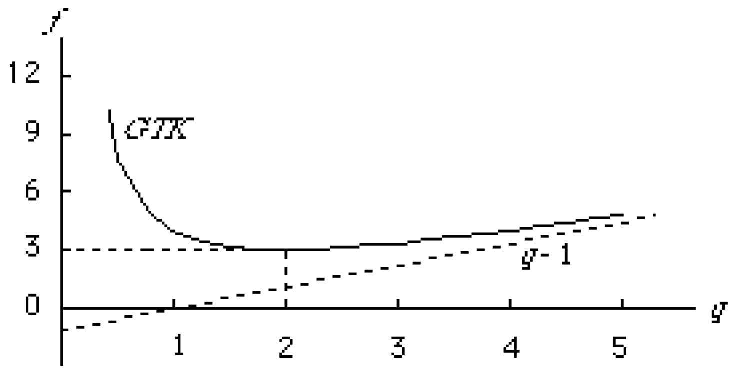


fig. 3.4.3

Opgaven

1 In een bedrijf worden producten X gefabriceerd. De constante kosten van het productieproces zijn 200 geldeenheden. Schets een diagram van de constante kosten per eenheid product X.

2 Schets een diagram van de vraag naar een artikel:

$p = 200 + \dfrac{200}{q}$

q = de gevraagde hoeveelheid en p de prijs.

3 Schets de prijs-afzetlijn behorende bij $p = -\frac{1}{4}q_V + 2$ van een artikel voor $0 < q_V < 8$.

Schets in dezelfde figuur de grafiek of een diagram van de prijselasticiteit van de gevraagde hoeveelheid (*Epv*) van dat artikel.

$Epv = \dfrac{dq_V}{dp} \cdot \dfrac{p}{q_V}$ $\quad (0 < q_V < 8)$

p en q_V zijn respectievelijk de prijs en de gevraagde hoeveelheid van het artikel.

4 Een totale-kostenfunctie luidt: $TK = f(q) = q^2 + 100$
q = aantal eenheden product.

Schets een diagram van de kosten per eenheid product.

3.5 Grafieken van derdegraadsfuncties

In de micro-economie hanteert men vaak een derdegraads productiefunctie.

Voorbeeld:

$q = f(a) = - a^3 + 3a^2$.
q = het aantal producteenheden
a = het aantal arbeidseenheden

Voor het tekenen van de grafiek van de productiefunctie moeten we eerst de nulpunten en het maximum bepalen. Hoe we het laatste kunnen doen is uitvoerig beschreven in hoofdstuk 6.

Nulpunten:

Als $q = - a^3 + 3a^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a^2(a - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0, a = 3$

Maximum:

$\frac{dq}{da} = f'(a) = - 3a^2 + 6a$
$f'(a) = 0$ als $a(- 3a + 6) = 0$
$a = 0$ of $a = 2$
De grafiek van $f'(a)$ is een bergparabool met een maximum bij $a = 1$:
$f'(1) = - 3 . 1 + 6 . 1 = 3$. Zie fig. 3.5.1.
$\frac{dq}{da}$ noemt men de marginale productie.

Verloop van de productiecurve:

Het verloop van de productiegrafiek kunnen we afleiden uit het gedrag van zijn afgeleide $f'(a)$, als a toeneemt.

Voor $0 < a < 2$ is $f'(a)$ positief en q dus stijgend
Voor $a = 0$ *en* $a = 2$ is $f'(a) = 0$ en q dus maximaal
Voor $a > 2$ is $f'(a)$ negatief en q dus dalend

Bij $a = 1$ heeft q een schuin buigpunt, want de afgeleide neemt in dat punt zijn maximale waarde aan; f'(a) is dan gelijk aan 3.

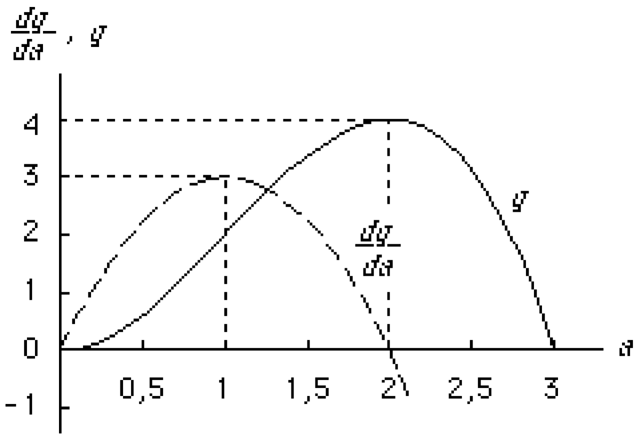


fig. 3.5.1

Opgaven

Schets de curve die beschreven wordt met:

1 $K = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x$, waarbij $x > 0$

2 $K = \frac{1}{2}q^3 - 3q^2 + 6q$, waarbij $q > 0$

3 $q = - a^3 + 6a^2$, waarbij $q > 0$ en $a > 0$

4 $Q = - a^3 + 9a^2$, waarbij $Q > 0$ en $a > 0$

Uitwerkingen

Hoofdstuk 1

1.5

1 $y = 6q^2 \rightarrow \frac{dy}{dq} = 6 \,.\, 2q^{2-1} = 12q$

2 $y = 4q^2 + q \rightarrow \frac{dy}{dq} = 4 \,.\, 2q^{2-1} + 1 = 8q + 1$

3 $y = 7q^4 - 6q^2 + \frac{1}{2}q + 4 \rightarrow \frac{dy}{dq} = 28q^3 - 12q + \frac{1}{2}$

4 $y = 2(q-2)^2 + 6 = 2q^2 - 8q + 14 \rightarrow \frac{dy}{dq} = 4q - 8$

5 $y = ax^2 + bx + c \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2ax + b$

6 $y = (6x^2)(4x + 1) = 24x^3 + 6x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 72x^2 + 12x$

7 $y = (6x^2)(4x - 3) = 24x^3 - 18x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 72x^2 - 36x$

8 $y = ax - 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = a$

9 $y = \frac{2x}{4} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

10 $y = \frac{1}{2}q^2 - \frac{4}{3}q + q^4 \rightarrow \frac{dy}{dq} = 4q^3 + q - \frac{4}{3}$

11 $q - y = 3q^2 + 2y \rightarrow y = -q^2 + \frac{1}{3}q$

$\frac{dy}{dq} = -2q + \frac{1}{3}$

12 $3y - q^2 = \frac{1}{2}y - q$ $\rightarrow$ $y = \frac{2}{5}q^2 - \frac{2}{5}q$

$\frac{dy}{dq} = \frac{4}{5}q - \frac{2}{5}$

13 $y = \frac{1}{q^2} = q^{-2}$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dq} = -2q^{-2-1} = -\frac{2}{q^3}$

14 $y = \sqrt{7q} = \sqrt{7}\ .\ q^{0,5}$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dq} = \frac{1}{2}\sqrt{7}\ .\ q^{0,5-1}$

$\frac{dy}{dq} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{q}}$

15 $y = \frac{1}{3q} = \frac{1}{3}\ q^{-1}$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dq} = -1\ .\ \frac{1}{3}\ q^{-2} = \frac{-1}{3q^2}$

16 $k = \frac{2}{x} + 4x^2$ $\rightarrow$ $\frac{dk}{dx} = -\frac{2}{x^2} + 8x$

17 $k = \frac{4q+2}{2q} = 2 + \frac{1}{q}$ $\rightarrow$ $\frac{dk}{dq} = \frac{-1}{q^2}$

18 $q = \frac{3x+4}{\frac{1}{2}x} = 6 + \frac{8}{x}$ $\rightarrow$ $\frac{dq}{dx} = \frac{-8}{x^2}$

19 $q = \frac{1}{x^4} - \sqrt{x} = x^{-4} - x^{0,5}$ $\rightarrow$ $\frac{dq}{dx} = \frac{-4}{x^5} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

20 $p = \sqrt{5q} - 1 = \sqrt{5}\ .\ q^{0,5} - 1$ $\rightarrow$ $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{q}}$

21 $p = \sqrt{q} + 7q$ $\rightarrow$ $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{2\sqrt{q}} + 7$

22 $p = -2q + 1$ $\rightarrow$ $q = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$

$\frac{dq}{dp} = -\frac{1}{2}$

23 $q = -a^2 + 12$ $\rightarrow$ $\frac{dq}{da} = -2a$

24 $p = -2q + 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dp}{dq} = -2$

25 $p = -q^2 + 4q \quad \rightarrow \quad \dfrac{dp}{dq} = -2q + 4$

26 $q = \dfrac{1}{2} a^{1/3} \quad \rightarrow \quad \dfrac{dq}{da} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} a^{1/3 - 1} = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{a^2}}$

27 $k = \dfrac{1}{3} q^3 - 2q^2 + 8q \quad \rightarrow \quad \dfrac{dk}{dq} = q^2 - 4q + 8$

28 $TK = 2q^3 - \dfrac{1}{2} q^2 + 7q + 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dTK}{dq} = 6q^2 - q + 7$

Hoofdstuk 3

3.1

1

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$

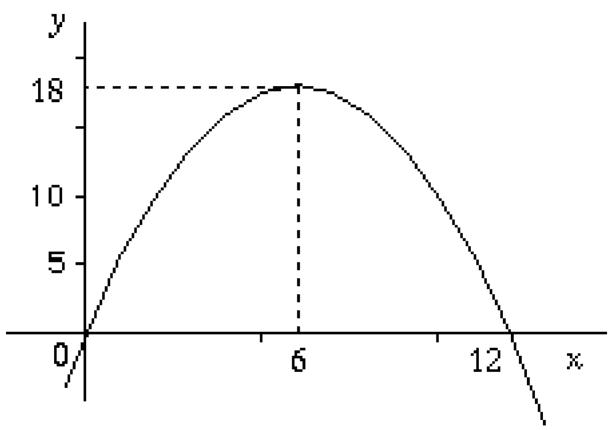
Nulpunten:

Als $-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(-\frac{1}{2}x + 6) = 0$

$x = 0$ en $x = 12$

Maximum:

$x = 6 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 = 18$



2

$y = -5x^2 + 60x$

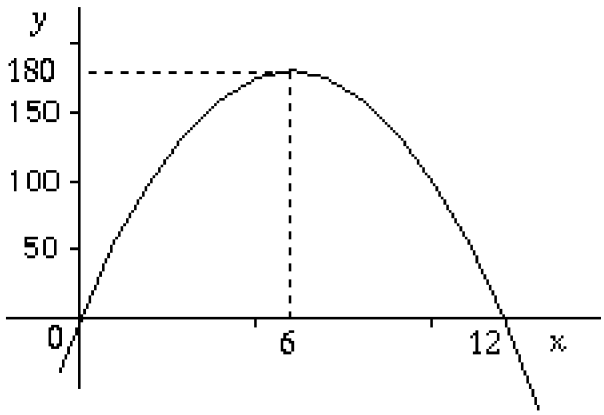
Nulpunten:

Als $-5x^2 + 60x = 0 \rightarrow \quad x(-5x + 60) = 0$

$x = 0$ en $x = 12$

Maximum:

$x = 6 \quad \rightarrow \quad y = -5 .\ 6^2 + 60 .\ 6 = 180$



3

$y = 4x^2 - 6x + 2$

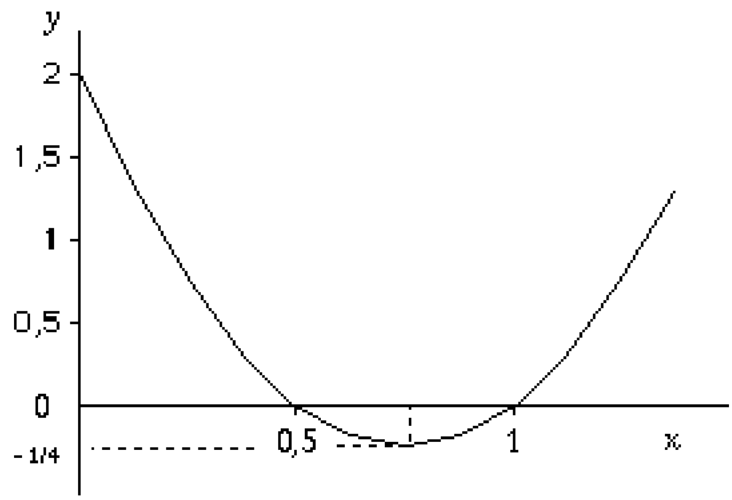
Nulpunten:

Als $4x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow \quad (x - \frac{1}{2})(x - 1) = 0$

$x = \frac{1}{2}$ en $x = 1$

Minimum:

$x = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad y = 4(\frac{3}{4})^2 - 6 .\ \frac{3}{4} + 2 = -\frac{1}{4}$



4

$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$

Nulpunten:

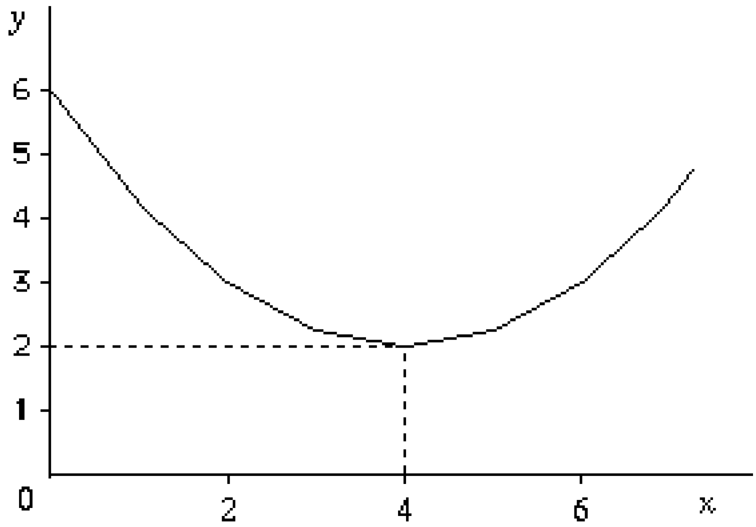
Als $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 6 = 0$

Er zijn geen nulpunten,want de discriminant is negatief.

Minimum:

Als $\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$x = 4 \rightarrow \quad y = \frac{1}{4}(4)^2 - 2 \, . \, 4 + 6 = 2$



3.2

1

$GTK = \frac{1}{3}q^2 - 2q + 6$ en

$MK = q^2 - 4q + 6.$

Nulpunten:

Er zijn geen nulpunten,want de discriminant is negatief.

Minimum GTK:

Als de afgeleide = 0 $\rightarrow$ $\frac{2}{3}q - 2 = 0$

$q = 3 \rightarrow \quad GTK = \frac{1}{3}(3)^2 - 2 \,.\, 3 + 6 = 3$

Minimum MK:

Als de afgeleide = 0 $\rightarrow$ $2q - 4 = 0$

$q = 2 \rightarrow \quad MK = (2)^2 - 4 \,.\, 2 + 6 = 2$

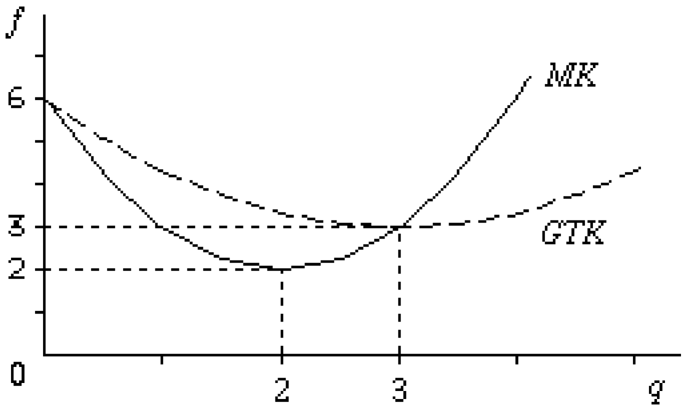
Snijpunten:

Als $GTK = MK$

$\frac{1}{3}q^2 - 2q + 6 = q^2 - 4q + 6 \quad \rightarrow \qquad q(q - 3) = 0$

$q = 0$ en $q = 3$

MK (en ook GTK) is dan respectievelijk 6 en $3^2 - 4 \,.\, 3 + 6 = 3$



2

$GP = -\frac{1}{3}a^2 + 6a$

$MP = -a^2 + 12a$

Nulpunten:

$GP = 0 \qquad \rightarrow \qquad a(-\frac{1}{3}a + 6) = 0$

$a = 0$ en $a = 18$

$MP = 0 \qquad \rightarrow \qquad a(-a^2 + 12) = 0$

$a = 0$ en $a = 12$

Maximum MP:

Als de afgeleide = 0

$-2a + 12 = 0$

$a = 6 \rightarrow \quad MP = -(6)^2 + 12 \,.\, 6 = 36$

Maximum GP:

$-\frac{2}{3}a + 6 = 0$

$a = 9 \rightarrow \quad GP = -\frac{1}{3}(9)^2 + 6 \,.\, 9 = 27$

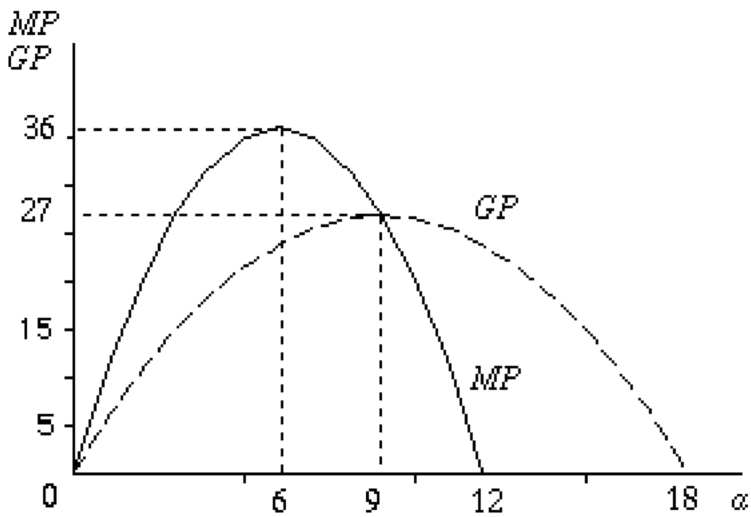
Snijpunten:

Als $MP = GP$

$-a^2 + 12a = -\frac{1}{3}a^2 + 6a$

$a(a - 9) = 0 \rightarrow \quad a = 0$ en $a = 9$

$MP = GP$ is dan respectievelijk 0 en $-9^2 + 12 \,.\, 9 = 27$



3 Stel $y = ax + b$

De raaklijn moet evenwijdig zijn aan de lijn, die tot vergelijking heeft $y = - x + 6$

De raaklijn heeft dus de vergelijking $y = - x + b$

In het raakpunt geldt:

helling $- x + b$ = helling $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = - 1 = - x + 3 \quad \rightarrow \quad x = 4$

Dit gesubstitueerd in $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\frac{1}{2}$ geeft $y = 7\frac{1}{2}$

Dus raakpunt $(4, 7\frac{1}{2})$

$x = 4$ en $y = 7\frac{1}{2}$ gesubstitueerd in $y = - x + b$ geeft:

$7\frac{1}{2} = - 4 + b \quad \rightarrow \quad b = 11\frac{1}{2}$

Dus $y = - x + 11\frac{1}{2}$

4 $p = - 5q + 60$
$TK = 10q + 80$

a $TO = p.q = - 5q^2 + 60q$

b $TW = TO - TK = - 5q^2 + 50q - 80$

c TO is maximaal als de afgeleide gelijk is aan nul

$- 10q + 60 = 0 \quad \rightarrow \quad q = 6$

TO is dan $- 5(6)^2 + 60 . 6 = 180$

p is dan $- 5(6) + 60 = 30$

d TW is maximaal als de afgeleide gelijk is aan nul

$- 10q + 50 = 0 \quad \rightarrow \quad q = 5$

TW is dan $- 5(5)^2 + 50 . 5 - 80 = 45$

p is dan $- 5(5) + 60 = 35$

e Nulpunten *TO*:

Als $- 5q^2 + 60q = 0 \quad \rightarrow \quad q(- 5q + 60) = 0$

$q = 0$, $q = 12$

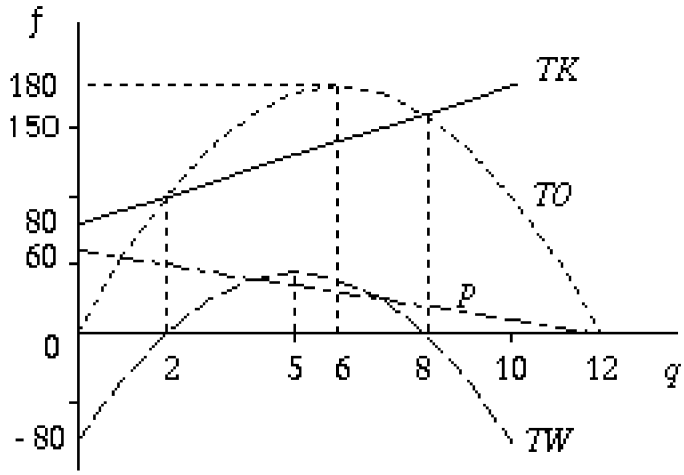
Nulpunten *TW*:

Als $- 5q^2 + 50q - 80 = 0 \quad \rightarrow \quad q - 2)(q - 8) = 0$

$q = 2$, $q = 8$

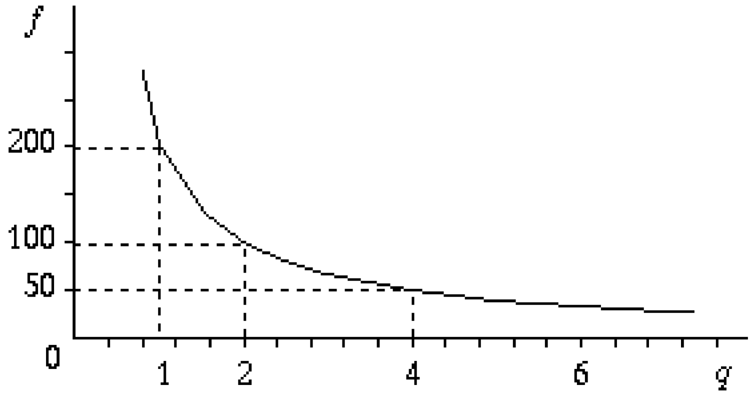
Als $q = 0 \quad \rightarrow \quad TW = - 5. 0^2 + 50 . 0 - 80 = - 80$

Zie figuur.

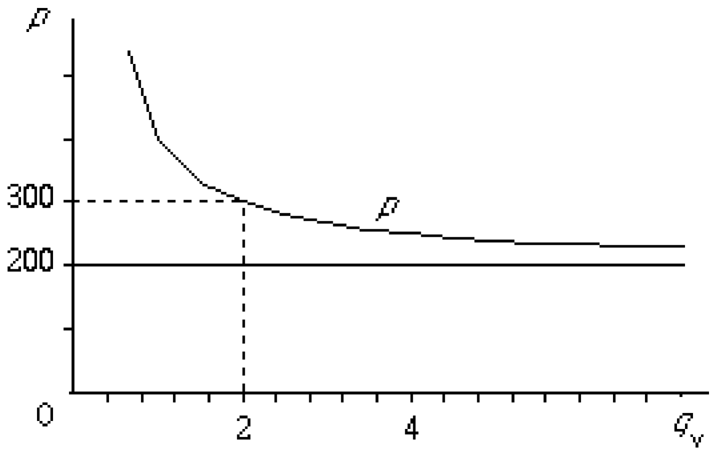


3.4

1



2 $p = 200 + \dfrac{200}{q}$



3 $p = -\dfrac{1}{4}q_v + 2$

$Epv = \dfrac{dq_v}{dp} \cdot \dfrac{p}{q_v}$

$$Epv = -4 \cdot \frac{-\frac{1}{4}q_v + 2}{q_v}$$

$$Epv = 1 - \frac{8}{q_v}$$

Als q_v heel groot wordt, nadert *Epv* tot 1. Echter $q_v < 8$. Zie ook "nulpunten".

Als q_v heel klein wordt, nadert *Epv* tot een zeer grote negatieve waarde

Nulpunten:

De grafiek van *GTK* heeft nulpunten als *Epv* = 0

$1 - \frac{8}{q_v} = 0$ als $q_v = 8$

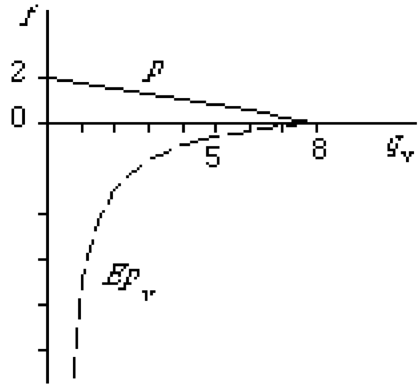
Deze waarde kan niet ($q_v < 8$)

Extreme waarden:

Extreme waarden vinden we door de afgeleide van *Epv* gelijk aan nul te stellen.
De afgeleide = $\frac{8}{q_v^2}$ kan niet gelijk zijn aan nul, dus er is geen extreme waarde.

Ten slotte nog enkele waarden van *Epv*:

q_v	*Epv*
1	- 7
2	- 3
4	- 1
6	$-\frac{1}{3}$



4 $TK = f(q) = q^2 + 100$

$$GTK = \frac{q^2 + 100}{q} \quad \rightarrow \quad GTK = q + \frac{100}{q}$$

Als q heel groot wordt, nadert GTK tot q
Als q heel klein wordt, wordt GTK heel groot

Nulpunten:

De grafiek van GTK heeft nulpunten als $q^2 + 100$ (de teller van de breuk) gelijk is aan nul. Dit is onmogelijk.

Extreme waarden:

Extreme waarden vinden we door de afgeleide gelijk aan nul te stellen.

$GTK = q + 100\, q^{-1} \rightarrow \quad f'(q) = 1 - 1 \,.\, 100 \,.\, q^{-2} \quad \rightarrow$
$f'(q) = 1 - \dfrac{100}{q^2}$

$f'(q) = 0$ als $1 - \dfrac{100}{q^2} = 0$

$q^2 = 100$ als $q = 10$ of $q = -10$

De laatste waarde van q kan niet, want q moet positief zijn.
Er is dus een extreme waarde als $q = 10$.
Vervolgens gaan we na of de tweede afgeleide voor deze waarde van q positief is of negatief.

f'(q) = 1 - 100 . q^{-2} $\rightarrow$ f''(q) = 0 - 2 . - 100 . $q^{-3} = \dfrac{200}{q^3}$

We substitueren q = 10 in f''(q):

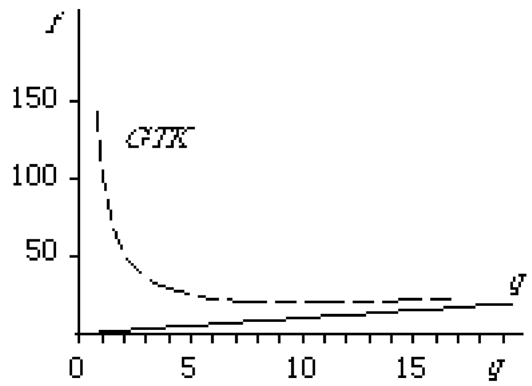
f''(10) = $\dfrac{200}{10^3}$ = 0,2. Deze waarde is positief.

Dus f(q) = *GTK* heeft een minimum als q = 10.

GTK is dan $\dfrac{10^2 + 100}{10}$ = 20.

Ten slotte nog enkele waarden van *GTK* :

q	*GTK*
1	101
3	$36\frac{1}{3}$
5	25
10	20
15	$21\frac{2}{3}$



3.5

Omdat een derdegraadsfunctie een buigpunt heeft, moet gelet worden op het tekenverloop van de eerste en tweede afgeleide.

1 $K = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x$

Nulpunten:

Als $K = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x = 0$

$x = 0$ of $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 6 = 0$.

Dit laatste kan niet, want de discriminant is negatief. Er is dus een nulpunt voor $x = 0$.

Extreme waarden:

Tekenverloop f'(x) = $x^2 - 4x + 6$:

					x
+	+	+	+	+	

Tekenverloop f''(x) = $2x - 4$:

					x
-	-	|	+	+	
		2			

Conclusies:

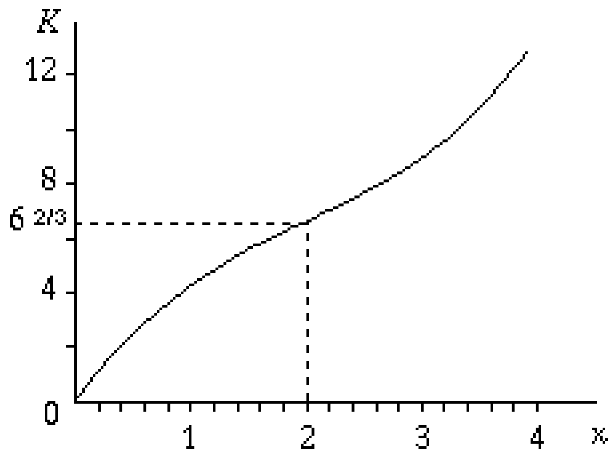
De grafiek van K is voortdurend stijgend, omdat zijn afgeleide voor elke waarde van x positief is.

Bij $x = 2$ heeft K een schuin buigpunt, want f''(x) is dan gelijk aan 0.

Tabel:

x	K
0	0
0,5	2,54
1	4,33
1,5	5,63
2	6,67
2,5	7,71

3	9
4	13,33



2 $K = \frac{1}{2}q^3 - 3q^2 + 6q$

Nulpunten:

Als $K = \frac{1}{2}q^3 - 3q^2 + 6q = 0$

$q = 0$ of $\frac{1}{2}q^2 - 3q + 6 = 0$.

Dit laatste kan niet, want de discriminant is negatief. Er is dus een nulpunt voor $x = 0$.

Extreme waarden:

Tekenverloop f'(q) = $\frac{3}{2}q^2 - 6q + 6$:

q

\+ + | + +

2

Tekenverloop f''(q) = $3q - 6$:

q

-	-	|	+	+
		2		

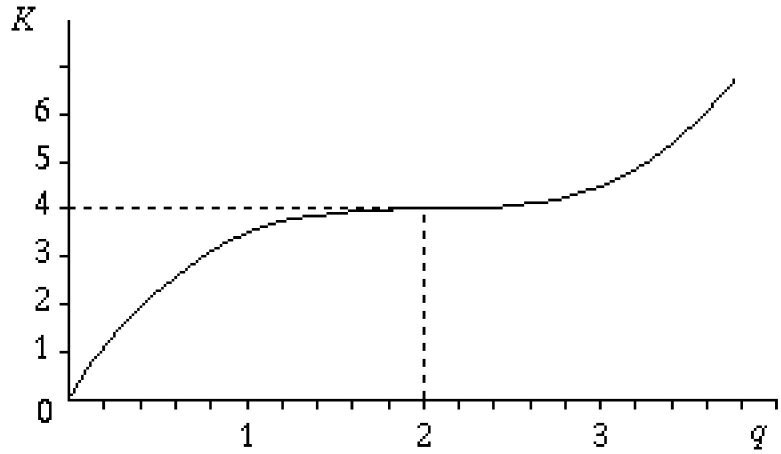
Conclusies:

De grafiek van K is voortdurend stijgend (behalve voor q = 2), omdat zijn afgeleide voor elke andere waarde van q positief is.

Bij q = 2 heeft K een horizontaal buigpunt, want f'(q) en f''(q) zijn dan gelijk aan 0.

Tabel:

x	K
0	0
0,5	2,31
1	3,5
1,5	3,94
2	4
2,5	4,06
3	4,5
4	8



3 $q = - a^3 + 6a^2$

Nulpunten:

Als $q = - a^3 + 6a^2 = 0$

$a^2(a - 6) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0, a = 6$

Extreme waarden:

Tekenverloop f'(a) = - 3a^2 + 12a:

```
____________________________________ a
|    +    +    +    |    -    -
0                   4
```

Tekenverloop f''(a) = -6a + 12:

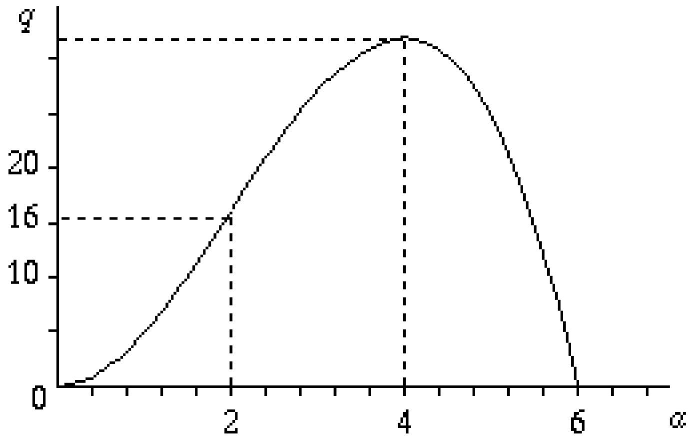
```
____________________________________ a
+    +    |    -    -    -    -
          2
```

Conclusies:

Voor 0 < a < 4 is f'(a) positief en q dus stijgend
Voor a = 0 heeft q een *minimum*, want voor a = 0 is f'(a) = 0 en f''(a) > 0
Voor a = 4 heeft q een *maximum*, want voor a = 4 is f'(a) = 0 en f''(a) < 0
Voor a > 4 is f'(a) negatief en q dus dalend
Bij a = 2 heeft q een schuin buigpunt, want f''(a) is dan gelijk aan 0.

Tabel:

x	*K*
0	0
0,5	1,38
1	5
1,5	10,13
2	16
2,5	21,88
3	27
4	32



4 $Q = -a^3 + 9a^2$

Nulpunten:

Als $Q = -a^3 + 9a^2 = 0$
$a^2(a - 9) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0, a = 9$

Extreme waarden:

Tekenverloop f'(a) = $-3a^2 + 18a$:

__________________________________ *a*
| + + + | - -
0 6

Tekenverloop f''(a) = $-6a + 18$:

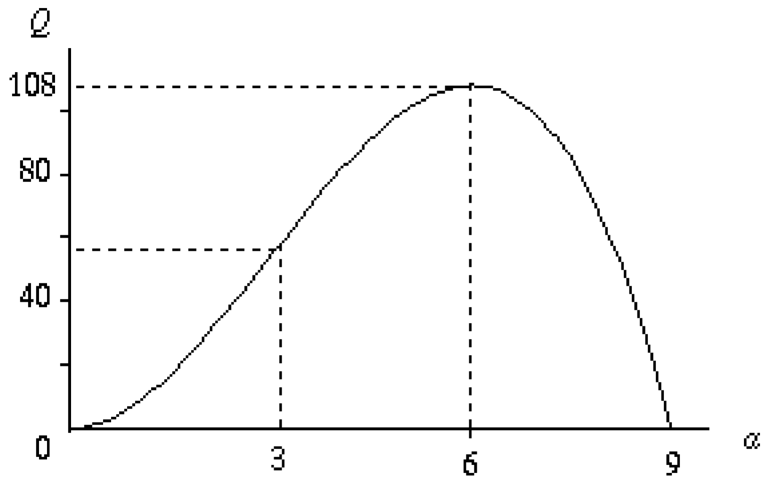
__________________________________ *a*
+ + | - - - -
3

Conclusies:

Voor $0 < a < 6$ is f'(a) positief en Q dus stijgend
Voor $a = 0$ heeft q een *minimum*, want voor $a = 0$ is f'(a) = 0 en f''(a) > 0
Voor $a = 6$ heeft q een *maximum*, want voor $a = 6$ is f'(a) = 0 en f''(a) < 0
Voor $a > 6$ is f'(a) negatief en Q dus dalend
Bij $a = 3$ heeft Q een schuin buigpunt, want f''(a) is dan gelijk aan 0.

Tabel:

x	K
0	0
0,5	2,13
1	8
1,5	16,88
2	28
2,5	40,63
3	54
4	80
6	108
9	0

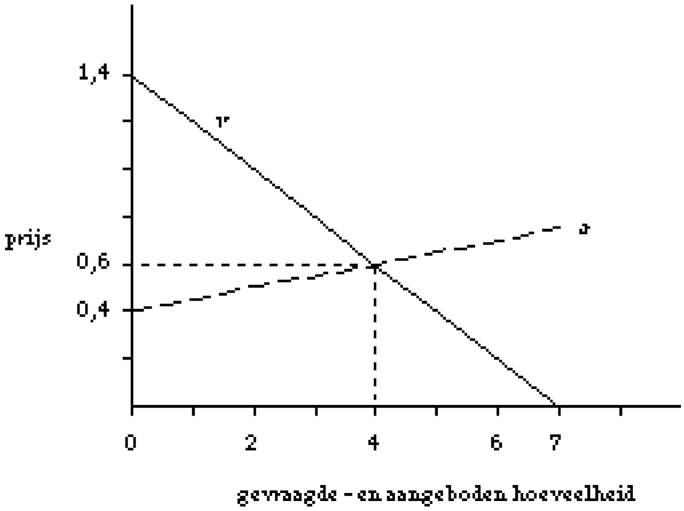


3.6

1a $\quad q_v = q_a \quad \rightarrow \quad -5p + 7 = 20p - 8 \quad \rightarrow \quad p = 0{,}60$

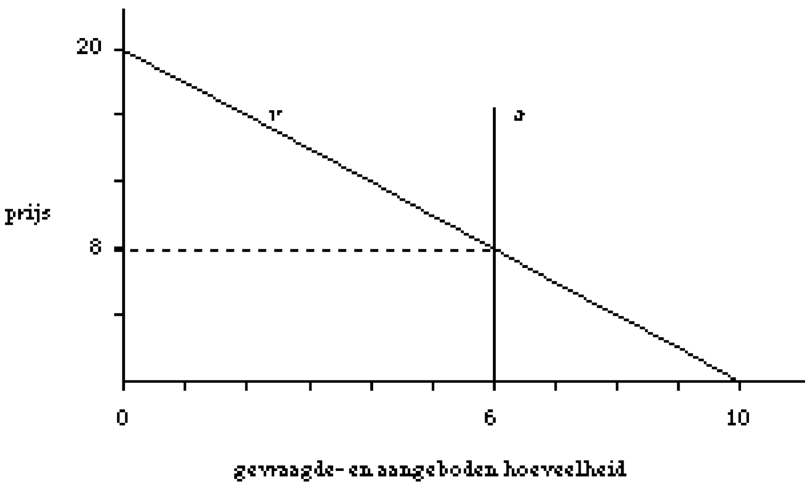
$q = 4$

b



2a $q_v = q_a \rightarrow$ $-0{,}5p + 10 = 6$ $\rightarrow$ $p = 8$
$q = 6$

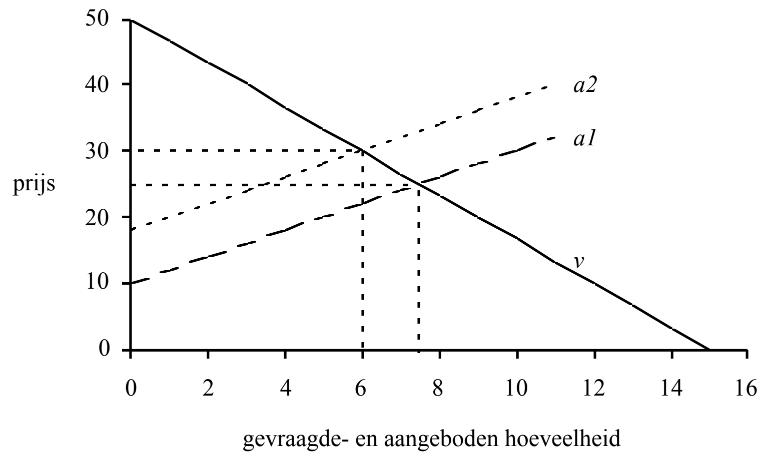
b



3a $q_v = q_a$
$-0{,}3p + 15 = 0{,}5p - 5$

$p = 25$
$q = 7{,}5$

b, d

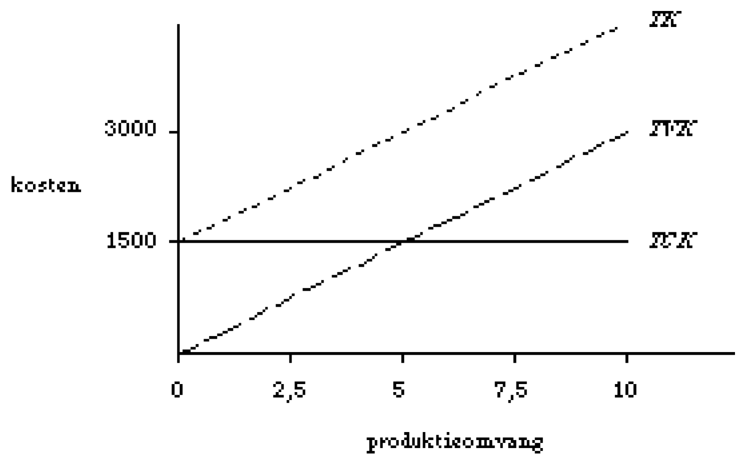


c $q_v = q_a$
$- 0{,}3p + 15 = 0{,}5p - 9$
$p = 30$
$q = 6$

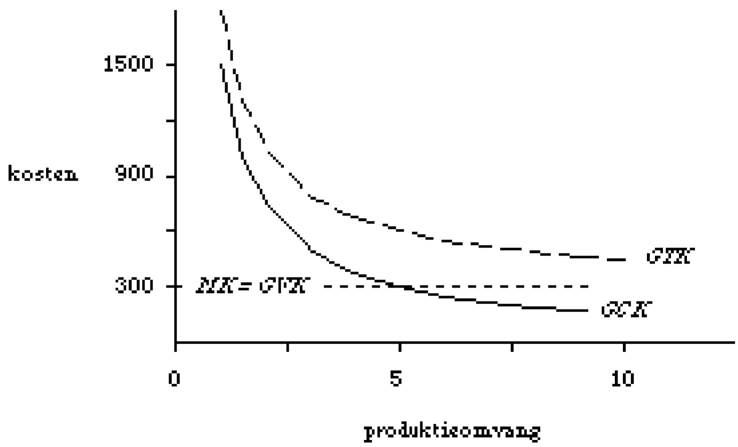
4a

q	*TCK*	*GCK*	*TVK*	*GVK*	*TK*	*GTK*	*MK*
0	1.500		0		1.500		
1	1.500	1.500	300	300	1.800	1.800	300
2	1.500	750	600	300	2.100	1.050	300
3	1.500	500	900	300	2.400	800	300
4	1.500	375	1.200	300	2.700	675	300
5	1.500	300	1.500	300	3.000	600	300
6	1.500	250	1.800	300	3.300	550	300
7	1.500	214	2.100	300	3.600	514	300
8	1.500	188	2.400	300	3.900	488	300
9	1.500	167	2.700	300	4.200	467	300
10	1.500	150	3.000	300	4.500	450	300

b


TK
3000
TVK
kosten
1500
TCK
0
2,5
5
7,5
10
produktieomvang

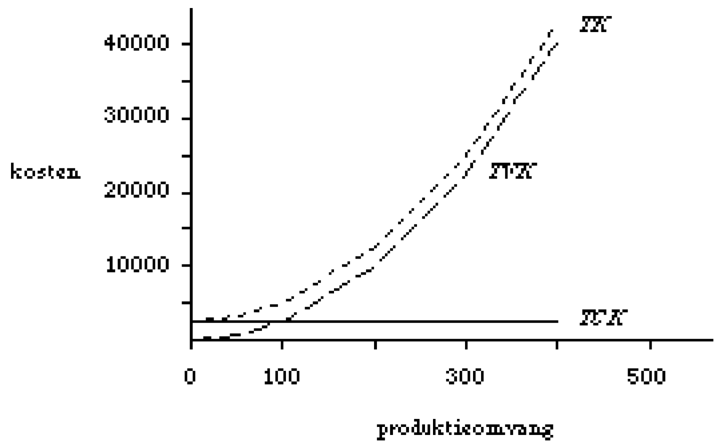
c


1500
kosten
900
GTK
300
MK = GVK
GCK
0
5
10
produktieomvang

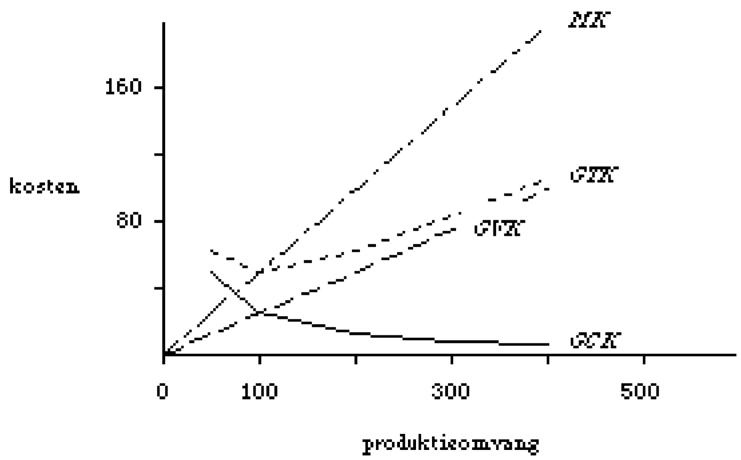
5

q	*TCK*	*GCK*	*TVK*	*GVK*	*TK*	*GTK*	*MK*
0	2.500		0		2.500		0
50	2.500	50	625	12,5	3.125	62,5	25
100	2.500	25	2.500	25	5.000	50	50
200	2.500	12,5	10.000	50	12.500	62,5	100
300	2.500	8,3	22.500	75	25.000	83,3	150
400	2.500	6,3	40.000	100	42.500	106,3	200

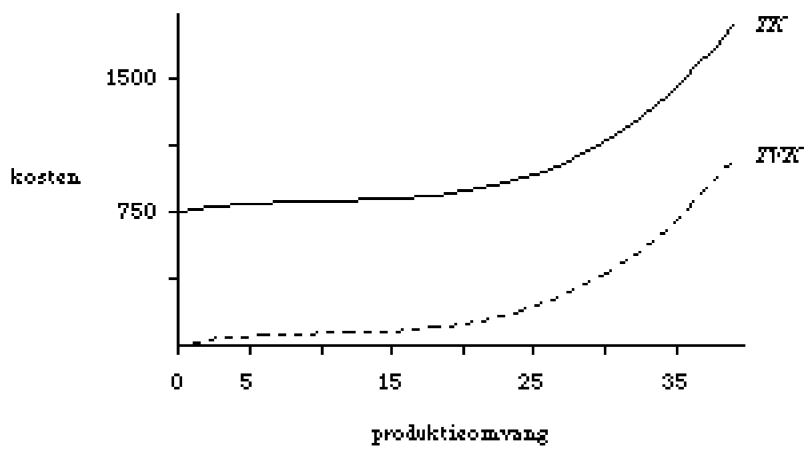
b



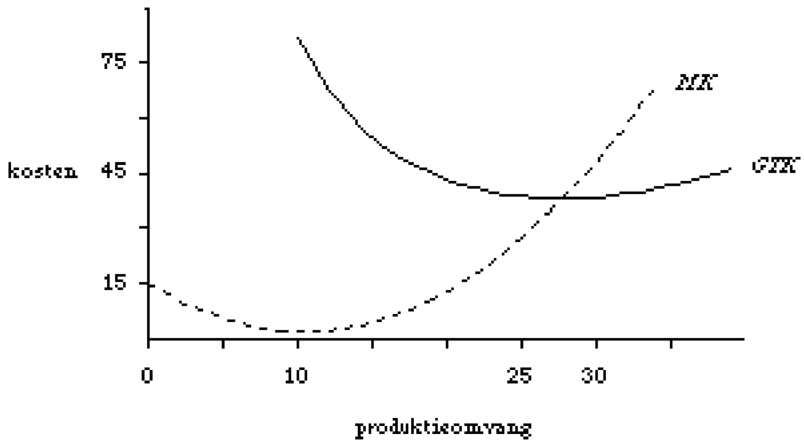
c


MK
160
GTK
kosten
80
GVK
GCK
0
100
300
500
produktieomvang

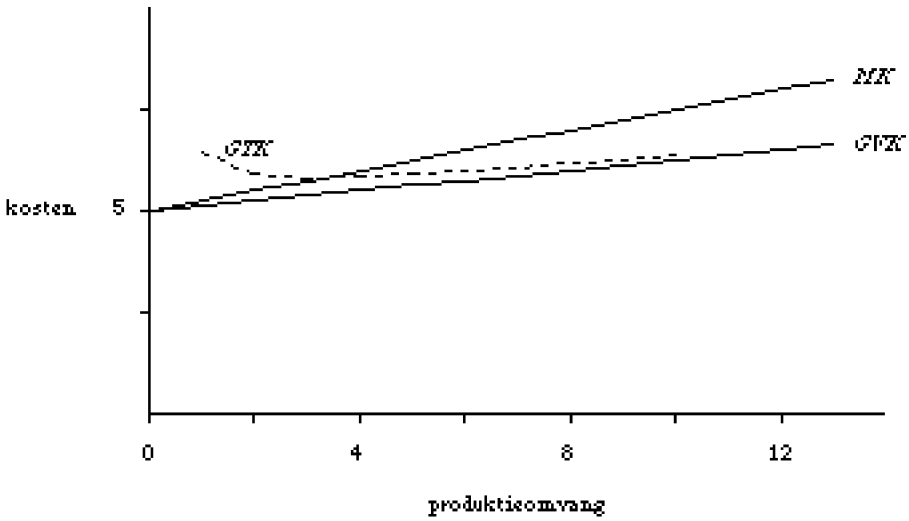
6a


TK
1500
TVK
kosten
750
0
5
15
25
35
produktieomvang

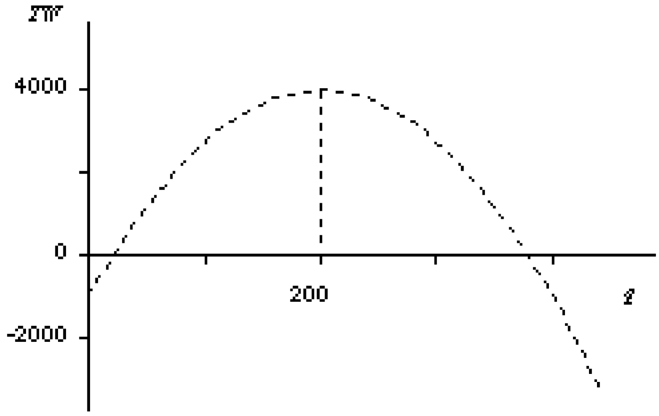
b



7



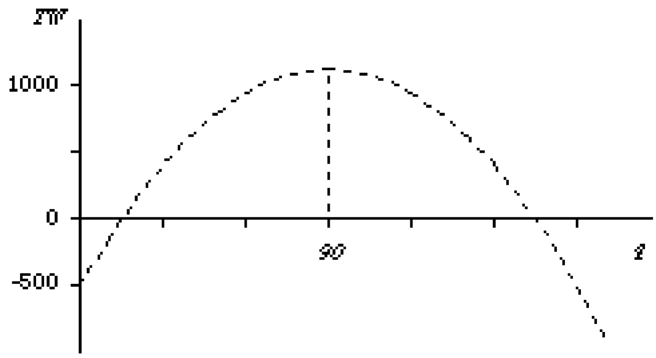
8 $TW' = 0$
$-0{,}25q + 50 = 0$
$q = 200$.



9 $TW' = 0$

$-0,4q + 36 = 0$

$q = 90$



10

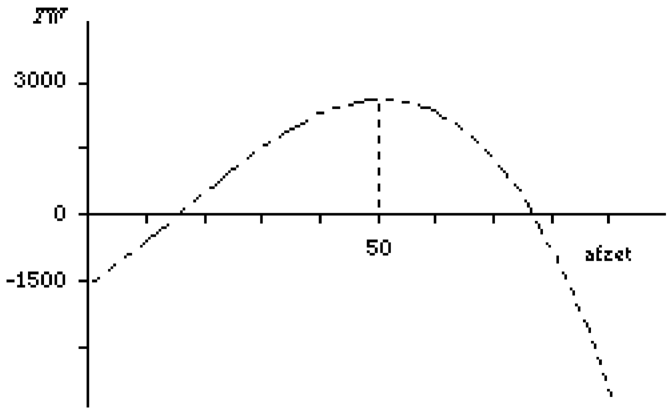
$TW' = 0$

$-0,09q^2 + 2,7q + 90 = 0$

$(q - 50)(q + 20) = 0$

$q = 50 \rightarrow \quad TW_{max} = 2.625$

Zie figuur.



11

a

q	$TO = 40q$	$TK = 0{,}1q^2 + 3.000$	$TW = TO - TK$
0	0	3.000	- 3.000
50	2.000	3.250	- 1.250
100	4.000	4.000	0
150	6.000	5.250	750
200	8.000	7.000	1.000
250	10.000	9.250	750
300	12.000	12.000	0

b

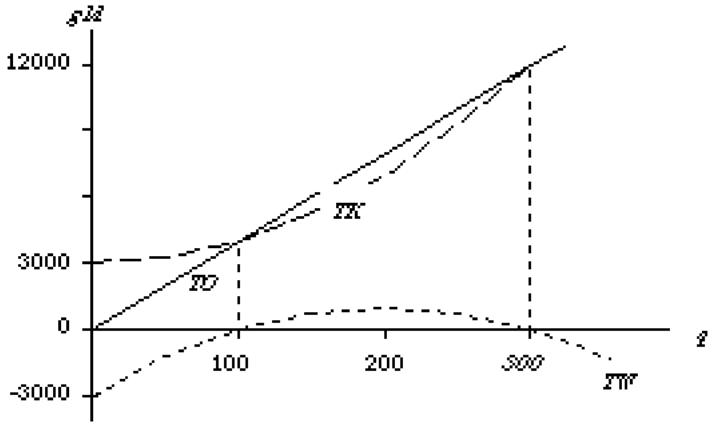
$TW = TO - TK \quad \rightarrow \quad TW = 40q - (0{,}1q^2 + 3.000)$
$TW = - 0{,}1q^2 + 40q - 3.000.$

TW is maximaal als $TW' = 0$
$TW' = - 0{,}2q + 40 = 0$ als $q = 200$.

$TW_{max} = - 0{,}1 \times 200^2 + 40 \times 200 - 3.000 = 1.000.$

$TW = 0$ als $- 0{,}1q^2 + 40q - 3.000 = 0$
$q^2 - 400q + 30.000 = 0$
$(q - 100)(q - 300) = 0$ als:

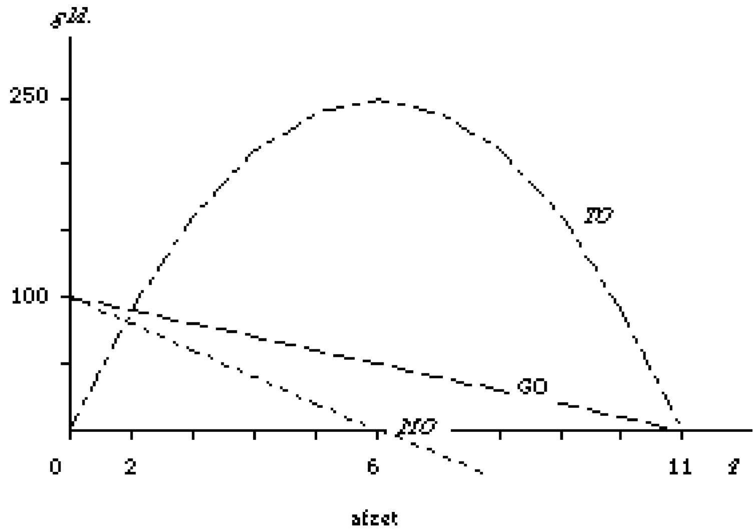
$q = 100 \rightarrow TO = TK = 40 \times 100 = 4.000$
$q = 300 \rightarrow TO = TK = 40 \times 300 = 12.000.$



12a $q = -0{,}1p + 10 \quad \rightarrow \quad p = -10q + 100.$

p	q	TO	$MO = -20q + 100$
100	0	0	100
75	2,5	187,5	50
50	5	250	0
25	7,5	187,5	- 50
0	10	0	- 100

b



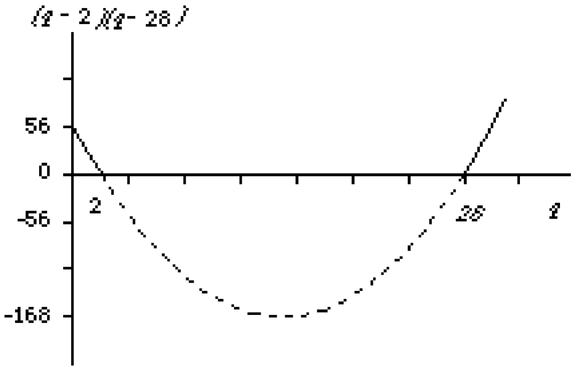
13a $TW = TO - TK \quad \rightarrow \quad TW = -1{,}25q^2 + 50q - 56.$
$TW' = 0$ als $-2{,}5q + 50 = 0$. Hieruit volgt $q = 20$ zonder wet. De prijs is dan:
$p = -0{,}75.20 + 60 = 45.$

De wettelijke beperking:

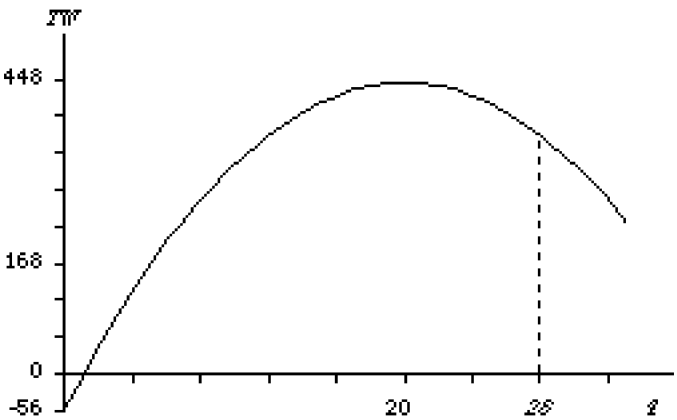
$TW \leq \frac{1}{3}\, TO$

$q^2 - 30q + 56 > 0$
$(q - 2)(q - 28) \geq 0$

Deze eis kan als volgt grafisch worden weergegeven:



Uit de figuur lezen we af:
$q \leq 2$ of $q \geq 28$.
$q = 2 \quad \rightarrow \quad TW = 39$
$q = 28 \quad \rightarrow \quad TW = 364$
De meeste winst wordt dus gemaakt bij $q = 28$. Zie de volgende figuur:



b $\quad p = -\,0{,}75 \;.\; 28 + 60 = 39$.