

TÓPICOS EM TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS¹

N. F. Svaiter

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro-RJ,
22290-180, Brasil

¹Curso apresentado na VI Escola do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

1 Prefácio

Neste curso apresentaremos alguns aspectos importantes da teoria quântica dos campos. Quero enfatizar que grande parte do material apresentado está bastante influenciado pelas linhas de pesquisa que segui nestes últimos vinte anos. Entendo que não somente é mais fácil falar daquele tópico onde obtivemos algum resultado, mas também que se existe a possibilidade de se conhecer algum assunto e realmente saber do quê e sobre o quê estamos falando, este assunto deve fazer parte da própria linha de pesquisa. Apesar do conhecimento ser sempre incompleto, neste simples fato esta fundamentada a fonte do progresso científico.

2 Introdução : os triunfos e as limitações da teoria quântica dos campos

A teoria dos campos quantizados, desenvolvida por Dirac, Fermi, Fock, Heisenberg, Jordan, Wigner e outros, é uma fusão da mecânica quântica com a teoria da relatividade especial. Os pilares desta teoria são o princípio de superposição dos estados quânticos com a interpretação probabilística dos valores esperados e o princípio de localidade que descarta as influências acausais. Campos, que são distribuições que tomam valores num espaço de operadores ("operator-valued distributions"), definidas num domínio denso com um espaço de Hilbert, comutam para distâncias do tipo-espaço

$$[\Phi(x), \Pi(x)]|_{x^0=x'^0} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

onde $\Pi(x)$ é o operador momento canonicamente conjugado ao campo $\Phi(x)$. Apesar de seu grande sucesso inicial, uma dificuldade fundamental foi apontada ainda na década de trinta do século passado. No cálculo de amplitudes de transição de processos, encontramos resultados divergentes. Este problema foi resolvido após a segunda grande guerra, devido a esforços de Dyson, Feynman, Salam, Schwinger, Tomonaga, Wick e muitos outros [1], onde a teoria de perturbação num regime de acoplamento fraco para o cálculo de amplitudes de transição de processos foi desenvolvida e os resultados divergentes foram controlados por um esquema de regularização e renormalização.

Até o presente momento a teoria quântica dos campos é o melhor formalismo matemático que temos em mãos para a descrição de processos envolvendo a criação e a destruição de partículas. Apesar desta teoria ter tido um desenvolvimento formidável a partir dos anos quarenta do século

passado, o interesse neste formalismo matemático foi decrescendo gradativamente e praticamente desapareceu nos anos sessenta, quando a teoria da matriz S dominou a física teórica por praticamente dez anos. Este desinteresse da maior parte da comunidade de físicos teóricos pela teoria dos campos quantizados se originou na impossibilidade naquele momento do formalismo desenvolvido até então de resolver dois problemas fundamentais. O primeiro problema estava relacionado à descrição de sistemas físicos onde o acoplamento entre diferentes campos que descrevem diferentes partículas é forte, utilizando a teoria de perturbações desenvolvida por Dyson, Feynman, Tomonaga, Schwinger e outros. O segundo estava ligado à não-renormalizabilidade da interação fraca, que fez com que na descrição destes processos a predicibilidade da teoria quântica de campos fosse questionada. Desta forma, esforços foram orientados na direção do entendimento das propriedades estruturais da teoria quântica de campos, com o abandono dos métodos perturbativos e da formulação lagrangiana, com diferentes técnicas não-perturbativas. Aparece também nesta época, como tentativa de sanar alguns problemas fundamentais, a teoria axiomática e construtivista dos campos com os trabalhos de Haag, Kallen e Wightman. Uma exposição moderna destes tópicos pode ser encontrada na Ref. [2].

Ainda na década dos cinquenta, Landau e colaboradores [3] [4] [5] notaram que na eletrodinâmica quântica (QED) a carga renormalizada se anula quando um corte na região ultravioleta ("ultraviolet cut-off"), introduzido nas integrais divergentes que descrevem os processos físicos de interação entre fótons e elétrons, é retirado. Na verdade, o que Landau e colaboradores se depararam, foi com o fato de que após efetuarem uma resomação da série perturbativa, levando em consideração as contribuições logarítmicas dominantes ("the leading logarithmic approximation"), a carga renormalizada se anula. A situação associada à função de Green do fóton é também bastante desagradável. Para qualquer valor da carga renormalizada, o propagador do fóton tem um polo para um determinado momento do tipo-espaco muito grande ("large spacelike momentum"). A presença deste polo implica na existência de partículas de massa imaginária conhecidas como táquions ("tachions") na teoria. Desta forma a eletrodinâmica, para ser matematicamente consistente, deve ser trivial. Neste contexto, trivialidade significa que não existe interação entre fótons e elétrons [6]. Este problema, conhecido na literatura como o problema de Moscou da carga zero ("Moscou zero charge problem"), teve um papel fundamental no abandono da teoria de campos no início dos anos sessenta do século passado, e também teve uma grande importância na evolução das idéias que permearam a física teórica naquela metade de século.

Após praticamente dez anos de esquecimento (1960/1970), enquanto a teoria da matriz S dominou a física teórica de altas energias, a teoria quântica de campos renasceu com a formulação das teorias de calibre não-abelianas ("non-abelian gauge field theories"). A construção de modelos onde a constante de acoplamento efetiva entre quarks e gluons se torna fraca para pequenas distâncias, ou em outras palavras diminui com o aumento da energia envolvida nos processos, e também a introdução de varias idéias de matéria condensada e física estatística, fizeram com que

a comunidade de físicos teóricos voltasse as atenções novamente para a teoria dos campos quantizados. O problema da renormalizabilidade da interação fraca ficaria resolvido com os modelos de unificação das interações fundamentais, i.e., a interação forte, fraca e eletromagnética, enquanto que sistemas com interação forte passaram a ser descritos pela cromodinâmica quântica (*QCD*). Voltaremos a falar da cromodinâmica quântica posteriormente, mas gostaríamos de enfatizar que a cromodinâmica quântica não pôde ser facilmente harmonizada com a estrutura conceitual da teoria quântica de campos devido ao problema do confinamento ("confinement problem"), onde não existe a noção precisa de estados assintóticos "in" e estados assintóticos "out".

3 A teoria dos campos em espaços curvos: o efeito Hawking e o efeito Unruh-Davies

Inicialmente a teoria quântica dos campos foi concebida e formulada num espaço-tempo sem curvatura, isto é, no espaço-tempo de Minkowski. Entretanto a comunidade de físicos teóricos percebeu que o domínio de aplicabilidade da teoria quântica de campos deveria incluir também espaços-tempo curvos. É importante salientar que estaremos sempre assumindo um espaço-tempo clássico onde os campos quantizados estarão definidos. Uma teoria quântica da gravitação ainda nos coloca problemas insolúveis. Por exemplo, sabemos que uma quantidade fundamental na teoria dos campos é a matriz S , que nos dá a amplitude do espalhamento entre estados assintóticos "in" e estados assintóticos "out". Uma gravitação quântica deveria descrever processos de espalhamento gráviton-gráviton, entretanto uma descrição de todo o universo dentro deste contexto é ainda bastante problemática. Esta incompatibilidade fundamental entre a teoria geral da relatividade e a mecânica quântica, que até o presente momento é a melhor teoria que temos para descrever a realidade, ainda é um problema em aberto para todos nós. A origem profunda desta dificuldade de construir uma versão quântica da teoria de Einstein reside no fato que, para formularmos a teoria quântica de campos, somos obrigados a introduzir a priori o espaço-tempo e, mesmo que abandonemos o conceito do gráviton e formulemos uma teoria das flutuações do espaço-tempo, esta teoria não deve ser uma teoria local dos campos quantizados.

No período de 1970 a 1980, alguns importantes resultados em teoria quântica dos campos em espaços curvos e em coordenadas curvilíneas, no espaço-tempo de Minkowski, apareceram na literatura. O mais famoso destes resultados foi obtido por Hawking [7] e posteriormente rederivado por Hawking e Hartle [8]. Estes autores demonstraram que, devido a efeitos quânticos, um buraco

negro é capaz de emitir radiação térmica. Na verdade as análises de Hawking mostram que a temperatura β^{-1} de um buraco negro, medida por observadores no infinito espacial, é igual à superfície de gravidade do horizonte ("surface gravity of the horizon") dividida por 2π . Para um buraco negro de Schwarzschild de massa M , teremos que no infinito espacial $\beta = 8\pi M$. Desta forma a temperatura medida por observadores no infinito espacial é dada por $\beta^{-1} = \frac{1}{8\pi M}$.

Não é difícil perceber que este mecanismo torna o sistema termodinamicamente instável. Esta instabilidade aparece pois se, por flutuações, o buraco negro absorve radiação térmica do ambiente, sua massa aumenta e conseqüentemente sua temperatura diminui. O sistema evolui numa direção onde o buraco negro esfria absorvendo cada vez mais radiação térmica do ambiente. Com este mecanismo, a massa do buraco negro aumenta sem limite. Ou se existe um limite, qual é este limite? Como veremos, existe um efeito não análogo ao efeito Hawking, mas com muitos pontos em comum, só que num espaço-tempo sem curvatura, isto é, no espaço-tempo de Minkowski. Na verdade este resultado, que um buraco-negro pode emitir radiação térmica devido a efeitos quânticos, apareceu após um intenso estudo de campos quantizados em espaços-tempo curvos. Alguns anos antes Fulling, estudando a quantização de campos em referenciais não-inerciais, sob a orientação de Wightman, obteve um importante resultado [9]. Ele demonstrou que no espaço-tempo de Minkowski, um observador uniformemente acelerado é capaz de construir uma adequada representação da álgebra dos operadores onde a definição de partícula associada ao campo quantizado pode ser implementada [10]. Em outras palavras, para observadores uniformemente acelerados, o conceito de partícula associada ao campo quantizado está operacionalmente bem definido. Lembremos que a teoria dos campos quantizados foi desenvolvida como uma fusão da mecânica quântica com a teoria da relatividade especial. Desta forma, a princípio a quantização canônica pode ser implementada apenas por observadores inerciais. O resultado de Fulling estende a validade da quantização para observadores genéricos, inerciais ou não. É claro que esta representação da álgebra dos operadores, com o seu espaço de Hilbert dos estados não é unitariamente equivalente a uma outra representação, distinta desta, construída por observadores inerciais.

O resultado acima descrito está simplesmente baseado no fato de que no espaço-tempo de Minkowski existe um número infinito de representações unitariamente não-equivalentes da álgebra dos operadores, que postulamos para implementarmos a quantização dos campos clássicos. A situação é ímpar, e ocorre somente quando tratamos de sistemas que necessitam ser descritos por um número infinito de graus de liberdade. Para sistemas que são descritos por um número finito de graus de liberdade ($N < \infty$, onde N é o número de coordenadas generalizadas do sistema) todas as representações irredutíveis de uma álgebra \mathcal{A} são unitariamente equivalentes [11]. Assim, vemos claramente que para $N < \infty$ a descrição física de um sistema não depende da representação, que pode ser escolhida por conveniência. Para $N = \infty$ podemos ter duas representações irredutíveis de \mathcal{A} que não são unitariamente equivalentes. Este problema é conhecido na literatura como o problema da representação em teoria quântica dos campos ("representation problem in quantum

field theory”). Na verdade, esta é a grande crítica que von Neumann faz á teoria quântica dos campos, a saber, de ter que conviver com número infinito de representações unitariamente não-equivalentes da álgebra dos operadores [12].

Como a quantização canônica de qualquer campo clássico está apoiada nas equações de movimento, na álgebra dos operadores e finalmente na construção do espaço de Hilbert dos estados físicos, as partículas associadas a um campo quantizado passam a ser dependentes do estado de movimento do observador que implementa a quantização canônica. Uma outra forma de interpretar o resultado obtido por Fulling é o seguinte: para um observador uniformemente acelerado, que constrói uma representação da álgebra dos operadores adequada à sua situação, o estado fundamental (“ground state”) associado a um campo quantizado não é o vácuo de Minkowski. Este estado de mais baixa energia é chamado de vácuo de Rindler, e tem uma energia mais baixa que a do vácuo de Minkowski. Desta forma o observador uniformemente acelerado percebe o vácuo de Minkowski com um estado de energia mais alta do que seu estado fundamental, isto é, o vácuo de Rindler.

Esta situação pedia um minucioso exame crítico. Vamos rapidamente discutir como a existência de uma temperatura característica associada a esta diferença foi operacionalmente clarificada por Unruh [13]. Um aprofundamento no entendimento do problema acima exposto exigiu a introdução de um aparato experimental (“measurement device”). Desta forma Unruh, dando prosseguimento a esta linha de investigações, introduziu um modelo simplificado de um detector acoplado a um campo escalar neutro, e obteve um importante resultado que tem uma ligação direta com o resultado de Fulling, Hawking e Hartle. Aquele autor demonstrou que, no espaço-tempo de Minkowski, um detector que percorre uma linha de universo com aceleração própria constante, isto é, está uniformemente acelerado, tem o seguinte comportamento: se for preparado no estado fundamental, e está interagindo com o campo escalar no estado de vácuo de Minkowski, tem uma probabilidade assintótica não-nula de ser encontrado num estado excitado. A situação de equilíbrio, entre o detector uniformemente acelerado e o campo no estado de vácuo de Minkowski, é a mesma que a de um detector inercial interagindo com um banho térmico a temperatura β^{-1} , se a identificação $\beta^{-1} = \frac{\sigma}{2\pi}$ for feita, onde σ é a aceleração própria do detector. Em outras palavras, a função resposta do detector nas duas situações é a mesma. Este resultado é conhecido na literatura como teorema da termalização, e simplesmente expressa o fato de que para um observador uniformemente acelerado o vácuo de Minkowski não é um estado puro, mas um estado misto térmico no qual a temperatura é proporcional à aceleração própria do observador.

Este resultado obtido por Unruh também pode ser visto pela ótica de processos estocásticos, onde a densidade espectral associada a uma variável randômica é dada pela transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos, resultado conhecido na literatura como relações de Wiener-Khintchine. É claro que o fato do detector medir um espectro térmico está associado à existência de horizonte de eventos pelo observador que percorre uma linha de universo com ace-

lação própria constante. O fato do buraco negro emitir radiação térmica também está associado à existência de um horizonte de eventos presente na máxima extensão analítica da métrica de Schwarzschild, conhecida como métrica de Kruskal [14].

Dois fatos que merecem ser mencionados são os seguintes: o primeiro é que em espaços-tempo de dimensão ímpar ocorre o fenômeno da inversão de estatística [15], entretanto este resultado não é importante para as discussões posteriores. O segundo é o fato de que apesar de cada linha de universo com aceleração própria constante ter a sua temperatura associada, se construirmos um fluido de detectores percorrendo distintas linhas de universo, estes detectores estarão em equilíbrio termodinâmico, apesar destes detectores medirem diferentes temperaturas. Para que dois corpos estejam em equilíbrio térmico em dois diferentes pontos num campo gravitacional, que chamaremos de P_1 e P_2 respectivamente, não necessitamos necessariamente que eles tenham a mesma temperatura. Para garantirmos o equilíbrio, devemos pedir que a razão entre as temperaturas seja igual ao desvio gravitacional para o vermelho ("gravitational red shift") que uma partícula do banho sofre, desde a sua emissão pelo detector em P_1 até a sua absorção pelo detector em P_2 [16].

Gostaríamos de enfatizar que existem alguns resultados matemáticos importantes que se conectam com algum dos problemas acima discutidos. O sistema de coordenadas naturalmente adaptado a um observador acelerado é chamado sistema de coordenadas de Rindler [17]. Num interessante artigo, Kalnins [18] demonstrou que, no espaço-tempo de Minkowski bidimensional, existem dez sistemas de coordenadas nos quais a equação de Klein-Gordon é solúvel pelo método de separações de variáveis. Neste conjunto, o dos sistemas de coordenadas que são naturalmente adaptados a referenciais físicos realizáveis, teremos interesse em efetuar a quantização canônica de um campo qualquer. Não obstante a tarefa não é tão simples, pois aparecem problemas na definição do estado de vácuo associado à quantização canônica de um campo genérico. Conseqüentemente, a definição do estado de n -partículas que são geradas a partir do estado de vácuo também é problemática. Como apenas dois destes sistemas de coordenadas estudados por Kalnins são estáticos, nos outros existe a possibilidade de criação de partículas, via o mecanismo estudado por Parker [19]. O cálculo dos coeficientes de Bogoliubov [20] entre modos "in" e "out" nos fornece a taxa de produção de partículas medida por um detector que percorre uma determinada linha de universo.

É possível a princípio comparar dois diferentes estados de vácuo associados a um campo escalar quantizado no sistema de coordenadas de Milne, entre si e com o vácuo de Rindler [21]. Podemos também comparar estes estados de vácuo com aquele definido assintoticamente para observadores que têm uma aceleração variável. Pode-se mostrar que existe um sistema de coordenadas adaptado a um observador com uma aceleração variável. Em outras palavras, no infinito passado a aceleração de um observador em repouso neste referencial é zero e no infinito futuro tende a um valor constante. O estudo detalhado deste sistema de coordenadas adaptado a este referencial que tem uma aceleração variável foi realizado por Costa, assim como a quantização de um campo

escalar neste referencial [22]. Como temos duas situações distintas, a saber: no infinito passado a aceleração de um observador em repouso em relação a este referencial é zero, e no infinito futuro tende a um valor constante, podemos definir dois estados de vácuo, "in" e "out", e o cálculo dos coeficientes de Bogoliubov entre os modos "in" e "out" pode ser apresentado.

Diante de um exame mais acurado, vemos conseqüentemente que num espaço-tempo com curvatura temos problemas fundamentais relacionados a definição de partículas. Desta forma, gostaríamos de discutir este problema com mais detalhes. Uma vez que o grupo de Poincaré não é um grupo de simetria de um espaço-tempo curvo genérico, a definição de estado de vácuo associado a qualquer campo quantizado é totalmente ambígua. Parker, Grib, Mamayev, Mostepanenko [23] [24] e outros, fazendo uso desta ambigüidade na definição de vácuo, apresentaram processos de criação de matéria no contexto da relatividade geral. Hoje, a literatura enfatiza que o conceito de campo é operacionalmente muito mais importante do que o conceito de partícula num espaço-tempo curvo. Após esta breve introdução ao problema que aparece quando tentamos definir partículas num espaço-tempo com curvatura, gostaria de apresentar uma possível solução que pode ser dada para este problema. Quero salientar que podemos contornar alguns destes problemas em situações muito particulares.

A cosmologia moderna está inserida dentro do programa de Einstein. O ponto de partida deste programa é a hipótese de que a gravitação é a única força responsável pelas propriedades globais do universo. Um modelo cosmológico relativista assume a existência de uma distribuição específica de matéria e energia, e uma geometria do espaço-tempo associada a esta distribuição, onde as equações de Einstein fazem a conexão entre o tensor momento-energia e a configuração métrica do espaço-tempo. Um dos modelos cosmológicos mais estudados na literatura é o modelo isotrópico descoberto por Friedman. Este modelo parte da hipótese que a matéria está distribuída homogênea e isotropicamente no espaço. Uma propriedade fundamental deste modelo é seu carácter não-estacionário e a existência de um estado singular com respeito ao tempo, onde os invariantes construídos a partir do tensor de Riemann divergem. Entretanto, o estudo de criação de matéria neste modelo esbarra em duas dificuldades específicas. A primeira é a existência da singularidade, que torna a definição de um estado de vácuo inicial, ou vácuo "in", extremamente delicada. A segunda é a ausência de uma região assintoticamente plana, onde a teoria relativista dos campos se baseia para definir partículas. Como já enfatizamos, hoje a literatura aceita que o conceito de campo é operacionalmente muito mais importante do que o conceito de partícula num espaço-tempo com curvatura. Note que abandonar operacionalmente o conceito de partícula não soluciona todos os nossos problemas pois, por exemplo, mesmo dando ênfase ao conceito de campo, se queremos estudar campos em interação, usando por exemplo o formalismo de Yang-Feldman, precisamos definir os campos assintóticos "in" e "out" [25].

Com o intuito de evitarmos uma singularidade com respeito ao tempo cosmológico, podemos adicionar à densidade lagrangeana de Einstein-Maxwell um termo não-mínimo ("non-minimal

coupling”), permitindo o acoplamento de um campo vetorial com a gravitação do tipo $RA^\mu A_\mu$, onde R é o escalar de curvatura. Com estas modificações é possível encontrar uma solução cosmológica sem singularidade com respeito ao tempo [26]. O elemento de linha encontrado é do tipo Robertson-Walker, com curvatura espacial negativa. As motivações que nos levam a estudar teoria quântica dos campos neste modelo cosmológico, assim como mecanismos de criação de partículas, tornam-se transparentes se estudarmos o comportamento assintótico do modelo quando o tempo cosmológico atinge os valores mais ou menos infinito ($t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$). Este modelo cosmológico tende assintoticamente a dois universos de Milne, no infinito passado e no infinito futuro respectivamente. Assim o modelo estudado é assintoticamente plano e sua evolução cósmica consiste em um período infinito de contração até um ponto de curvatura máxima, onde os invariantes geométricos não divergem, seguido por outro período infinito, agora de expansão. Pode-se mostrar que a equação de Klein-Gordon, que descreve a propagação de um campo real massivo, é exatamente solúvel neste modelo cosmológico. Este modelo cosmológico descreve a evolução de um espaço-tempo com curvatura sem uma singularidade com relação ao tempo cosmológico. A solubilidade da equação de Klein-Gordon neste modelo cosmológico permite que seja facilmente implementada a quantização canônica de um campo escalar clássico livre.

Gostaríamos de salientar novamente que a quantização canônica de qualquer campo se fundamenta nas equações de movimento, na álgebra dos operadores e finalmente na construção do espaço de Hilbert dos estados físicos da teoria. O conjunto completo de funções, base no espaço das soluções da equação de Klein-Gordon encontrada neste espaço-tempo com curvatura sem uma singularidade com relação ao tempo cosmológico, é dada por produtos de harmônicos esféricos generalizados e funções de Mathieu. Pode-se utilizar esta base de funções para efetuar a expansão do operador de campo. Está claro que os coeficientes de Fourier da expansão do operador de campo serão os operadores de criação e aniquilação de quanta do campo, desde que possamos identificar os modos de frequências positivas e negativas. Como nos dois limites assintóticos, isto é, no infinito passado e no infinito futuro respectivamente, é possível fazer esta identificação, o próximo passo seria construir o espaço de Fock da teoria.

É fácil mostrar que é possível construir os estados físicos da teoria, definindo um estado de vácuo ”in” no infinito passado, onde a geometria espaço-temporal é plana, e um estado de vácuo ”out” no infinito futuro, onde a geometria do espaço-tempo também é plana. Calculando os coeficientes de Bogoliubov entre os modos ”in” e ”out”, é possível estimar a taxa de produção de partículas associadas ao campo escalar, devida à evolução deste modelo cosmológico [27] [28]. Note que temos uma fase de contração seguida de uma fase de expansão. A quantização canônica associada a este modelo cosmológico tem bastante semelhança com a quantização canônica associada a um campo escalar livre no sistema de coordenadas de Milne [29] [30], onde se utiliza uma idéia, formulada há bastante tempo por Dirac [31], onde postulamos as relações de comutação entre os operadores de campo e os operadores canonicamente conjugados a estas quantidades, sobre a hipersuperfície

$x^\mu x_\mu = cte.$

Na verdade, no processo de quantização canônica temos três diferentes hipersuperfícies onde podemos a princípio postular as relações de comutação. Estas são respectivamente: primeiramente a tradicional hipersuperfície $t = cte$, em seguida as coordenadas nulas u ou v definidas respectivamente por $u = t - x$ e $v = t + x$, e finalmente a alternativa acima descrita. Quero ressaltar que existem importantes trabalhos na literatura utilizando tal construção [32] [33] [34]. Como o sistema de coordenadas utilizado é não-estacionário, temos as mesmas dificuldades encontradas em quantização de campos em modelos cosmológicos dependentes do tempo. A dificuldade em definir frequências positivas e negativas nos leva à perda do significado físico do conceito de partícula associada a um campo quantizado.

Para entendermos as dificuldades que encontramos para operacionalmente definirmos partículas em espaços-tempo que não são estacionários, temos que entender o seguinte ponto essencial: se o espaço-tempo tem uma geometria estacionária, teremos um vetor de Killing do tipo tempo K que gera um grupo de Lie uniparamétrico de isometrias. Os modos normais que satisfazem

$$L_K u = -i\lambda u,$$

onde L_K é a derivada de Lie com respeito a K , serão identificados como modos de frequência positiva. Temos assim uma forma trivial de definir modos de frequência positiva e negativa, e o vácuo associado a esta escolha é chamado vácuo de Killing ou vácuo trivial. Como o elemento de linha de Milne é não-estacionário, e as linhas de universo associadas a observadores em repouso em relação ao sistema de coordenadas não são curvas integrais de um vetor de Killing do tipo-tempo, a definição de modos normais de frequência positiva e negativa se torna problemática. Diferentes soluções para este problema foram apresentadas na literatura por di Sessa [33] e Sommerfield [34]. As quantizações de di Sessa e Sommerfield podem ser comparadas. É possível apresentar os coeficientes de Bogoliubov entre os modos de di Sessa e ondas planas, e os modos de Sommerfield e ondas planas. Temos que para um observador de Milne que utiliza a definição de di Sessa de frequências positivas e negativas, o vácuo de Minkowski é um estado térmico de partículas, com uma certa temperatura associada. Entretanto para um observador que utiliza a definição de Sommerfield de frequências positivas e negativas, o vácuo de Minkowski é um estado de zero partícula. Outra linha de pesquisa que foi bastante estudada na segunda metade do século passado está associada ao estudo de técnicas de regularização e renormalização em teoria quântica dos campos formuladas num espaço-tempo com curvatura e na presença de estruturas macroscópicas clássicas.

Até o presente momento, não existe uma teoria local quântica da gravitação consistente. Na ausência desta teoria, uma linha de pesquisa que foi considerada bastante promissora, a partir dos anos setenta do século passado, foi tratar o campo gravitacional classicamente, enquanto que os campos de matéria são tratados como operadores quânticos. Esta situação não era nova na física, e

já foi bastante explorada em outros modelos. Num sistema descrevendo campos eletromagnéticos e campos fermiônicos, a seguinte aproximação é bastante semelhante, e é conhecida na literatura como eletrodinâmica semi-clássica [35]. Na eletrodinâmica semi-clássica, o campo eletromagnético é tratado como um campo clássico, acoplado ao valor esperado do operador corrente $\langle 0|j^\mu(x)|0\rangle$, onde $j^\mu(x)$ é construído com o produto de campos fermiônicos no mesmo ponto do espaço-tempo. É claro que apenas os campos fermiônicos estão sendo quantizados nesta aproximação.

Fazendo uma analogia com a situação acima discutida, podemos chegar às equações de Einstein na aproximação semi-clássica, onde o tensor momento-energia é dado pelo valor esperado no vácuo do operador momento-energia, isto é, $\langle 0|T^{\mu\sigma}|0\rangle$. As equações de Einstein na aproximação semi-clássica ficam escritas na forma

$$R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}R g_{\mu\sigma} + \Lambda_B g_{\mu\sigma} = -8\pi G_B \langle 0|T_{\mu\sigma}|0\rangle,$$

onde o índice B que aparece na constante cosmológica e na constante gravitacional nos indica que devemos trabalhar com estas quantidades nuas ("bare").

É amplamente sustentada pela comunidade de físicos teóricos a idéia que esta aproximação conhecida como aproximação a nível de um laço ("one-loop level") é bastante razoável. Entretanto, a pergunta que fica no ar é se esta aproximação é consistente. No caso de uma resposta negativa, poderíamos restaurar a consistência, pelo menos a nível de um laço, e teríamos que incluir o gráviton nos campos de matéria e calcular a contribuição destes no nível de um laço ("one-loop level"). Desta forma a primeira extensão possível da aproximação semi-clássica das equações de Einstein é considerar as flutuações do campo gravitacional [36]. Como já foi bastante enfatizado na literatura, as flutuações do campo gravitacional podem ter duas origens. A primeira está ligada à natureza quântica do campo gravitacional. A segunda está ligada às flutuações quânticas dos campos de matéria. O tratamento de flutuações do campo gravitacional nos oferece uma possível extensão da aproximação semi-clássica. Flutuações do espaço-tempo nos levam ao fato de que partículas testes que percorreriam geodésicas tenham desvios nas trajetórias, como se fossem partículas brownianas. Se aplicarmos este raciocínio para fótons, não podemos escapar do fato que flutuações do campo gravitacional nos levam a flutuações do cone de luz. A própria noção de um horizonte de eventos rígido deve ser revista nesta nova situação. Um maneira tratável de estudarmos as flutuações do espaço-tempo consiste em assumirmos que os grávitons estão num estado comprimido ("squeezed state"). Os grávitons fariam com que o cone de luz flutuasse, e existiriam efeitos mensuráveis para este fato. No caso de um horizonte de eventos, teríamos também flutuações devido às flutuações do espaço-tempo. Outra pergunta que fica é se as flutuações do horizonte de eventos na métrica de Kruskal podem alterar de forma apreciável o efeito Hawking [37]. Neste momento a literatura ainda não tem uma resposta definitiva para esta pergunta.

4 O problema da energia divergente do ponto-zero

Voltando ao problema das quantidades nuas, este procedimento de introduzir as quantidades nuas é necessário, pois o lado direito das equações de Einstein na aproximação semi-clássica é mal definido, envolvendo o produto de operadores no mesmo ponto do espaço-tempo. Como os operadores de campo são distribuições, por exemplo, se estudamos um campo escalar, $\langle 0 | \varphi^2(x) | 0 \rangle$ não está bem definido. Desta forma, o valor esperado no vácuo do tensor momento-energia de campos de matéria é divergente, e um procedimento de regularização e renormalização deve ser desenvolvido a fim de se obter resultados físicos satisfatórios. Trabalhar com as quantidades nuas é fundamental para implementarmos um procedimento de regularização e renormalização. Gostaríamos de enfatizar que este problema não ocorre apenas numa teoria semi-clássica da gravitação. Mesmo na ausência de campos gravitacionais, o valor esperado no vácuo dos tensores momento-energia associados aos campos escalares, eletromagnéticos ou espinoriais, também são divergentes. Se nos restringirmos ao estudo da componente (00) do tensor momento-energia associado a qualquer um destes campos, temos o problema da energia do ponto-zero. O valor esperado do operador energia associado a qualquer campo quantizado, no estado de vácuo, é divergente. Vamos analisar este problema detalhadamente. Por simplicidade, vamos trabalhar a princípio com um campo escalar neutro.

Desta forma, supondo um campo escalar sem massa, uma das formas de definir a energia do vácuo é

$$E = \int_0^\infty d\omega \left(\frac{1}{2} \omega \right) N(\omega),$$

onde $N(\omega)$ é o número de modos com energia entre ω e $\omega + d\omega$. A quantidade acima é claramente divergente e é um exemplo bastante simples das dificuldades matemáticas que encontramos quando insistimos em construir teorias onde distribuições são multiplicadas no mesmo ponto do espaço-tempo. A forma mais simples de contornar o problema gerado pela energia do ponto-zero é impor o ordenamento normal de Wick. Apesar deste procedimento ser justificável no espaço-tempo de Minkowski, ele é bastante drástico e afasta a possibilidade de um efeito surpreendente conhecido como efeito Casimir, que passamos a discutir.

Em 1948 Casimir mostrou como é possível obter um resultado finito para a energia do vácuo, após um procedimento de regularização e renormalização, sem utilizar o ordenamento normal de Wick [38]. Apesar do resultado obtido pelo ordenamento normal de Wick ser encontrado no caso limite da situação investigada por Casimir, podemos provar que uma configuração de duas placas paralelas neutras, interagindo com um campo eletromagnético preparado no estado de vácuo, se

atraem com uma força por unidade de área dada por

$$F = -\frac{\partial U(l)}{\partial l},$$

onde l é a distância entre as placas, e $U(l)$ é a energia por unidade de área ou energia de Casimir do sistema, que não é zero necessariamente. Enfatizando, a lição que recebemos é a seguinte: o ordenamento normal de Wick afasta a possibilidade do efeito Casimir, sendo um procedimento de renormalização forte demais. Extensas revisões sobre o efeito Casimir podem ser encontradas. Veja por exemplo as Refs. [39] [40] [41]. Neste momento, gostaríamos de entrar mais em detalhes acerca dos problemas acima discutidos. Desta forma poderemos elaborar melhor a discussão acerca dos métodos matemáticos que são utilizados para eliminarmos as divergências que são encontradas na teoria de campos. Vamos nos deter no problema da energia divergente do ponto-zero que nos leva naturalmente ao efeito Casimir.

Uma forma bastante natural de regularizar a energia do vácuo é introduzir um corte exponencial ("exponential cut-off") na soma divergente. Consequentemente, a energia do vácuo regularizada se escreve como

$$\langle 0|H(\lambda)|0\rangle_{reg} = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k e^{-\lambda\omega_k}, \quad Re(\lambda) > 0.$$

Na verdade, o método do corte exponencial foi introduzido por Casimir, e sistematizado por Fierz [42], Boyer [43] e outros. Após estes trabalhos pioneiros, diferentes métodos foram propostos na literatura, como procedimentos alternativos para se obter a energia renormalizada do vácuo. Essencialmente, podemos encontrar na literatura os seguintes métodos, que se dividem em dois grupos, a saber: um método local e os métodos globais. O primeiro é o método das funções de Green [44], que é um método fundamentalmente local. Os métodos globais são os seguintes: o método da extensão analítica da zeta [45] [46] e a regularização dimensional [47]. No método da função zeta de Riemann generalizada, são efetuadas extensões analíticas de funções zeta de Riemann generalizadas, e este está fundamentado nas idéias de Bollini e colaboradores [48], onde quantidades físicas divergentes são regularizadas por intermédio de um parâmetro complexo. A regularização dimensional aplicada ao efeito Casimir também está fundamentada nas idéias de Bollini, Giambiagi [49], 't Hooft, Veltman e outros [50], onde o parâmetro regularizador é neste caso a dimensão do espaço-tempo. Posteriormente discutiremos o método introduzido por Dowker e Critchley [51], e também Hawking [52], que está associado à regularização de determinantes. Para uma interessante discussão do método da zeta-espectral, veja por exemplo o trabalho de Blau e colaboradores [53]. É evidente que uma regularização é simplesmente um processo intermediário para controlarmos quantidades divergentes, entretanto na ausência de um grupo de renormalização a definição da energia renormalizada do vácuo associada a qualquer campo quantizado no espaço-tempo de Minkowski é bastante sutil. Na verdade, apenas num contexto envolvendo gravitação

esta pode ser definida sem ambigüidades, pois esta estaria associada a uma constante cosmológica, que introduzida nas equações de Einstein na aproximação semi-clássica modificaria a geometria do espaço-tempo.

Por simplicidade, toda a discussão que se segue aplica-se a um campo escalar neutro. A generalização para o campo eletromagnético é imediata, e em linhas gerais teremos apenas um resultado que é o dobro do caso escalar, devido ao fato do campo eletromagnético ter dois estados de polarização, isto é, dois graus de liberdade para cada grau de liberdade associado ao campo escalar. Vamos assumir que a energia renormalizada do vácuo pode ser obtida a partir de um procedimento de regularização e renormalização da soma infinita da energia do ponto-zero associada a cada modo do campo. Vemos claramente que como não existe diferença entre a densidade dos modos de um campo minimamente ou conformemente acoplado, a discussão subsequente cobre ambos casos. Desde que o campo minimamente acoplado e o conformemente acoplado obedecem à mesma equação de movimento, a soma da energia dos modos é a mesma, e conseqüentemente a energia renormalizada também, se utilizamos esta definição de integrar sobre o número de modos com energia entre ω e $\omega + d\omega$, multiplicando esta quantidade pela energia de cada modo. O método acima descrito pode ser classificado como um procedimento global. Se utilizamos um método local onde a energia renormalizada é obtida a partir de uma integral na seção espacial da componente (00) do tensor momento-energia, os problemas começam a aparecer.

Vamos rapidamente mostrar por que, se usamos o método das funções de Green, podemos obter resultados diferentes daqueles obtidos por um método global. Para calcularmos a energia renormalizada do vácuo associado a qualquer campo, devemos aplicar um determinado operador diferencial numa função de Green, que chamamos de função de Green renormalizada $G_{ren}(x, x')$, isto é

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{ren} = \lim_{x \rightarrow x'} D_{\mu\nu}(G(x, x') - G_0(x, x')),$$

onde $G(x, x')$ é a função de Green na presença de fronteiras ($\partial\Omega$), enquanto que $G_0(x, x')$ é a função de Green na ausência das fronteiras. A quantidade entre parênteses é conhecida como a função de Green renormalizada, pois a estrutura de singularidades quando os dois pontos coincidem, isto é, $x \rightarrow x'$ para $G(x, x')$ e $G_0(x, x')$, é a mesma. Note que, quando nos aproximamos da fronteira, o tensor momento-energia renormalizado pode divergir. Isto pode acontecer, pois as condições de contorno são clássicas e fixadas a priori. Se escolhermos, por exemplo, as condições de contorno de Dirichlet, por construção as funções de Green renormalizadas se tornam as funções de Green não renormalizadas quando nos aproximamos das fronteiras.

É importante salientar que o argumento acima não é uma prova de que o tensor momento-energia renormalizado diverge quando nos aproximamos das fronteiras, mas se isto não ocorre, é devido ao fato de um delicado cancelamento estar ocorrendo. Como este cancelamento ocorre para um campo escalar conformemente acoplado, enquanto que não ocorre para um campo escalar

minimamente acoplado, temos diferentes resultados para a energia do vácuo renormalizada se utilizamos o método das funções de Green ou a soma de modos. Isto ocorre pois, usando a soma de modos para definirmos a energia do vácuo renormalizada, o campo escalar minimamente acoplado e o campo escalar conformemente acoplado dão o mesmo resultado. Entretanto temos diferentes resultados para a energia do vácuo renormalizada se utilizamos o método das funções de Green, devido aos diferentes comportamentos na fronteira dos campos escalares minimamente acoplados e dos campos escalares conformemente acoplados.

Neste momento se coloca a sutil questão: qual é a energia física? Como já discutimos, uma primeira resposta seria a energia obtida a partir da soma da energia dos modos. Uma segunda possibilidade seria a energia obtida a partir de uma integral na seção espacial da componente (00) do tensor momento-energia. Vamos assumir que a soma renormalizada da energia do ponto-zero de cada modo nos fornece a energia física do sistema. Desta forma estamos dando ênfase aos métodos globais. Para uma detalhada discussão acerca do problema, veja por exemplo o importante trabalho de Deutsch e Candelas [54]. Na verdade, este problema de obtermos diferentes resultados para a energia do vácuo renormalizada associada a um campo escalar, se utilizamos o método das funções de Green, só se resolve se permitimos que a estrutura macroscópica, onde impusemos as condições de contorno clássicas, flutue [55].

Num artigo bastante interessante Actor e Bender [56] estudaram o efeito Casimir sem assumir condições de contorno de Dirichlet ou Neumann para um campo escalar. A situação investigada por estes autores é a de potenciais substituindo as condições de contorno clássicas. Esta linha de investigação foi desenvolvida por varios autores. Veja por exemplo o trabalho [57], onde foi estudado o efeito Casimir também sem assumir condições de contorno de Dirichlet ou Neumann para um campo escalar. As placas foram substituídas por potenciais e foram investigadas diferentes situações e a energia de Casimir de um campos escalar interagindo com estes potenciais. Foram investigadas as situações de fronteiras moles ("soft") e também semi-duras ("semi-hard").

O efeito Casimir devido a férmions sem massa confinados entre placas num espaço-tempo D-dimensional também já foi bastante estudado. No trabalho [58] foi introduzido na literatura o conceito de sacola achatada ("slab-bag"). Neste trabalho foi assumida a seguinte condição de contorno sobre a corrente fermiônica:

$$\eta^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = 0,$$

onde η^μ é um vetor unitário normal às superfícies. Desta forma não há fluxo de corrente fermiônica através das paredes. A energia de Casimir do sistema foi encontrada e foi mostrado o comportamento da energia de Casimir com a dimensão do espaço-tempo. A generalização destes resultados para férmions com massa seria bem vista. Vale a pena lembrar que neste caso temos um forte resultado que pode influenciar os cálculos. É fato conhecido que se confinamos espinores de Dirac num espaço-tempo com fronteiras aparecem modos fermiônicos sem massa, com quiralidade bem

definida, propagando-se sobre as fronteiras. Desta forma, na generalização destes resultados para férmions com massa, o resultado acima deve ser levado em consideração.

Entretanto, outras questões ficam no ar. Por exemplo, seria possível generalizar o método do corte exponencial ("exponential cut-off") para um espaço-tempo D-dimensional ainda trabalhando com a configuração proposta por Casimir? Pode-se mostrar que sim. Estudando um campo neutro sem massa num espaço-tempo D-dimensional na presença de um par de hiperplacas perfeitamente refletoras [59], i.e., assumindo condições de contorno de Dirichlet sobre as placas, estas se comportam como espelhos ("mirrors"). Introduzindo um corte regularizador exponencial ($e^{-\lambda\omega}$) na soma divergente das autofreqüências, mostra-se que a energia regularizada tem dois termos divergentes. O primeiro, que é proporcional ao volume e é dado por $\frac{\text{volume}}{\lambda^D}$. O segundo, que é proporcional à área das hiperplacas e é dado por $\frac{\text{area}}{\lambda^{D-1}}$.

Este resultado é apenas uma manifestação do teorema de Weyl [60] [61] [62], que diz que a distribuição assintótica dos autovalores associados a um operador elíptico tem um termo dominante proporcional ao volume, outro termo proporcional à área e outros termos proporcionais a invariantes geométricos associados à variedade onde os campos estão definidos. Sendo mais específico, temos que a distribuição assintótica dos autovalores associados ao operador laplaciano é dada por

$$N(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi} \pm \frac{S\omega}{8\pi} + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial M} \chi dS + o(\omega^{-2}),$$

onde o sinal positivo ou negativo está ligado à condição de contorno que escolhemos aos campos de serem Neumann ou Dirichlet. A quantidade V é o volume da variedade, S é sua área e χ é o traço da curvatura extrínseca. Desta forma, é fácil entender o procedimento de renormalização utilizado por Casimir, Fierz, Boyer e outros, e a razão deste ser utilizado a fim de eliminarmos a parte polar da energia do vácuo regularizada. Devemos efetuar subtrações de energias regularizadas associadas a configurações que têm o mesmo volume e mesma área. Estudando a mesma configuração num espaço-tempo D-dimensional, Ambjorn e Wolfram encontram um resultado coincidente, utilizando o método da regularização dimensional. É importante salientar que, utilizando-se a regularização dimensional, a energia do vácuo é obtida automaticamente, sem necessidade de uma renormalização.

Uma questão que merece ser levantada é a seguinte: seria possível mostrar que estes diferentes procedimentos de se obter a energia de Casimir, isto é, regularização e renormalização com subtrações de energias regularizadas associadas a configurações, são analiticamente equivalentes? Esta pergunta já havia sido formulada por Birrel e Davies [63]. Estudando o caso $D = 2$ e interpretando o método zeta como um corte mais suave do que o corte exponencial, isto é, um corte algébrico, é possível unificar o método da extensão analítica da zeta e o método do corte exponencial neste caso bastante particular.

Outra questão ainda hoje em aberto, associada à energia renormalizada do vácuo, diz respeito

ao sinal desta energia. É bem conhecido o fato de que Casimir tentou explicar as tensões de Poincaré ("Poincaré stress") assumindo que o elétron seria constituído por uma casca esférica. Casimir encontrou um modelo bastante simples para estabilizar uma estrutura de casca esférica constituída de uma densidade de carga negativa. Se temos um campo eletromagnético no estado de vácuo no interior e no exterior, a seguinte situação ocorre. Se a energia de Casimir da configuração fosse negativa, como no caso das placas paralelas, a força de Casimir seria capaz de estabilizar o sistema.

Foram precisos mais de dez anos para que se provasse que a idéia de Casimir não funcionava. Isto foi feito por Boyer [64] [65] e Davies [66]. Estes autores mostraram que no caso da configuração esférica a energia renormalizada é positiva, de forma que a força é repulsiva. Isto dá uma contribuição que desestabiliza o sistema. Como a energia de Casimir depende das condições de contorno impostas sobre o campo quantizado, da dimensionalidade do espaço-tempo, do spin do campo e da geometria da cavidade, não podemos descartar a possibilidade das tensões de Poincaré terem sua origem quântica, se o espaço-tempo tiver mais do que quatro dimensões [67].

Uma outra situação bastante estudada, onde o sinal da energia de Casimir não concorda com os experimentos, diz respeito à contribuição dos gluons e quarks para a energia do ponto-zero renormalizada do modelo de sacola do MIT ("MIT bag-model"). Neste modelo, os hadrons seriam compostos de campos de gluons e quarks confinados. A energia do ponto-zero da sacola deve conter um termo da forma $-\frac{Z}{R}$, onde R é o raio da sacola e Z é uma constante que deve ser obtida fenomenologicamente. Este termo é uma manifestação da energia do ponto-zero dos campos bosônicos e fermiônicos confinados. Estudos sistemáticos mostraram que a energia do ponto-zero renormalizada contém o termo $\frac{1}{R}$, porém com fator Z negativo ($Z \approx -0,7$), dando um efeito repulsivo, em lugar de se obter uma força atrativa que estaria de acordo com a espectroscopia hadrônica. Uma interessante proposta para se obter o sinal correto foi apresentada recentemente por Oxman e colaboradores [68], onde foi investigada a contribuição para a energia de Casimir devida aos campos bosônicos com um propagador modificado na região infravermelha.

Voltando ao problema da comparação entre diversos métodos para se obter a energia de Casimir, pode-se também generalizar a prova da equivalência analítica entre o método do corte exponencial e o método da continuação analítica da função zeta de Riemann, para espaços-tempo de maior dimensionalidade. A prova original da equivalência foi obtida apenas para um espaço-tempo bidimensional, isto é, para $D=2$.

Para que seja feita uma comparação entre estes dois métodos, Svaiter e Svaiter [69] continuaram a estudar um campo escalar sem massa. Assumiram que este campo escalar sem massa está definido em duas regiões distintas. A primeira seria uma região exterior a uma caixa retangular estática num espaço-tempo tridimensional, e a segunda que é exatamente a região interior à caixa. Desta forma, nesta segunda região o campo está confinado ao interior de uma caixa num espaço-tempo tridimensional. Aplicando a técnica introduzida anteriormente, onde a energia do vácuo é

regularizada utilizando-se dois procedimentos de regularização simultaneamente, a saber um corte exponencial e um corte algébrico, foi possível generalizar o resultado previamente obtido. Para que isto seja possível é necessário interpretar o corte algébrico na soma das autofreqüências, como uma regularização analítica. Um ponto bastante discutido neste trabalho diz respeito à importância dos modos exteriores à caixa, onde os autores assumem condições de contorno clássicas. Lembremos o teorema de Weyl, que diz que a distribuição assintótica dos autovalores associados a um operador elíptico tem um termo proporcional ao volume, outro termo proporcional à área, e outros termos proporcionais a invariantes geométricos associados à variedade onde os campos estão definidos. Desta forma vemos que o procedimento utilizado por Casimir não deve funcionar para o caso de cavidades arbitrárias. Nos trabalhos de Casimir, Fierz e Boyer a região exterior às placas condutoras é a união de dois domínios simplesmente conexos, de forma que as configurações auxiliares reproduzem a geometria da configuração original. Desta forma a contribuição dos modos exteriores desaparece no procedimento de renormalização. No caso da caixa retangular estática num espaço-tempo tridimensional, para que a contribuição dos modos exteriores desapareçam no procedimento de renormalização, devemos introduzir configurações auxiliares que não reproduzam a geometria da região exterior à caixa. Desta forma, os autores usam o termo variante do método do corte exponencial neste trabalho. Em conclusão, a introdução de configurações auxiliares contorna o problema associado ao teorema de Weyl nesta situação bastante específica. Pode-se mostrar que existe uma prova analítica da equivalência entre o método da extensão analítica da função zeta de Riemann e o método do corte exponencial na soma divergente das autofreqüências [70] [71].

5 O problema do detector girante e o vácuo de Trocherries-Takeno

Vamos retornar ao tema relativo ao comportamento de sistemas quânticos em referenciais não-inerciais. Todos os resultados da literatura investigando a função resposta de átomos se referiam a apenas cálculos assintóticos, de forma que não podem descrever importantes situações físicas. Vamos supor que átomos são acelerados durante um intervalo finito $\Delta\tau$. Qual é a função resposta do átomo nesta nova situação? Utilizando um modelo simplificado de um átomo que consiste de um sistema de dois níveis com um momento de monopólo, interagindo com um campo escalar neutro, Svaiter e Svaiter [72] investigaram a função resposta do átomo para tempos finitos de interação ou

observação. Vamos rapidamente delinear a diferença operacional entre o modelo de um detector de partículas proposto por Unruh [13] e o modelo de um detector proposto há bastante tempo por Glauber [73]. Esta segunda versão de detector também foi adotada por Nussenzveig [74]. A diferença fundamental entre estes dois aparatos experimentais é que no modelo de detector de Unruh não se assume a aproximação da onda girante ("rotating wave approximation" ou RWA), enquanto que no modelo de detector de Glauber e Nussenzveig associamos a detecção de uma partícula de um campo acoplado ao detector, a um processo de absorção. De forma sucinta, o detector de Glauber não leva em conta processos virtuais onde não há conservação de energia, enquanto que, para o detector proposto por Unruh, processos virtuais estão sendo levados em consideração.

Como já discutimos anteriormente, pode-se mostrar que o detector de Unruh, uniformemente acelerado, interagindo com um campo escalar no estado de vácuo, se excita emitindo uma partícula que está sendo descrita por um vetor estado que pertence a um espaço de Hilbert construído por observadores inerciais. Além disso, a absorção de uma partícula que está sendo descrita por um vetor estado que pertence a um espaço de Hilbert construído por observadores acelerados, que chamaremos daqui por diante de partícula de Rindler, no quadrante de Rindler direito ("right Rindler edge"), implica no aparecimento de uma partícula de Rindler no quadrante de Rindler esquerdo ("left Rindler edge"). Este mesmo tipo de interpretação já havia sido dado por Unruh e Wald [75], entretanto este tipo de cálculos nunca tinham sido efetuados na literatura. Como se comporta um átomo inercial interagindo com um campo escalar no vácuo de Rindler? É claro que resultados assintóticos não podem ser utilizados na situação acima descrita, pois para gerar o vácuo de Rindler associado a um campo escalar temos que acelerar um espelho ("mirror"). Para um estudo detalhado destes problemas, veja por exemplo o minucioso estudo apresentado por Ginzburg e Frolov [77].

Gostaríamos de discutir alguns temas associados a processos radiativos onde existe um aparato experimental que mede como as flutuações de um campo quantizado se modificam pela presença de estruturas clássicas. Seguindo este raciocínio, existe uma série de trabalhos sobre eletrodinâmica em cavidades. Na verdade pode-se mostrar que a vida média dos estados atômicos, isto é, o inverso da taxa de transição, se modifica devido à presença de estruturas macroscópicas. Isto se deve ao fato de que estas estruturas macroscópicas modificam as flutuações do vácuo associado ao campo eletromagnético, e estas são responsáveis pela emissão espontânea de átomos [78]. Um modelo simplificado onde aparecem estas idéias de forma bastante simples consiste de um sistema de dois níveis de energia interagindo com um campo escalar, na presença de superfícies perfeitamente refletoras, chamadas de espelhos ("mirrors") [79]. Utilizando o método das imagens, é possível estudar o comportamento do átomo assumindo que o campo escalar está em equilíbrio com um reservatório térmico a temperatura β^{-1} .

Processos radiativos nas vizinhanças de uma corda cósmica também foram estudados na lite-

ratura. Esta linha de pesquisa está associada a várias idéias de matéria condensada e fenômenos críticos, que passaram a ser utilizadas em teoria quântica de campos após a formulação das teorias de calibre não-abelianas. Nos modelos de unificação, é fato conhecido que se o universo se encontra numa temperatura abaixo de uma certa temperatura crítica, o campo de Higgs adquire um valor esperado no vácuo diferente de zero. Isto levou Kibble [80] a especular a existência de estruturas cósmicas topológicas, como paredes ou cordas. No entanto, foi mostrado que as paredes são incompatíveis com os modelos cosmológicos conhecidos. Desta forma, apenas as cordas cósmicas teriam interesse em modelos cosmológicos e poderiam ser encontradas no estágio atual do nosso universo.

É importante lembrar que uma solução das equações de Einstein com simetria cilíndrica foi derivada por Marder há bastante tempo [81]. Neste trabalho, Marder mostrou que a solução exterior a uma distribuição homogênea de matéria com simetria cilíndrica é localmente plana, isto é, o tensor de Riemann se anula, no entanto a seção $t = cte$, $z = cte$, tem uma topologia não-trivial, e define uma estrutura cônica. Dois resultados interessantes que valeria a pena comentar são os seguintes: o primeiro obtido por Linet [82], onde uma carga colocada nas vizinhanças de uma corda cósmica sofre a ação de seu próprio campo devido à topologia não-trivial da 2-superfície $t = cte$, $z = cte$. O segundo, obtido por Aliev e Gal'tsov [83]. Estes autores demonstraram que uma carga inercial movendo-se neste espaço-tempo que tem uma topologia não-trivial na seção $t = cte$, $z = cte$ irradia. No entanto, para determinados valores da densidade linear da corda, a radiação cessa. Fazendo uma analogia com o eletromagnetismo, estes autores postularam a quantização da densidade linear da corda. Utilizando este resultado, pode ser estudado o comportamento do detector de Unruh nas vizinhanças de uma corda cósmica. Devido ao fato de que, com o detector de Unruh, processos virtuais estão sendo levados em consideração, é interessante investigar como a topologia não-trivial, que define uma estrutura cônica no espaço-tempo, modifica processos radiativos. Esta linha de pesquisa foi desenvolvida nos trabalhos [84] [85].

Para finalizar esta seção gostaríamos de apresentar o problema o detector girante. Já havíamos discutido o modelo de detector proposto por Unruh e DeWitt. O detector operacionalmente nos ajuda na definição de partículas? A questão parece trivial, mas não é, devido ao seguinte fato. Na verdade temos duas quantidades que devemos examinar para descrever o número de partículas associadas a representações unitariamente não-equivalentes da álgebra dos operadores num determinado estado conectado a outra representação. A primeira baseia-se nos coeficientes de Bogoliubov e a segunda na função resposta do detector, como já discutimos detalhadamente.

Podemos mostrar que para observadores com aceleração própria constante levando um detector de Unruh e DeWitt estas duas respostas coincidem. Em outras palavras: os coeficientes de Bogoliubov entre os modos inerciais e os modos de Rindler nos dizem que o vácuo de Minkowski é um estado térmico quando visto pelo observador com aceleração própria constante. Da mesma forma, um detector de Unruh e DeWitt preparado no estado fundamental, interagindo com o

campo escalar no estado de vácuo de Minkowski, tem uma probabilidade assintótica não-nula de ser encontrado num estado excitado. A função resposta do detector é a mesma que a de um detector inercial interagindo com um banho térmico a temperatura β^{-1} , se a seguinte identificação for feita: $\beta^{-1} = \frac{\sigma}{2\pi}$, onde σ é a aceleração própria do detector.

A situação se complica quando Letaw [90] e Padmanabhan [91], estudando o modelo de DeWitt de detector, exibem resultados onde os coeficientes de Bogoliubov são zero, mas a função resposta do detector não é zero, e também situações onde os coeficientes de Bogoliubov não são zero, entretanto a função resposta do detector é zero. A primeira situação ocorre justamente quando colocamos um detector para girar uniformemente em relação a um eixo. Como esta primeira situação pode ser facilmente implementada experimentalmente, vamos nos deter mais neste problema.

A situação pode ser resumida da seguinte forma. Vamos a princípio assumir que as transformações de coordenadas definidas por Landau e Lifshitz [86], são aquelas que conectam um referencial inercial a um referencial em rotação uniforme. Para a construção do espaço de Hilbert dos estados físicos da teoria, associados a observadores que giram uniformemente em relação a um eixo, devemos primeiramente resolver a equação de Klein-Gordon num sistema de coordenadas curvilíneas. Não é difícil encontrar um conjunto completo de funções base, no espaço das soluções da equação de Klein-Gordon nesta situação [87] [88] [89]. Podemos utilizar esta base de funções para efetuar a expansão do operador de campo. Está claro que os coeficientes de Fourier da expansão do operador de campo serão os operadores de criação e aniquilação de quanta do campo, desde que possamos identificar os modos de frequências positivas e negativas. O estado de mais baixa energia deste espaço de Hilbert chamaremos de vácuo girante. Para compararmos os dois espaços de Hilbert, devemos calcular os coeficientes de Bogoliubov entre os modos inerciais e os modos girantes. Estes coeficientes são zero, de forma que o vácuo girante e o vácuo de Minkowski coincidem.

Vamos assumir um campo escalar quantizado interagindo com um sistema de dois níveis. Pode-se mostrar que, se preparamos o sistema de dois níveis no estado fundamental e o campo no estado de vácuo de Minkowski, existe uma probabilidade não-nula de encontrarmos o detector no estado excitado, se este tem uma velocidade de rotação constante não nula em relação a um eixo. Como já enfatizamos, os coeficientes de Bogoliubov entre os modos inerciais e os modos girantes são zero, de forma que o vácuo girante e o vácuo de Minkowski coincidem. O detector que gira uniformemente em relação a um eixo mede partículas associadas ao campo escalar, entretanto o campo está no estado de vácuo de Minkowski que coincide com o vácuo girante. Após a absorção de uma partícula pelo detector o campo se encontrará num estado de mais baixa energia, de forma que o vácuo de Minkowski não pode ser o verdadeiro vácuo da teoria. Uma outra forma de formularmos este problema é a seguinte: seja um detector que tem uma velocidade de rotação constante não nula em relação a um eixo, preparado no estado fundamental, interagindo com o campo no vácuo

girante. Nossa intuição física nos diz que o detector deve ficar no estado fundamental. Como o vácuo girante coincide com o vácuo de Minkowski, podemos substituir o vácuo girante pelo vácuo de Minkowski, e a taxa de excitação não é mais zero. Temos um resultado contraditório.

Com o intuito de resolver este problema Davies, Dray e Manogue, num interessante artigo, apresentaram a seguinte solução para o problema [92]. Estes autores assumem que o campo escalar só está definido no interior de um cilindro de raio a , de forma que o vetor de Killing

$$K = \partial_t - \Omega \partial_\theta$$

é sempre do tipo-tempo, onde Ω é a velocidade de rotação. Desta forma pode-se mostrar que os coeficientes de Bogoliubov entre os modos inerciais e os modos girantes definidos dentro do cilindro ainda são zero, e que a função resposta do detector também é zero. O resultado físico profundo da construção de Davies e seus colaboradores é que o vácuo de Minkowski coincide com o vácuo girante. Entretanto toda a discussão fica restrita ao interior do cilindro.

Neste momento podemos nos perguntar se é possível definir um referencial girante sem a restrição imposta por Davies, Dray e Manogue. Usando as idéias de Hill [93] podemos definir um referencial girante sem a restrição acima discutida. A princípio devemos definir um referencial girante como aquele em que a velocidade de um ponto não pode ser uma função linear do raio, pois teríamos pontos com velocidade acima da velocidade da luz. Desta forma a velocidade deve ser uma função não-linear do raio. Usando estas idéias, Trocherries [94] e Takeno [95] encontraram a transformação de coordenadas entre um referencial inercial e aquele com rotação constante. Está claro que estas coordenadas estão naturalmente adaptadas aos dois referenciais respectivamente. Usando as transformações de Trocherries-Takeno foi possível definir um vácuo girante que não coincide com o vácuo de Minkowski. Este vácuo é conhecido na literatura como vácuo de Trocherries-Takeno [96] [97] [98].

Neste momento estamos em condições de discutir o problema dos elétrons que se movem em órbitas circulares. Temos dados experimentais que nos mostram que um feixe de elétrons que a princípio não têm polarização, gradualmente se polariza, quando estes percorrem trajetórias circulares. Este mecanismo leva à emissão de radiação síncrotron do tipo "spin-flip". Esperaríamos que assintoticamente todos os elétrons do feixe fossem para o estado fundamental. Entretanto isto não acontece, e a pergunta que fica é: por que a polarização não se completa, mesmo depois do sistema atingir o equilíbrio? Esta pergunta foi formulada há bastante tempo por Jackson [99].

Bell e Leinaas usaram as idéias associadas ao efeito Unruh para responder esta pergunta [100] [101]. Um elétron num acelerador circular é a versão magnética do detector de Unruh-DeWitt, pois existe um acoplamento linear entre o momento magnético do elétron e o campo magnético do acelerador. Desta forma, para Bell e Leinaas alguns elétrons ficam no estado excitado, pois absorveriam partículas de Rindler que estão presentes no vácuo de Minkowski. O problema fundamental desta construção é que no caso de aceleração linear aparece um horizonte de eventos, e

esta é a razão fundamental do vácuo de Minkowski ser um estado térmico para um observador de Rindler. A ausência de horizonte de eventos, nesta situação de trajetórias circulares, nos leva a tentar interpretar o problema usando as idéias já discutidas. Pode-se mostrar que os elétrons podem ir para o estado excitado por absorção de partículas de Trocherries-Takeno, que se encontram no vácuo de Minkowski.

6 A teoria de campos a temperatura finita: quebra de simetria e transição de fase

Gostaríamos, neste momento, sem entrar em maiores detalhes, definir anomalia, quebra espontânea de simetria e quebra dinâmica de simetria. Estes três conceitos são fundamentais para toda a discussão que se segue. Uma anomalia em teoria quântica de campos ocorre quando a versão quantizada de uma teoria viola uma simetria que está presente na teoria clássica. Uma quebra de simetria significa que não é possível construir uma representação unitária de uma simetria clássica no espaço de Hilbert dos estados da teoria. Uma quebra dinâmica de simetria significa que não é possível construir uma representação unitária que comute com o operador de evolução temporal da teoria quantizada.

Para toda a discussão que se segue vamos nos basear os métodos funcionais da teoria quântica dos campos. De forma bem sucinta, este método está baseado numa modificação e mesmo numa generalização das ideias de Feynman das somas sobre histórias na mecânica quântica. A principal modificação é a passagem da métrica do espaço-tempo de Lorentziana indefinida para uma métrica euclidiana. O retorno para a métrica física Lorentziana é garantida pelos teoremas de reconstrução de Osterwalder-Schrader [102] [103]. Nesta formulação partimos de uma teoria clássica de campos cuja dinâmica está fixa pelas equações de Euler-Lagrange. Formalmente escrevemos uma integral funcional somando sobre todas as configurações do campo cujo peso de Boltzman é dado pela ação clássica $S = \int d^d x \mathcal{L}$, que depende dos campos em questão que denotaremos por φ . Desta forma, o valor esperado de uma observável $O[\varphi]$ será

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] O[\varphi] e^{-S[\varphi]},$$

onde o símbolo $[d\varphi]$ indica uma medida que tem invariância translacional sobre o conjunto de todas as configurações do campo e Z é apenas uma constante de normalização.

É fato bem conhecido que se partimos de um modelo descrevendo um campo escalar com massa zero na aproximação de árvore ("tree-level"), e assumimos que uma das dimensões espaciais está compactificada, é possível mostrar que devido às correções radiativas, os quanta do campo adquirem massa [104] [105] [106] [107] [108]. Este fenômeno é conhecido na literatura como geração topológica de massa ("topological generation of mass"). Por outro lado, se partimos de um modelo associado a um campo escalar com uma simetria espontaneamente quebrada, neste espaço-tempo com topologia não-trivial, existem duas formas de restaurar esta simetria quebrada. A primeira seria aumentando a temperatura do reservatório térmico. Isto é, existe uma temperatura crítica acima da qual a simetria é restaurada. Outra forma seria reduzir o raio da dimensão compactificada, isto é, existe um raio crítico abaixo do qual a simetria é também restaurada [109].

Vamos assumir campos quantizados na presença de um banho térmico assumindo também que a seção espacial tem topologia não-trivial. Não é difícil entender a restauração de simetria quebrada por efeito de temperatura e redução do raio da dimensão compactificada. A compactificação de uma dimensão espacial gera massa topológica a um campo escalar sem massa, e que se o procedimento de regularização e renormalização é efetuado assumindo que os campos estão em equilíbrio com um reservatório térmico, aparece uma contribuição térmica para a massa [110] [111]. Estas quantidades, a saber a contribuição térmica para a massa e a contribuição topológica para a massa, têm a mesma forma funcional. Partindo-se do gerador funcional de todas as funções de Green, podemos encontrar o gerador funcional das funções de Green conexas. Dai, via um transformada de Legendre podemos definir a ação efetiva e o potencial efetivo. Usando o potencial efetivo a nível de um laço ("one-loop effective potential"), pode-se estudar a renormalização de um campo escalar neutro com auto-interação, assumindo que o sistema está em equilíbrio com um reservatório térmico a temperatura β^{-1} . Para investigar o comportamento dos campos em espaços-tempo com topologia não-trivial, podemos assumir várias dimensões espaciais compactificadas. No caso da seção espacial compactificada, uma regularização analítica pode ser utilizada. Vamos chamar este método de regularização analítica da função Epstein ("Epstein zeta-function"). No caso de apenas uma dimensão espacial compactificada, uma mistura entre regularização dimensional e a regularização analítica pode ser utilizada. Note que não apenas a massa renormalizada adquire uma contribuição térmica e topológica, mas que tal fato também ocorre com a constante de acoplamento renormalizada.

Um estudo da estrutura polar da continuação analítica do potencial efetivo no plano complexo s , onde s é o parâmetro regularizador, mostra que a contribuição para a massa e para a constante de acoplamento têm sinais opostos. Em outras palavras; a contribuição térmica e topológica para a massa é positiva mas a contribuição térmica e topológica para a constante de acoplamento é negativa. Em suma temos o seguinte resultado. A constante de acoplamento renormalizada para bósons com auto-interação é sempre maior de que a constante de acoplamento do mesmo sistema a temperatura finita.

Já havíamos discutido o fato de que quando tratamos de sistemas que necessitam ser descritos por um número infinito de graus de liberdade, no espaço-tempo de Minkowski, existe um número infinito de representações unitariamente não-equivalentes da álgebra dos operadores. Como a teoria quântica de campos tem um número infinito de espaços de Hilbert dos estados que são unitariamente não-equivalentes, a escolha de um determinado espaço de Hilbert fixa também um determinado vácuo. Este vácuo difere de um outro possível vácuo, e o significado profundo deste fato é que esta diferença aparece como um condensado de partículas. Quando este condensado de partículas num determinado vácuo viola uma simetria da hamiltoniana, dizemos que a simetria está espontaneamente quebrada ("spontaneous symmetry breaking"). Se nesta situação o sistema tem um vácuo degenerado, aparecem partículas sem massa chamadas de bósons de Nambu-Goldstone [112] [113]. Na descrição de um sistema qualquer, uma forma bastante natural de passarmos de uma fase onde a simetria está espontaneamente quebrada para outra onde a simetria é restaurada se dá por meio de efeitos térmicos.

Decorre da discussão acima que existe um importante programa de investigar como quantidades renormalizadas dependem da temperatura. Este programa se fundamenta no simples fato de que nas teorias de campo que são perturbativamente renormalizáveis devemos efetuar um procedimento de regularização, como por exemplo regularização dimensional, e em seguida eliminar os pólos das quantidades regularizadas por meio de um procedimento de renormalização. A correção térmica para a massa e constante de acoplamento deve ser dada pela parte regular das extensões analíticas nas vizinhança de pólos no plano complexo do parâmetro regularizador [114]. Vamos assumir o modelo de Landau e Ginzburg, isto é, uma teoria escalar $\lambda\varphi^4$ em equilíbrio com um reservatório térmico. Se não estamos interessados em investigar a transição de fase de segunda ordem que pode ocorrer neste modelo, vamos assumir que o coeficiente do termo quadrático a temperatura zero é uma quantidade positiva. Estudando o potencial efetivo no nível de um laço ("one-loop effective potential") pode-se mostrar como é possível regularizar esta quantidade utilizando um método de regularização analítica. Estudando a estrutura polar da continuação analítica do potencial efetivo no plano complexo s , onde s é o parametro regularizador, pode-se mostrar que a contribuição para a massa e constante de acoplamento têm sinais opostos. Num espaço euclideo D -dimensional, temos que a correção térmica para a massa é dada por

$$m^2(\beta) = m^2 + \frac{g}{(2\pi)^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\beta n}\right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(mn\beta),$$

enquanto que a correção térmica para a constante de acoplamento é dada por

$$\lambda(\beta) = g - \frac{3}{2} \frac{g^2}{(2\pi)^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\beta n}\right)^{\frac{D}{2}-2} K_{\frac{D}{2}-2}(mn\beta),$$

onde $K_\nu(z)$ é a função de Macdonald's ou função de Bessel de argumento imaginário. Vemos que a contribuição térmica para a massa é positiva mas a contribuição térmica para a constante de acoplamento é negativa. Vemos então como facilmente podemos gerar uma estrutura de transição de fase de segunda ordem se assumimos que o coeficiente do termo quadrático a temperatura zero é uma quantidade negativa. Lembremos que uma transição de fase ocorre se a energia livre ou suas derivadas que descrevem um sistema tem um comportamento singular. Em um espaço euclidiano D -dimensional, a constante de acoplamento renormalizada para bósons com auto-interação na teoria $\lambda\varphi^4$ é sempre maior do que a constante de acoplamento do mesmo sistema a temperatura finita. É importante salientar que estes resultados estão sendo obtidos na aproximação de um laço.

Sistemas fermiônicos também podem facilmente ser estudados na aproximação de um laço [115] [116]. Assumindo que temos equilíbrio com um banho térmico pode-se usar o formalismo de Matsubara para se investigar o modelo de Yukawa onde bósons e férmions interagem, e também o modelo de Gross-Neveu a temperatura finita. Com relação ao modelo de Yukawa, integrando os modos fermiônicos no funcional gerador das funções de Schwinger a temperatura finita, pode ser encontrado como os modos fermiônicos contribuem para o potencial efetivo associado ao campo escalar a nível de um laço. Esta quantidade contém divergências e é possível regularizar esta quantidade utilizando um método de regularização analítica. Pode-se encontrar a estrutura polar da continuação analítica do potencial efetivo no plano complexo s , onde s é o parâmetro regularizador. Já o modelo de Gross-Neveu [117] consiste de N férmions com auto-interação. Pode-se mostrar que efeitos de temperatura fazem com que este modelo tenha duas fases. Uma fase a baixas temperaturas, onde a simetria quiral está quebrada, e outra a altas temperaturas, onde a simetria quiral é restaurada.

Já comentamos o resultado de que na teoria $(\lambda\varphi^4)_D$, a contribuição térmica para a massa é positiva enquanto que a contribuição térmica para a constante de acoplamento é negativa. Queremos ressaltar que estes resultados são associados às correções térmica no nível de um laço. Desta forma temos o seguinte resultado. A constante de acoplamento renormalizada para bósons com auto-interação na teoria $\lambda\varphi^4$ é sempre maior do que a constante de acoplamento do mesmo sistema a temperatura finita. Com este resultado fica no ar o seguinte pergunta: será que é possível encontrar uma temperatura na qual a constante de acoplamento se anula? Indo um pouco mais longe, acima desta temperatura a constante de acoplamento ficaria negativa e o sistema ficaria instável. Teríamos por conseguinte uma situação anômala. Desta forma, nos parece que temos duas possibilidades. Ou a temperatura onde a constante de acoplamento se anula é infinita, ou a constante de acoplamento diminui com a temperatura até atingir um mínimo diferente de zero. Outra forma que ver o problema pode ser resumida na seguinte pergunta: como generalizar estes resultados para o nível de dois laços ("two-loop level") ou até mesmo estender os resultados para uma região não-perturbativa? É possível ir além de um laço após um procedimento de somar toda

uma classe de diagramas de Feynman [118]. Esta aproximação é também conhecida na literatura como Hartree-Fock [119] [120].

De qualquer modo, esta linha de pesquisa já aponta numa direção. A constante de acoplamento deve diminuir com a temperatura até atingir um mínimo diferente de zero. Utilizando o formalismo desenvolvido por Cornwall, Jackiw e Tomboulis [121], conhecido como formalismo CJT, é possível conseguir resultados não-perturbativos sobre as correções térmicas para a massa e constante de acoplamento numa teoria escalar. Se queremos obter resultados não-perturbativos sobre a correção térmica para a massa e a correção térmica para a constante de acoplamento numa teoria escalar, podemos utilizar as equações de Dyson-Schwinger (DSE). Estas equações formam um conjunto infinito de equações acopladas para as funções de n -pontos da teoria em questão. Uma forma de tratar o problema é truncar este sistema de equações. Isto pode ser feito assumindo um acoplamento fraco, e pode se mostrar que as equações de Dyson-Schwinger contêm a teoria perturbativa, pois estas equações geram todos os diagramas da expansão perturbativa. Outra forma de se obter um resultado não-perturbativo é considerar um gerador funcional generalizado $Z(J, K)$ na presença de uma fonte local $J(x)$, e de uma fonte não-local $K(x, y)$, onde $J(x)$ se acopla ao campo, isto é, $\Phi(x)$, enquanto que $K(x, y)$ se acopla a $\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)$. É evidente que este objeto $Z(J, K)$ é um gerador funcional generalizado das funções de Green euclidianas do modelo. Este formalismo é conhecido na literatura como formalismo CJT. Pode-se mostrar que o formalismo CJT reproduz os resultados obtidos via as equações de Dyson-Schwinger [122] [123] [124].

7 As teoria efetivas e a redução dimensional

Apesar de já termos discutido a teoria de campos a temperatura finita, seria interessante rever alguns conceitos já discutidos para apresentarmos a idéia da redução dimensional. A redução dimensional é baseada no teorema de desacoplamento de Appelquist-Carrazone [125]. A idéia fundamental da redução dimensional está relacionada ao fato de que, no formalismo de Matsubara, o algoritmo da teoria de perturbações em uma teoria de campos a temperatura finita produz propagadores que no limite de temperatura infinita ocasionam o seguinte fato: os modos não-estáticos desacoplam e ficamos com uma teoria tridimensional onde apenas os modos zero contribuem. Isto pode ser facilmente visto pelo fato de que, na formulação euclidiana da teoria de campos, o domínio da variável temporal euclidiana é dado por $0 \leq \tau \leq \beta$. É claro que estamos usando as condições de Kubo, Martin e Schwinger (condições KMS) [126] [127]. Isto nos leva a considerar a teoria de campo em questão em $D = 4$ a temperatura finita como uma teoria de campos em $D = 3$ a temperatura zero com um número infinito de excitações com massa $\left(\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + m_b^2\right)$ para um sistema de

bósons e $\left(\left(\frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)^2 + m_f^2\right)$ para férmions, onde m_b e m_f são respectivamente as massas associadas às excitações bosônicas e fermiônicas. Integrando os modos fermiônicos ou os modos bosônicos não-estáticos, obteremos uma teoria efetiva. Desta forma podemos afirmar que, no limite de altas temperaturas, as funções de correlação da teoria em questão em $D = 4$ podem ser reproduzidas por uma teoria efetiva a temperatura zero em $D = 3$. Está claro que esta equivalência se aplica para distâncias $L \gg \beta$.

Neste momento um paralelo com os métodos do grupo de renormalização inventado por Wilson [128] deve ser enfatizado. A idéia fundamental do grupo de renormalização consiste em reduzir o número de graus de liberdade de um sistema integrando sobre flutuações que têm pequeno comprimento de onda ("short wavelength"). Se estamos interessados no comportamento do sistema para grandes distâncias, como por exemplo perto de uma transição de segunda ordem, a integração sobre flutuações que têm pequeno comprimento de onda nos leva a outro sistema que têm o mesmo comportamento para grandes distâncias. Vamos mostrar rapidamente como se constrói teorias efetivas [129] na *QCD* a altas temperaturas, vamos dar uma breve introdução a *QCD* à temperatura finita.

A Cromodinâmica Quântica (*QCD*) é uma teoria de Yang-Mills com grupo de calibre $SU(3)$. Os férmions da teoria, os quarks, estão na representação fundamental do grupo de calibre e portanto têm associado um número quântico chamado cor, que pode ter três diferentes valores. A interação entre os quarks é mediada pelos bósons de gauge, que chamamos de gluons. Devido à estrutura não-abeliana da teoria, os gluons não se acoplam somente com os quarks, mas também existe entre eles uma auto-interação cúbica e quártica. Esta auto-interação dos gluons é responsável pela anti-blindagem ("antiscreening") da carga colorida na *QCD*. Esta anti-blindagem ("antiscreening") é responsável pela liberdade assintótica e talvez o confinamento. Uma transição da fase confinada à fase desconfinada pode ocorrer a altas temperaturas ou altas densidades [130] [131]. Nos choques de íons pesados ultra-relativísticos o plasma de quarks e gluons deve ser produzido, confinado numa região compacta.

O ponto crucial na situação experimental acima descrita é que o limite termodinâmico não pode ser usado e efeitos de volume finito e superfície devem ser levados em conta e investigados. É importante salientar que quando a temperatura ou a densidade passa de um certo valor crítico ocorrem duas diferentes transições de fase em *QCD*, a saber a transição de fase confinamento-desconfinamento e a transição de fase com restauração da simetria quiral. Vários trabalhos apontam na direção que estas duas transições de fase ocorrem simultaneamente. O plasma de quarks e gluons é produzido a altas temperaturas. Como já enfatizamos, se usarmos o formalismo de Matsubara deve ocorrer uma redução dimensional.

A redução dimensional é baseada no teorema de desacoplamento de Appelquist-Carrazone. A idéia básica desta aproximação se baseia no seguinte fato. No formalismo de Matsubara, o algoritmo da teoria de perturbações em teoria de campos a temperatura finita produz propagadores

que no limite de temperatura infinita produzem o seguinte fato. No limite de temperatura infinita os modos não-estáticos desacoplam e ficamos com uma teoria tridimensional onde apenas os modos zero contribuem. Isto pode ser facilmente visto lembrando que na formulação euclidiana o domínio da variável temporal euclidiana é dado por $0 \leq \tau \leq \beta$. Isto nos leva a considerar que qualquer modelo em teoria quântica de campos a temperatura finita, definido num espaço-tempo quadridimensional ($D = 4$), pode ser descrito como um modelo definido num espaço-tempo tridimensional ($D = 3$) a temperatura zero, com um número infinito de excitações com massas $\left(\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + m_b^2\right)$ para um sistema de bósons e massas $\left(\left(\frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)^2 + m_f^2\right)$ para férmions, onde m_b e m_f são as massas associadas aos campos bosônicos e fermiônicos respectivamente. No limite de temperatura infinita, devido à ausência dos modos zero, os campos fermiônicos desacoplam. Integrando os modos fermiônicos e os modos bosônicos não-estáticos, isto é, $n \neq 0$, teremos uma teoria efetiva. Desta forma podemos afirmar que no limite de altas temperaturas as funções de correlação associadas a qualquer modelo em teoria quântica de campos, num espaço-tempo quadridimensional ($D = 4$), podem ser reproduzidas por uma teoria efetiva a temperatura zero em $D = 3$. É claro que esta equivalência se aplica para distâncias $R \gg \beta$. No caso da QCD a redução dimensional nos dá uma teoria de campos tridimensional onde apenas o campo do glúon aparece. A redução dimensional em QCD pode ser encontrada em vários trabalhos na literatura [132] [133] [134] [135] [136] [137].

Vamos mostrar rapidamente como se constrói teorias efetivas na cromodinâmica quântica, a altas temperaturas. A estratégia deve ser a seguinte: usando o fato de que a constante de acoplamento g diminui com o aumento da temperatura devido à propriedade de liberdade assintótica, métodos perturbativos podem ser utilizados para se definir seqüências de teorias efetivas. Primeiramente usando as idéias da redução dimensional vamos construir uma teoria efetiva da QCD cujos parâmetros estão relacionados à física na escala da temperatura $\beta^{-1} = T$. Isto pode ser feito integrando os modos não-estáticos no funcional gerador. Como já discutimos, esta teoria efetiva não contém os modos associados aos campos dos quarks. Esta teoria é conhecida na literatura como $EQCD$, isto é, QCD eletrostática ("electrostatic QCD "), e consiste de uma teoria de Yang-Mills em três dimensões mais um campo escalar associado ao modo estático do campo cromoeletrônico. Nesta teoria os modos magnetostáticos permanecem sem massa e a massa efetiva do campo escalar é proporcional a gT . Usando o teorema de desacoplamento (AC) podemos construir uma segunda teoria efetiva onde o campo escalar agora desacopla. Nesta situação o sistema é descrito por uma teoria de Yang-Mills tridimensional com os modos magnetostáticos da QCD e é chamada de QCD magnetostática ("magnetostatic QCD " ou $MQCD$). Os parâmetros físicos desta teoria estão associados a escala gT . Uma propriedade importante das teorias efetivas é o fato de que estas são não-renormalizáveis. Neste contexto, a teoria de campos passou a ser vista como uma teoria efetiva onde devemos afrouxar o critério de renormalizabilidade [138] [139] [140] [141].

8 O problema da somabilidade da série perturbativa e a expansão perturbativa para o acoplamento forte

Vamos agora discutir outros problemas da teoria dos campos quantizados, que não estão associados a efeitos perturbativos, i.e., são efeitos que não devem ser investigados utilizando a série perturbativa definida por Dyson, Feynman, Tomonaga, Schwinger e outros. O ponto fundamental da renormalização perturbativa é o seguinte: as funções de Green de qualquer teoria que não seja livre podem ser escritas como uma série formal na constante de acoplamento. Uma pergunta natural é se esta série converge. No caso de uma resposta afirmativa, a sua soma define as funções de Green da teoria em questão. No caso de uma resposta negativa, temos que lançar mão de novos conceitos matemáticos para darmos sentido a esta série divergente. É claro que o antigo conceito de convergência deve ser estendido para darmos conta de séries divergentes. Uma série divergente pode ser somável. Pode-se mostrar que diferentes métodos de somabilidade dão o mesmo resultado. Um método bastante usado em teoria de campos é o método de Borel. Alguém pode se perguntar se a somabilidade de Borel é um método geral e efetivo para obtermos as soluções de uma teoria com interação, quando nos baseamos na série perturbativa. A resposta a esta pergunta não é positiva, devido à existência de instantons e renormalons, que são singularidades da transformada de Borel da série perturbativa, que aparecem no eixo positivo real do plano de Borel. Desta forma, a inversão de Borel não pode ser aplicada. Conseqüentemente o seguinte problema se coloca: uma teoria de campos pode parecer correta num regime perturbativo, todavia se torna sem sentido no regime não-perturbativo.

Desta discussão aparece uma direção que podemos seguir para aprofundarmos o nosso conhecimento das teoria de campos. Devemos conhecer o comportamento das teorias no espaço complexo das constantes de acoplamento [142]. Conseqüentemente, vamos investigar a estrutura de singularidade na vizinhança da origem, no plano complexo da constante de acoplamento, na teoria $\lambda\varphi^4$ [143]. Para isto vamos analisar um modelo zero-dimensional. Em resumo, temos que a função geratriz $z(m_0, g_0; h)$ do modelo zero-dimensional é dada por

$$z(m_0, g_0; h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp\left(-\frac{1}{2}m_0^2 \varphi^2 - \frac{g_0}{4!}\varphi^4 + h\varphi\right).$$

A função geratriz na ausência de fonte externa é definida por $z(m_0, g_0; h)|_{h=0} \equiv z_0(m_0, g_0)$. Nosso intuito é analisar a função de partição zero-dimensional $z_0(m_0, g_0)$, dada por

$$z_0(m_0, g_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp\left(-\frac{1}{2}m_0^2 \varphi^2 - \frac{g_0}{4!}\varphi^4\right).$$

Pode-se mostrar que a integral acima pode ser expressa em termos de funções conhecidas. Temos que a função de partição do modelo zero-dimensional $z_0(m_0, g_0)$ é dada por

$$z_0(m_0, g_0) = \left(\frac{3}{2g_0}\right)^{\frac{3}{4}} m_0^2 \Psi\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{3m_0^4}{2g_0}\right),$$

onde $\Psi(a, c; z)$ é a função hipergeométrica de segundo tipo, e estamos usando o ramo principal ("principal branch") desta função. Da expressão acima temos que existe um ponto de ramificação ("branch-point"), mas uma singularidade essencial não foi encontrada, apesar da literatura enfatizar a existência de uma singularidade essencial.

Vamos agora mostrar como este modelo zero-dimensional pode nos trazer informações sobre a estrutura de singularidades do funcional gerador das funções de Schwinger. Para isto, vamos discutir as vantagens de efetuarmos uma expansão perturbativa do funcional gerador das funções de Schwinger não-convencional, conhecida na literatura como expansão perturbativa para o acoplamento forte ("strong-coupling expansion") [144] [145], onde não é efetuada a expansão perturbativa em torno da teoria gaussiana. A idéia básica é tratarmos a contribuição gaussiana na ação como uma perturbação com respeito aos outros termos. A diferença fundamental entre esta expansão perturbativa não-convencional e a usual é que neste caso o funcional gerador das funções de Schwinger fica escrito formalmente como uma série de potências negativas da constante de acoplamento. Desta forma estamos efetuando a expansão perturbativa em torno do gerador funcional de valor independente ("independent-value functional") [146] [147] [148] [149] [150] [151]. Campos definidos em diferentes pontos do espaço euclidiano estão desacoplados em primeira ordem de aproximação, pois a contribuição que contém o gradiente aparece apenas como perturbação.

Vamos continuar a discutir as vantagens de efetuarmos uma expansão perturbativa não convencional do funcional gerador ("Schwinger functional"), conhecida na literatura como expansão perturbativa para o acoplamento forte ("strong-coupling expansion"), onde não é efetuada a expansão perturbativa em torno da teoria gaussiana. A idéia básica é tratarmos a contribuição gaussiana na ação como uma perturbação com respeito aos outros termos. Uma representação formal para o funcional de Schwinger ("Schwinger functional") $Z(h)$ é dada por

$$Z(h) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \frac{\delta}{\delta h(x)} K(m_0; x - y) \frac{\delta}{\delta h(y)}\right) Q_0(h),$$

onde $Q_0(h)$ define o gerador funcional de valor independente ("independent-value generating functional"), $h(x)$ é uma fonte externa e $K(m_0; x - y) = (-\Delta + m_0^2) \delta^d(x - y)$. É fácil mostrar que $Q_0(h)$ é dado por

$$Q_0(h) = \mathcal{N} \int [d\varphi] \exp\left(\int d^d x \left(-\frac{g_0}{4!} \varphi^4(x) + h(x)\varphi(x)\right)\right),$$

onde novamente \mathcal{N} é um fator de normalização.

Em resumo: é um fato bastante conhecido que o comportamento da expansão perturbativa convencional em potências da constante de acoplamento para os termos de altas ordens está relacionado à estrutura analítica das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento, nas vizinhanças da origem [152] [153] [154]. Conseqüentemente, um importante problema a ser investigado diz respeito ao comportamento das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento, em diferentes modelos [155] [156]. Como neste problema de encontrar a estrutura analítica das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento, nas vizinhanças da origem, entram em jogo efeitos não-perturbativos como instantons e renormalons, a expansão perturbativa convencional não nos pode ser muito útil. Nesta expansão perturbativa para o acoplamento forte ("strong-coupling expansion") podemos facilmente encontrar a estrutura analítica do funcional gerador das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento. Está claro que esta informação está contida no termo de mais baixa ordem, conhecido na literatura como gerador funcional de valor independente ("independent-value functional"). Gostaríamos de ressaltar que a inclusão de termos de mais altas ordens da série perturbativa não deve modificar esta estrutura analítica, ou apenas criar singularidades adicionais [158] [159]. Dentro deste contexto, recentemente foi estudado um oscilador com um termo quártico, na presença de um banho térmico, assumindo que este termo domina sobre o termo quadrático. Dizemos que estamos numa situação onde o acoplamento λ é forte. Utilizando-se a expansão perturbativa para o acoplamento forte, e o método da zeta espectral, é possível apresentar a energia média do sistema no regime onde o acoplamento é muito maior que a frequência até a ordem $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ [160].

9 Campos quantizados na presença de estruturas macroscópicas clássicas

Neste momento gostaríamos de discutir brevemente dois assuntos: o primeiro é o método da função zeta espectral e o segundo é a quantização estocástica. Primeiramente vamos discutir a conexão que existe entre as flutuações do vácuo ao nível de um laço e o método da zeta generalizada, que é um procedimento bastante conhecido para regularizar produtos e determinantes [165] [166]. Para este fim devemos mostrar a conexão que existe entre as flutuações do vácuo a nível de um laço e a ação efetiva a nível de um laço. Vamos considerar uma teoria escalar num espaço euclidiano d -dimensional, e construir o gerador funcional de todas as funções de Green ou funções de Schwinger.

Temos que o gerador funcional está definido por

$$Z(h) = \int [d\varphi] e^{-S[\varphi] + \int d^d x h(x)\varphi(x)},$$

onde $[d\varphi]$ é uma medida funcional apropriada, $S(\varphi)$ é a ação clássica associada ao campo escalar e $h(x)$ é uma fonte externa. Podemos definir o gerador funcional das funções conexas $W(h)$, dado por

$$W(h) = \ln Z(h).$$

Numa teoria livre tanto $Z(h)$ como $W(h)$ podem ser calculados exatamente. Vamos assumir que o campo escalar está confinado no interior de guia de ondas infinito de seção reta retangular. Na presença do guia de ondas, temos que assumir que no espaço das funções apenas aquelas que satisfazem as condições de contorno estão sendo computadas no funcional gerador. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $h = 0$. Definindo o laplaciano no espaço euclidiano d -dimensional por Δ , temos

$$Z(h)|_{h=0} = \int_{Dirichlet} [d\varphi] e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \varphi(x)(-\Delta + m^2)\varphi(x)},$$

onde "Dirichlet" significa que estamos avaliando a integral funcional com aquelas funções que satisfazem as condições de contorno. Pode-se mostrar que

$$Z(h)|_{h=0} = N \left(\det(-\Delta + m^2) \right)^{-\frac{1}{2}},$$

onde N é um fator de normalização que não contribui para a energia livre. Vamos discutir o caso quadridimensional. Vamos definir a função zeta associada a um operador diferencial de segunda ordem, elíptico e auto-adjunto $(-\Delta + m^2)$ ("second order, self-adjoint elliptic operator") definido numa variedade compacta com ou sem fronteiras. Temos que

$$\zeta_{-\Delta+m^2}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^{-2} \lambda_n)^{-s},$$

onde λ_n são exatamente os autovalores associados ao operador elíptico. Note que introduzimos uma escala μ no problema, pois a zeta espectral (zeta global) deve ser definida como uma quantidade adimensional. Se não estivermos interessados em analisar o problema de escala ("scaling") podemos fazer $\mu = 1$. No nosso problema a função zeta generalizada global é definida por

$$\zeta_{-\Delta+m^2}(s) = N' \int dk_0 \int dk_1 \sum_{n,n'=1}^{\infty} \left(k_0^2 + k_1^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'\pi}{b}\right)^2 + m^2 \right)^{-s},$$

onde N' é outro fator de normalização. Temos que

$$Z(h=0) = \exp\left(\frac{1}{2} \zeta'_{-\Delta+m^2}(0)\right),$$

onde $\zeta'(0) = \frac{d}{ds} \zeta(s)|_{s=0}$ e o operador diferencial de segunda ordem $(-\Delta + m^2)$ tem o seguinte espectro: $(k_0^2 + k_1^2 + (\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{n'\pi}{b})^2 + m^2)$, $k_0, k_1 \in \mathfrak{R}$, $n, n' \in N$. Podemos usar o mesmo procedimento para definir a zeta local, que está relacionada à ação efetiva. Temos que a zeta local pode ser escrita como

$$\zeta_{-\Delta+m^2}(s, x, y) = N' \int dk_0 \int dk_1 \sum_{n, n'=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{n\pi x}{a}) \sin^2(\frac{n'\pi y}{b})}{(k_0^2 + k_1^2 + (\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{n'\pi}{b})^2 + m^2)^s},$$

onde x e y são duas coordenadas cartesianas de um ponto do guia de ondas infinito de seção reta retangular. Temos então a expressão formal $(-1)^s (\frac{\partial}{\partial m^2})^s \langle \varphi^2(x, y) \rangle = \zeta(s, x, y)$. Rodrigues e Svaiter [161] investigaram a função de dois pontos amputada de uma teoria escalar com auto-interação, num guia de ondas com seção reta retangular. Para ser mais específico, estes autores investigaram a renormalização perturbativa de uma teoria escalar assumindo que temos quebra de invariância translacional, onde o campo escalar está confinado no interior de guia de ondas infinito de seção reta retangular. O programa de renormalização foi implementado a nível de um laço para a função de dois pontos, e a estrutura das divergências foi cuidadosamente analisada. Foi mostrada a forma exata das divergências de aresta ("edge") e de quina ("corner"), primeiramente num espaço euclidiano quadridimensional e em seguida num espaço euclidiano d -dimensional.

Em mecânica estatística iniciamos as investigações sempre com sistemas definidos num volume finito, e o volume infinito é considerado posteriormente, o que chamamos de limite termodinâmico. Por outro lado, a teoria quântica de campos deve ser descrita por um número infinito de graus de liberdade. Uma linha de pesquisa bastante promissora é o estudo de campos quantizados definidos num volume finito, desde que tenhamos um mecanismo consistente de confinar o campo, como por exemplo objetos macroscópicos clássicos onde os campos devem satisfazer determinadas condições de contorno. Se não levamos em conta condições de contorno periódicas, que já foram bastante investigadas na literatura e que não nos trazem nada de novo, vemos que existe uma necessidade fundamental de se entender a dinâmica de campos quantizados na presença de objetos macroscópicos, de forma tal que a invariância translacional da teoria tenha ficado perdida. É bastante importante saber, como se implementa a renormalização perturbativa em modelos que são perturbativamente renormalizáveis, se assumimos que temos quebra de invariância translacional. Lembremos que uma teoria é perturbativamente renormalizável se apenas um número finito de parâmetros da teoria necessitam ser renormalizados.

Segundo esta linha de raciocínio, Fosco e Svaiter [162], investigaram um modelo escalar anisotrópico num espaço euclidiano d -dimensional, onde uma das dimensões foi compactificada, com perda de invariância translacional. Nesta situação, para se implementar o programa de renormalização, dentro da teoria de perturbações, encontramos uma dificuldade que não aparece quando trabalhamos num espaço sem fronteiras. A presença de restrições geométricas tornam a avaliação dos diagramas de Feynman uma tarefa muito mais difícil do que aquela efetuada num espaço sem

fronteiras. Para sistemas onde temos a invariância translacional, podemos passar de uma representação de coordenadas para uma representação de momentos, onde fica mais simples a análise das divergências da teoria. Como no modelo estudado se perdeu a invariância translacional numa das direções, devemos trabalhar com as funções de Schwinger de n -pontos numa representação mista.

Neste trabalho o programa de renormalização foi implementado a nível de um laço para a função de dois pontos associada a campos que satisfazem condições de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente. A estrutura das divergências foi cuidadosamente analisada e foi mostrado que para estas duas condições de contorno temos apenas uma troca de sinal, na parte polar, na vizinhança das placas. O programa de renormalização implementado a nível de um laço para a função de dois pontos e quatro pontos associadas a campos que satisfazem condições de contorno de Dirichlet foi finalizado por Caicedo e Svaiter [129]. A introdução de temperatura não apresenta nenhuma dificuldade. Recentemente Svaiter [163] investigou modelos escalares da teoria quântica de campos a temperatura finita e também efeitos de superfície. Sendo mais específico, foi estudado um campo escalar num espaço euclidiano d -dimensional, onde uma das dimensões foi compactificada, com perda de invariância translacional. Na verdade foi generalizada parte dos resultados anteriores, pois foi assumida uma teoria escalar $\lambda\phi^4$ em equilíbrio com um reservatório térmico. Nesta situação, como já discutimos, a presença de restrições geométricas tornam os diagramas de Feynman muito mais complicados do que aqueles calculados num espaço sem fronteiras, com o agravante que temos também que somar sobre as frequências de Matsubara. O programa de renormalização pode ser implementado a nível de um laço para a função de dois pontos e de quatro pontos, e a estrutura das divergências também pode ser analisada. Cálculos a dois laços foram efetuados recentemente por Aparicio Alcalde e colaboradores [164].

10 O método de quantização estocástica de Parisi-Wu

Na versão euclideana da teoria de campos estamos interessados em calcular as funções de Schwinger da teoria em questão. Em 1981 Parisi e Wu [167] introduziram a quantização estocástica como uma alternativa às quantizações canônica ou por integrais de trajetória. Em linhas gerais podemos descrever o método de quantização estocástica, da seguinte forma. Por simplicidade discutiremos um campo escalar. A princípio efetuamos uma continuação analítica para tempo complexo. Desta forma obtemos a teoria de campos euclidiana. Em seguida introduzimos um parâmetro de Markov τ , chamado na literatura de tempo fictício. Assumimos que o campo euclidiano depende das coordenadas euclidianas, e deste parâmetro de Markov. Introduzimos um

ruído branco gaussiano ("a noise random field") e assumimos que o campo euclidiano satisfaz uma equação de Langevin markoviana:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \eta(\tau, x),$$

onde S é a ação euclideana do sistema. Devemos assumir também as relações de Einstein, a saber

$$\langle \eta(\tau, x) \rangle_\eta = 0,$$

e também

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau')\delta^d(x - x'),$$

onde $\langle \dots \rangle_\eta$ significa média estocástica. Pode-se mostrar que as funções de Schwinger da teoria em questão podem ser obtidas no limite assintótico, isto é, $\tau \rightarrow \infty$, onde calculamos médias estocásticas $\langle \varphi(\tau_1, x_1)\varphi(\tau_2, x_2)\dots\varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta$. Desta forma temos que:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \varphi(\tau_1, x_1)\varphi(\tau_2, x_2)\dots\varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta = \frac{\int [d\varphi] \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) e^{-S(\varphi)}}{\int [d\varphi] e^{-S(\varphi)}},$$

onde $S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_I(\varphi)$ é a ação d -dimensional. Este resultado nos leva a considerar a medida funcional como a distribuição estacionária associada a um processo estocástico. Note que a solução da equação de Langevin necessita de uma condição inicial, como por exemplo:

$$\varphi(\tau, x)|_{\tau=0} = \varphi_0(x).$$

Queremos enfatizar que a quantização estocástica introduz uma nova forma de se regularizar teorias de campo, que preserva todas as simetrias da teoria original. Existem duas formas distintas de se introduzir a regularização estocástica. A primeira é suavizar o ruído branco no funcional original [168] [169]. A outra possibilidade é modificar a equação de Langevin markoviana para uma equação de Langevin não-markoviana [170]. Recentemente Menezes e Svaiter, no trabalho [171], investigaram esta modificação. Possíveis continuações nesta linha de pesquisa são por exemplo o estudo da quantização estocástica de Parisi-Wu em teoria topológicas [172], e o estudo da equação de Langevin de Parisi-Wu em variedades riemannianas compactas sem ou com horizonte de eventos [173].

11 Conclusões

Que direções podemos esperar para a teoria quântica dos campos? Inicialmente a teoria quântica dos campos foi formulada no espaço-tempo de Minkowski, para a descrição de processos envolvendo partículas elementares, e estava bastante presa às idéias de Wigner, onde os campos aparecem como objetos no espaço das representações irredutíveis do grupo de Poincaré. A construção de modelos de campos com interação estava bastante presa também ao critério de renormalizabilidade dos modelos descrevendo as interações fundamentais. A predicabilidade da teoria quântica de campos, conectada à renormalizabilidade, fez com que construíssemos um modelo de unificação que é renormalizável. Importantes resultados em teoria quântica de campos em espaços curvos e em coordenadas curvilíneas, no espaço-tempo de Minkowski, também apareceram, e o critério de renormalizabilidade ainda estava presente neste período. Entretanto a pergunta fundamental é a seguinte: para quê a renormalizabilidade se não existe somabilidade? Basta controlarmos as nossas aproximações para termos predicabilidade.

Hoje sabemos que as séries que obtemos de uma expansão perturbativa em torno da teoria livre são séries assintóticas [159]. Vale a pena lembrar que o uso de expansões assintóticas levanta os seguintes problemas. O primeiro é a questão se uma função determinada possui uma expansão assintótica, que é conhecido na literatura como o problema da expansão ("the expansion problem"). O segundo, que é conhecido na literatura como o problema da somação ("the summation problem"), diz respeito a encontrar a função $F(x)$ cuja expansão assintótica está representada por uma série divergente. Note que se a série converge, a função $F(x)$ é definida pela própria série. A resposta a esta segunda questão não é nada trivial e até o presente momento os resultados encontrados são esparsos e poucos.

Desta forma, várias idéias de matéria condensada e física estatística penetraram na teoria dos campos e fizeram com que as perguntas mudassem de direção. Primeiramente foi introduzido o conceito de parâmetro de ordem. Estamos agora interessados em descrever a física numa determinada escala de energia integrando os graus de liberdade associados a processos numa escala de energia muito maior que aquela em que estamos interessados. As perguntas se transformaram em: qual é o parâmetro de ordem que descreve o sistema? Quais são os expoentes críticos do modelo, isto é, qual é a classe de universalidade em que o modelo se insere? A teoria dos campos passou a ser vista como uma teoria efetiva onde devemos afrouxar o critério de renormalizabilidade [138] [139] [140] [141]. Além do mais, como bem explicou Landau, a mecânica quântica é uma teoria singular, pois tem a representação clássica da realidade como limite, mas também necessita desta representação clássica, não podendo ser formulada sem esta. A teoria quântica de campos não escapa desta situação. Campos só têm sentido quando existem objetos macroscópicos clássicos presentes. Somente assim somos capazes de definir energia, momentos de uma distribuição de probabilidades, etc. A linha de pensamento seguida é mais ou menos a seguinte: faz-se necessário um profundo estudo do comportamento de campos na presença de estruturas macroscópicas. Toda a vasta literatura no efeito Casimir se insere neste contexto.

Outra linha de pesquisa bastante importante é o estudo de sistemas fora do equilíbrio. No estudo de sistemas fora do equilíbrio, devemos investigar mais profundamente a quantização estocástica, modificando a equação de Langevin markoviana para uma equação de Langevin não-markoviana para responder à seguinte pergunta: que classes de equações de Langevin generalizadas são aceitáveis, de forma que no limite assintótico recuperemos a teoria quântica dos campos? No momento ocorre com a teoria dos campos o mesmo que ocorreu na década de sessenta do século passado. Apesar de termos todos estes problemas ainda em aberto, sem solução, o interesse pela teoria quântica dos campos está decrescendo gradativamente, sendo substituída por cordas, membranas e outros objetos extensos.

A teoria das cordas clama que é um formalismo que pode ser usado num domínio de energia e distâncias onde a teoria quântica de campos falha, e que também é capaz de resolver problemas que não podem ser atacados pela teoria dos campos. Neste novo formalismo, o princípio de causalidade e as idéias da mecânica quântica são mantidos, mas trata-se de uma teoria formulada onde os objetos físicos fundamentais são entidades unidimensionais, de forma que temos uma teoria não-local. Nesta nova teoria física, as noções de espaço e tempo são totalmente revistas, enquanto que para distâncias grandes devemos recuperar a teoria quântica de campos. Apesar da teoria ser não-local, as cordas interagem localmente, preservando as conseqüências da localidade, como por exemplo a causalidade. Outro ponto bastante atrativo é que na teoria das cordas não aparecem os problemas das divergências ultravioletas, que permeiam a teoria quântica dos campos. As teorias são finitas no ultravioleta, apesar de não sabermos se métodos perturbativos sofrem do mesmo problema que encontramos na teoria dos campos perturbativa, com séries não somáveis.

Os princípios básicos da física estão sendo revistos. Se esta nova teoria descreve bem a realidade, até o presente momento não sabemos, pois esta é apenas uma possível extensão da teoria dos campos. O nosso entendimento da teoria das cordas ainda é bastante primitivo, pois nada sabemos sobre efeitos não-perturbativos e também temos que aceitar que vivemos num espaço com alta dimensionalidade, para que a teoria seja consistente matematicamente. Para finalizar gostaria de dar um argumento bastante simples que mostra que ainda temos muito o que aprender estudando a teoria quântica dos campos. Como a teoria das cordas pretende ser uma generalização da teoria quântica dos campos, para sabermos do que trata a teoria das cordas, um entendimento profundo daquilo que queremos generalizar faz-se necessário [174].

12 Agradecimentos

Gostaria de agradecer especialmente a alguns colaboradores, B. F. Svaiter, L. H. Ford, M.

Novello, A. P. C. Malbouisson, V. de Lorenci, R. de Paola, G. Anãnos e G. Flores Hidalgo por terem compartilhado comigo as preocupações científicas que me acompanharam durante todos estes anos. Eu sou imensamente grato ao Prof. Dr. J. Ribamar Saboia de Azevedo e ao Prof. Dr. H. W. Besser, que me deram todo apoio em um momento bastante crítico da minha vida.

References

- [1] *"Selected Papers on Quantum Electrodynamics"*, J. Schwinger (ed.), Dover Pub. Inc., New York (1958).
- [2] J. Glimm and A. Jaffe *"Quantum Physics, A Functional Point of View"*, Springer Verlag, New York (1981).
- [3] I. Ya. Pomeranchuk, V. Sudakov and K. Ter Martirosjan, Phys. Rev. **103**, 784 (1954).
- [4] L. D. Landau and I. Ya. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk. **102**, 489 (1955).
- [5] I. Ya. Pomeranchuk, Il Nuovo Cim. **3**, 1186 (1956).
- [6] D. J. E. Callaway, Phys. Rep. **167**, 241 (1988).
- [7] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [8] J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. **D13**, 2188 (1976).
- [9] S. A. Fulling, *"Scalar Quantum Field Theory in Closed Universe of Constant Curvature"*, Ph.D thesis, Princeton University (1972).
- [10] S. A. Fulling, Phys. Rev. **D7**, 2850 (1973).
- [11] J. von Neumann, Math. Ann. **104**, 570 (1931).
- [12] J. von Neumann, in *"Foundations of Quantum Physics"*, M. Rédei and M. Stölzner (eds.), (pp. 249-268).
- [13] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D14**, 870 (1976).
- [14] M. D. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).
- [15] S. Takagi, Progr. Theor. Phys. **88**, 1 (1986).

- [16] D. W. Sciama, P. Candelas and D. Deutsch, *Adv. Phys.* **30**, 327 (1980).
- [17] W. Rindler, *Am. J. Phys.* **34**, 1177 (1966).
- [18] G. Kalnins, *Siam Math. Ann.* **6**, 341 (1975).
- [19] L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968).
- [20] N. N. Bogoliubov, *Sov. Phys. Jept*, **7**, 51 (1958).
- [21] I. Costa and N. F. Svaiter, *Rev. Bras. Fís.* **19**, 271 (1989).
- [22] I. Costa, *J. Math. Phys.* **30**, 888 (1989).
- [23] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. Mostepanenko, *Gen. Rel. Grav.* **7**, 535 (1976).
- [24] A. A. Grib, S. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *Fort. der Phys.* **28**, 199 (1980).
- [25] C. N. Yang and D. Feldman, *Phys. Rev.* **79**, 972 (1950).
- [26] M. Novello and J. Salim, *Phys. Rev.* **D20**, 377 (1979).
- [27] I. Costa, N. Deruelle, M. Novello and N. F. Svaiter, *Class. Quant. Grav.* **6**, 1983 (1989).
- [28] N. F. Svaiter, "*Teoria Quântica de Campos em Coordenadas Curvilíneas no Espaço-tempo de Minkowski e em Espaços Curvos*", Tese de Doutorado-CBPF, (1989).
- [29] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, *Rev. Bras. Fís.* **20**, 15 (1990).
- [30] R. C. Arcuri, B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, *Mod. Phys. Lett.* **A9**, 19 (1994).
- [31] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 372 (1949).
- [32] F. Fubini, A. J. Hanson and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D7**, 1732 (1973).
- [33] A. di Sessa, *J. Math. Phys.* **15**, 1892 (1974).
- [34] C. M. Sommerfield, *Ann. Phys.* **84**, 285 (1974).
- [35] W. Dittrich and M. Reuter, "*Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*", Springer Verlag (1984).
- [36] L. H. Ford and N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D54**, 2640 (1996).

- [37] L. H. Ford and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D546**, 2226 (1997).
- [38] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wekf. **51**, 793 (1948).
- [39] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 87 (1986).
- [40] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [41] K. A. Milton, "*The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero Point Energy*", World Scientific (2001).
- [42] M. Fierz, Helv. Phys. Acta **33**, 855 (1960).
- [43] T. H. Boyer, Ann. Phys. **56**, 477 (1970).
- [44] L. H. Brown and G. J. Maclay, Phys. Rev. **D18**, 1272 (1969).
- [45] J. R. Ruggiero, A. Villani and A. H. Zimmerman, J. Phys. **A13**, 761 (1980).
- [46] E. Elizalde and A. Romeo, J. Math. Phys. **30**, 1133 (1989).
- [47] J. Ambjorn and S. Wolfram, Ann. Phys. **147**, 1 (1983).
- [48] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi and A. G. Domingues, Il Nuovo Cim. **31**, 550 (1964).
- [49] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Il Nuovo Cim. **12B**, 20 (1972).
- [50] G. Leibrant, Rev. Mod. Phys. **47**, 849 (1975).
- [51] J. S. Dowker and R. Critchley, Phys. Rev. **D13**, 3224 (1976).
- [52] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **55**, 149 (1977).
- [53] S. K. Blau, M. Visser and A. Wipf, Nucl. Phys. **B310**, 163 (1988).
- [54] D. Deutsch and P. Candelas, Phys. Rev. **D20**, 3036 (1979).
- [55] L. H. Ford and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **A62**, 062105 (2000).
- [56] A. A. Actor and I. Bender, Phys. Rev. **D52**, 3581 (1995).
- [57] F. Caruso, R. De Paola and N. F. Svaiter, Int. Jour. Mod. Phys. **A14**, 2077 (1999).
- [58] R. D. M. De Paola, R. B. Rodrigues and N. F. Svaiter, Mod. Phys. Lett. **A14**, 2353 (1999).

- [59] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **32**, 175 (1991).
- [60] H. Weyl, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, 110 (1911).
- [61] R. Courant and D. Hilbert, "*Methods of Mathematical Physics*", Interscience Publishers Inc., New York (1953), pp. 429-445.
- [62] R. Balian and C. Bloch, Ann. Phys. **60**, 401 (1970).
- [63] D. Birrel and P. C. W. Davies, "*Quantum Fields in Curved Space*", Cambridge University Press, Cambridge (1981), (pp. 194).
- [64] T. H. Boyer, Phys. Rev. **174**, 1764 (1968).
- [65] T. H. Boyer, J. Math. Phys. **10**, 1729 (1969).
- [66] B. Davies, J. Math. Phys. **13**, 1325 (1972).
- [67] F. Caruso, N. P. Neto, B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D43**, 1300 (1991).
- [68] L. E. Oxman, N. F. Svaiter and R. L. P. G. Amaral, Phys. Rev. **D72**, 125007 (2005).
- [69] N. F. Svaiter and B. F. Svaiter, J. Phys. **A25**, 979 (1992).
- [70] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D47**, 4581 (1993).
- [71] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **35**, 1840 (1994).
- [72] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D46**, 5267 (1992).
- [73] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [74] H. M. Nussenzveig, "*Introduction to Quantum Optics*", Gordon and Breach, New York (1973).
- [75] W. G. Unruh and R. Wald, Phys. Rev. **D29**, 1047 (1983).
- [76] P. Candelas and D. W. Sciama, Phys. Rev. **D27**, 1715 (1983).
- [77] V. L. Ginzburg and V. P. Frolov, Sov. Phys. Usp. **30**, 1073 (1987).
- [78] A. Einstein, Phys. Z. **18**, 121 (1917).

- [79] L. H. Ford, N. F. Svaiter and M. L. Lyra, Phys. Rev. **A49**, 1378 (1994).
- [80] T. W. B. Kibble, J. Phys. **A9**, 1387 (1976).
- [81] L. Marder, Proc. R. Soc. Lon. **A252**, 45 (1959).
- [82] B. Linet, Phys. Rev. **D33**, 1833 (1986).
- [83] A. N. Aliev and D. V. Galtsov, Ann. Phys. **193**, 142 (1989).
- [84] P. C. W. Davies and V. Sahni, Class. Quant. Grav. **5**, 1 (1988).
- [85] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Class. Quant. Grav. **11**, 347 (1994).
- [86] L. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do Campo*, Editora Mir, Moscou (1980).
- [87] G. Denardo and R. Percacci, Nuovo Cim. **48B**, 81 (1978).
- [88] J. R. Letaw and J. D. Pfautsch, Phys. Rev. **D22**, 1345 (1980).
- [89] J. R. Letaw and J. D. Pfautsch, Phys. Rev. **D24**, 1491 (1981).
- [90] J. R. Letaw, Phys. Rev. **D23**, 1708 (1981).
- [91] T. Padmanabhan, Ast. Space Scien. **83**, 247 (1982).
- [92] P. C. W. Davies, T. Dray and C. A. Manogue, Phys. Rev. **D53**, 4382 (1996).
- [93] E. H. Hill, Phys. Rev. **62**, 280 (1942).
- [94] M. G. Trocherries, Phyl. Mag. **40** 1143, (1949).
- [95] H. Takeno, Prog. Theor. Phys. **7**, 367 (1952).
- [96] V. A. De Lorenci and N. F. Svaiter, Int. J. Mod. Phys. **A14**, 717 (1999).
- [97] V. A. De Lorenci and N. F. Svaiter, Found. Phys. **29** 1253 (1999).
- [98] V. A. De Lorenci, R. De Paola and N. F. Svaiter, Class. Quant. Grav. **20**, 4241 (2000).
- [99] J. D. Jackson, Rev. Mod. Phys. **48**, 417 (1976).
- [100] J. S. Bell and J. M. Leinaas, Nucl. Phys. **B212**, 131 (1983).

- [101] J. S. Bell and J. M. Leinaas, Nucl. Phys. **B284**, 488 (1987).
- [102] K. Osterwalder and R. Schrader, Comm. Math. Phys. **31**, 83 (1973).
- [103] K. Osterwalder and R. Schrader, Comm. Math. Phys. **42**, 281 (1975).
- [104] L. H. Ford and M. Yoshimura, Phys. Lett **70A**, 89 (1979).
- [105] L. H. Ford, Phys. Rev. **D22**, 3003 (1980).
- [106] N. D. Birrel and L. H. Ford, Phys. Rev. **D22**, 330 (1980).
- [107] G. Denardo and E. Spalucci, Il Nuovo Cim. **58**, 243 (1982).
- [108] G. Denardo and E. Spalucci, Nucl. Phys. **B169**, 514 (1980).
- [109] L. H. Ford and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D51**, 6981 (1995).
- [110] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. **D8**, 3320 (1974).
- [111] M. Le Bellac, "*Quantum and Statistical Field Theory*", Oxford University Press, Oxford (1991).
- [112] J. Goldstone, Nuovo Cim. **9**, 154 (1961).
- [113] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).
- [114] A. P. C. Malbouisson and N. F. Svaiter, Physica **A233**, 573 (1996).
- [115] A. P. C. Malbouisson, B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **38**, 2210 (1997).
- [116] G. N. J. Añaños, A. P. C. Malbouisson and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **39**, 3515 (1998).
- [117] D. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3225 (1974).
- [118] C. de Calan, A. P. C. Malbouisson and N. F. Svaiter, Mod. Phys. Lett. **A13**, 1757 (1998).
- [119] J. Kapusta, D. B. Reiss and S. Rudaz, Nucl. Phys. **B263**, 207 (1986).
- [120] I. T. Drummond, R. R. Horgan, P. V. Landshoff and A. Rebhan, Nucl. Phys. **B524**, 579 (1998).
- [121] J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, Phys. Rev. **D10**, 2428 (1974).

- [122] G. N. J. Añaños, A. P. C. Malbouisson and N. F. Svaiter, Nucl. Phys. **B547**, 221 (1999).
- [123] N. F. Svaiter, Physica **A285**, 493 (2000).
- [124] G. N. J. Añaños and N. F. Svaiter, Mod. Phys. Lett. **A15**, 2235 (2000).
- [125] T. Appelquist and J. Carrazone, Phys. Rev. **D11**, 2856 (1975).
- [126] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1957).
- [127] P. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [128] K. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 774 (1975).
- [129] M. I. Caicedo and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **45**, 179 (2004).
- [130] E. V. Shuriak, Phys. Rep. **61**, 71 (1980).
- [131] L. McLerran, Rev. Mod. Phys. **58**, 1021 (1986).
- [132] A. N. Jourjine, Ann. Phys. **155**, 305 (1984).
- [133] S. Nadkarni, Phys. Rev. **D27**, 917 (1983).
- [134] S. Nadkarni, Phys. Rev. **D38**, 3287 (1988).
- [135] N. P. Landsman, Nucl. Phys. **B322**, 498 (1989).
- [136] E. Braaten and A. Nieto, Phys. Rev. **D51**, 6990 (1995).
- [137] A. Nieto, Int. J. Mod. Phys. **A12**, 1431 (1997).
- [138] J. Wudka, "A Short Course in Effective Lagrangians", Particles and Fields, Seventh Mexican Workshop, edited by A. Ayala, G. Conteras and G. Herrera, hep-ph/0002180.
- [139] A. V. Manohar, "Effective Field Theory", lectures at the Schlading Winter School (1996), hep-ph/9606222.
- [140] D. B. Kaplan, "Effective Field Theory", Seventh Summer School in Nuclear Physics: Symmetries, Seattle (1995), nuc-th/9506035.
- [141] A. Dobado, A. Gómes-Nicola, A. L. Marato and J. R. Pelaez, "Effective Lagrangians for the Standard Model", Springer Verlag (1997).

- [142] A. S. Wightman, in *"The Lesson of Quantum Theory"*, Ed. J. de Boer, E. Dal and Ulfbeck, Elsevier Science Publishers, B. V. (1986).
- [143] A. P. C. Malbouisson, R. Portugal and N. F. Svaiter, *Physica* **A292**, 485 (2001).
- [144] S. Kovesi-Domokos, *Il Nuovo Cim.* **33A**, 769 (1976).
- [145] R. Menikoff and D. H. Sharp, *J. Math. Phys.* **19**, 135 (1978).
- [146] J. R. Klauder, *Phys. Rev.* **D14**, 1952 (1976).
- [147] E. R. Caianiello, G. Scarpetta, *Il Nuovo Cim.* **22A**, 448 (1974).
- [148] E. R. Caianiello, G. Scarpetta, *Lett. Nuovo Cim.* **11**, 283 (1974).
- [149] J. R. Klauder, *Ann. Phys.* **117**, 19 (1979).
- [150] J. R. Klauder, *"Beyond Conventional Quantization"*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [151] R. J. Rivers, *"Path Integral Methods in Quantum Field Theory"*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [152] C. M. Bender and T. T. Wu, *Phys. Rev.* **D7**, 1620 (1973).
- [153] G. Parisi, *Phys. Lett.* **66B**, 167 (1977).
- [154] E. Brezin, J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D15**, 1544 (1977).
- [155] J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.* **70**, 111 (1981).
- [156] G. 't Hooft, *"Under the Spell of the Gauge Principle"*, World Scientific, (1994).
- [157] J. R. Klauder, *Acta Phys. Austr.* **41**, 237 (1975).
- [158] N. F. Svaiter, *Physica* **345A**, 517 (2005).
- [159] J. Collins, *"Renormalization"*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).
- [160] N. F. Svaiter, *Physica* **368A**, 111 (2006).
- [161] R. B. Rodrigues and N. F. Svaiter, *Physica* **A328**, 466 (2003).

- [162] C. D. Fosco and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **42**, 5185 (2001).
- [163] N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **45**, 4524 (2004).
- [164] M. Aparicio Alcalde, G. Flores Hidalgo and N. F. Svaiter, Jour. Math. Phys. **47**, 052303 (2006).
- [165] J. S. Dowker and G. Kennedy, J. Phys. **A11**, 895 (1978).
- [166] A. Voros, Comm. Math. Phys. **110**, 439 (1987).
- [167] G. Parisi and Y. S. Wu, Sci. Cin. **24**, 483 (1981).
- [168] J. D. Breit, S. Gupta and A. Zaks, Nucl. Phys. **B233**, 61 (1984).
- [169] J. Alfaro, Nucl. Phys. **B253**, 464 (1985).
- [170] Z. Bern, Nucl. Phys. **B251**, 633 (1985).
- [171] G. S. Menezes and N. F. Svaiter, pre-print CBPF-NF-025/05, hep-th/0511224, "*Stochastic quantization of $(\lambda\varphi^4)_d$ scalar theory: generalized Langevin equation with memory kernel*", a ser publicado no Physica **A** (2006).
- [172] G. S. Meneses and N. F. Svaiter, Jour. Math. Phys. **47**, 073507 (2006).
- [173] "*Stochastic quantization of $(\lambda\varphi^4)_d$ scalar theory in Kruskal spacetime*", G. S. Meneses and N. F. Svaiter, em preparação, a ser submetido para publicação.
- [174] E. Witten, Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 21 (2000).