U.PORTO
FEP FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

LICENCIATURA EM GESTÃO

1GE - MICROECONOMIA II

Ano lectivo 2008/2009

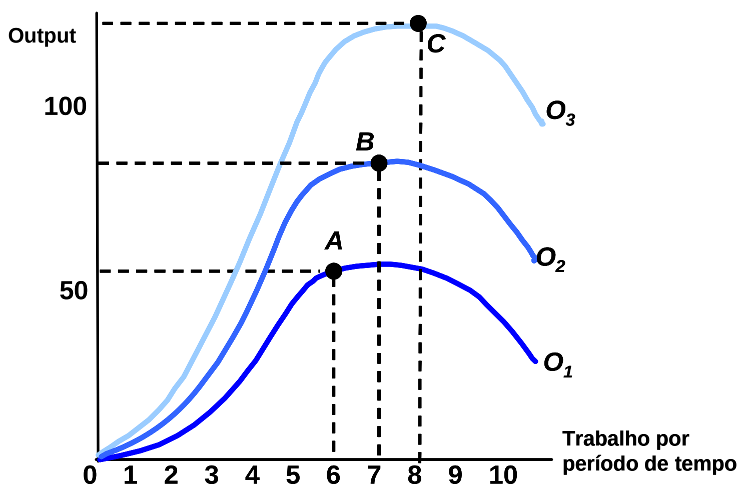
RESOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS

TEORIA DA PRODUÇÃO E DOS CUSTOS

(Em validação)

Exercício 1

Basicamente, Malthus esqueceu-se do efeito do progresso técnico sobre a produtividade total em período curto (para além do crescimento mais lento da população). Para cada nível de trabalho utilizado, é possível aumentar a produtividade total (e, logo, a produtividade média), se existir progresso técnico (algo considerado constante na lei dos rendimentos marginais decrescentes). Na figura abaixo indicada, apesar de em cada processo produtivo os pontos A, B e C representarem situações de rendimentos decrescentes do trabalho, ao passarmos de A para C, a produtividade total e média crescem pelo efeito do progresso técnico.



II – Vários estudos apontam para o facto da quantidade de informação disponível na WEB estar a crescer exponencialmente e a quantidade de informação consumida, ou seja, aquela a que o consumidor acede, cresce linearmente. Esta variante de lei de Malthus para a informação postula que a fracção da informação consumida tenderá, inevitavelmente, para zero.

a) Na lei de Malthus original, a quantidade de terra utilizada era considerada como um factor fixo, uma limitação para a produção. Neste caso, o que funciona como limitação para o consumo de informação?

A limitação é a nossa capacidade de gastar tempo a consumir informação, pelo que a nossa atenção é o factor escasso (como era a terra).

b) Sugira uma forma dos produtores de páginas WEB conseguirem ultrapassar e derrotar a lei de Malthus, evitando que a fracção da informação consumida tenda para zero.

Tal como a lei de Malthus original, o progresso técnico pode derrotar a lei de Malthus. Por exemplo, avanços que permitam aumentar as capacidades de busca da informação na WEB fazem com que a quantidade de informação a que o consumidor aceda cresça a uma taxa superior à taxa de crescimento da oferta de informação. Isso já está a ser feito, através de investigação em novos motores de busca que aprendam com os erros, ajudem a encontrar a informação e filtrá-la de acordo com as necessidades do consumidor. Outra forma referida poderia ser a de melhorar a qualidade dos sites, para que o consumidor encontre facilmente a informação que precisa.

Exercício 2

a) A relação óptima entre o número de técnicos contratados e o volume de serviços resultante designa-se de função produção.

Admitindo:

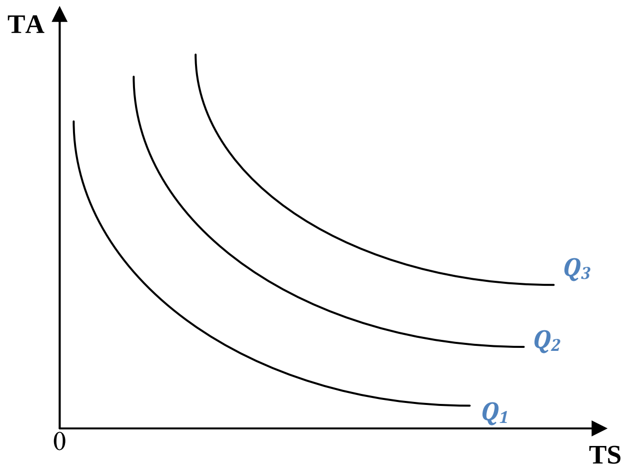
Q - montante de serviços prestados

TS - número de técnicos superiores

TA - número de técnicos auxiliares

Será uma relação do tipo Q = f (TS , TA), traduzindo o montante máximo de serviços prestados que pode ser obtido a partir de cada combinação dos dois factores produtivos (técnicos superiores e técnicos auxiliares), dado o nível tecnológico existente. A função produção traduz, pois, uma relação física/técnica: não relaciona valores mas sim quantidades/montantes de serviços prestados com quantidades de factores produtivos (número de técnicos superiores e número de técnicos auxiliares).

b) A representação gráfica de uma tecnologia baseada em dois factores produtivos pode ser concretizada através de um mapa de isoquantas. Cada isoquanta reúne o conjunto das combinações entre técnicos superiores e técnicos auxiliares que permitem alcançar, de forma óptima, o mesmo montante de serviços prestados. O conjunto das isoquantas desta empresa designa-se mapa de isoquantas.



A assumpção de que as isoquantas são negativamente inclinadas resulta do facto de haver substituibilidade entre técnicos auxiliares e técnicos superiores: por exemplo, se forem utilizados mais técnicos superiores, então, para manter o mesmo montante de serviços prestados, terão que ser utilizados menos técnicos.

O pressuposto de que ambos os factores produtivos exibem rendimentos marginais decrescentes (a utilização sucessiva de um técnico adicional, mantendo constante o número de técnicos da outra categoria, conduz a aumentos sucessivamente menores no montante de serviços prestados) exige que seja necessário abdicar de um número decrescente de técnicos de uma categoria para utilizar um técnico adicional da outra categoria e manter o mesmo montante de serviços prestados, o que quer dizer que a taxa marginal de substituição técnica é decrescente ao longo da isoquanta e, portanto que a substituibilidade é imperfeita. Logo, as isoquantas são estritamente convexas em relação à origem.

O facto de as isoquantas não se intersectarem decorre do facto de uma determinada combinação de técnicos das duas categorias não poder originar dois montantes de serviços prestados distintos.

Por último, o facto de se admitir que ambos os tipos de técnicos são efectivamente factores produtivos, isto é, que a respectiva produtividade marginal é positiva, conduz à conclusão de que quanto mais afastadas da origem estiveram as isoquantas, maior o montante de serviços prestados: um maior número de pelo menos uma das categorias de técnicos gera necessariamente mais serviços prestados.

c) O problema da empresa consiste em maximizar o volume de serviços prestados, para um determinado orçamento, dado o nível tecnológico e dados os salários das duas categorias de técnicos. A solução consiste em determinar o número óptimo dos dois tipos de técnicos a utilizar.

Analiticamente

$$\text{Max}_{TS,TA}\, Q = f(TS\ ,\ TA) \qquad \text{s. a} \qquad CT = P_{TS}TS + P_{TA}TA$$

Solução:

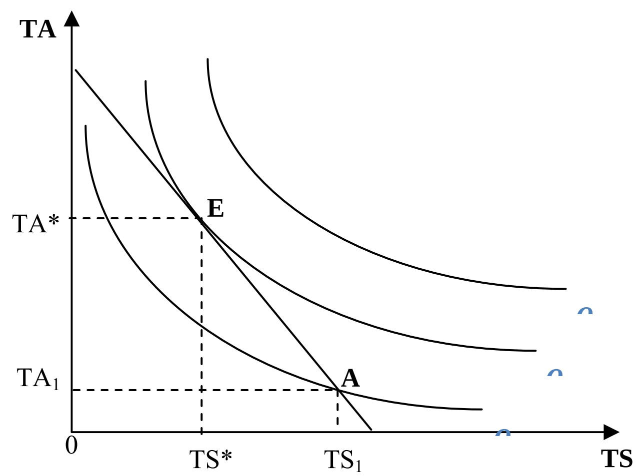
$$\begin{cases} TMST_{TS}{}^{TA} = \dfrac{P_{TS}}{P_{TA}} \\ CT = P_{TS}TS + P_{TA}TA \end{cases}$$

Como o que se está a verificar é que $Pmg_{TS} = 1{,}5Pmg_{TA}$ e $P_{TS} = 2P_{TA}$:

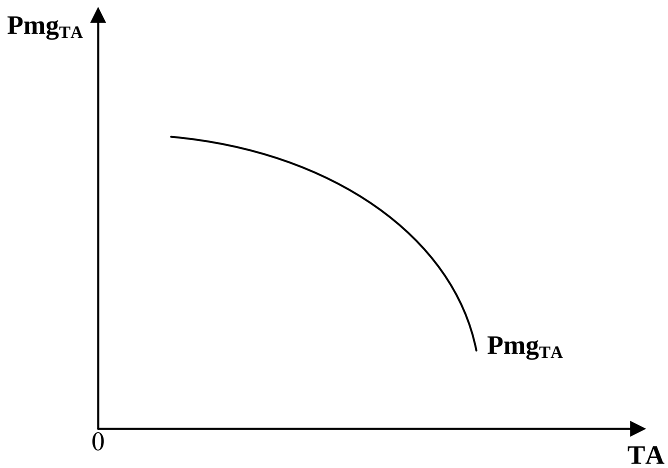
$TMST_{TS}{}^{TA} < \dfrac{P_{TS}}{P_{TA}} \Leftrightarrow \dfrac{Pmg_{TS}}{Pmg_{TA}} < \dfrac{P_{TS}}{P_{TA}} \Leftrightarrow \dfrac{Pmg_{TS}}{P_{TS}} < \dfrac{Pmg_{TA}}{P_{TA}}$ O acréscimo de serviços prestados por unidade monetária gasta na contratação do último técnico superior é menor do que o acréscimo de serviços prestados por unidade monetária gasta na contratação do último técnico auxiliar. Logo, a empresa, enquanto agente económico racional, deve desafectar sucessivamente orçamento de técnicos superiores para técnicos auxiliares, até se restabelecer a igualdade. Tal tenderá a verificar-se porque, à medida que vão sendo utilizados mais técnicos auxiliares, a sua produtividade marginal tenderá a diminuir e, à medida que vão sendo utilizados menos técnicos superiores, a sua produtividade marginal tenderá a aumentar.

<u>Graficamente</u>

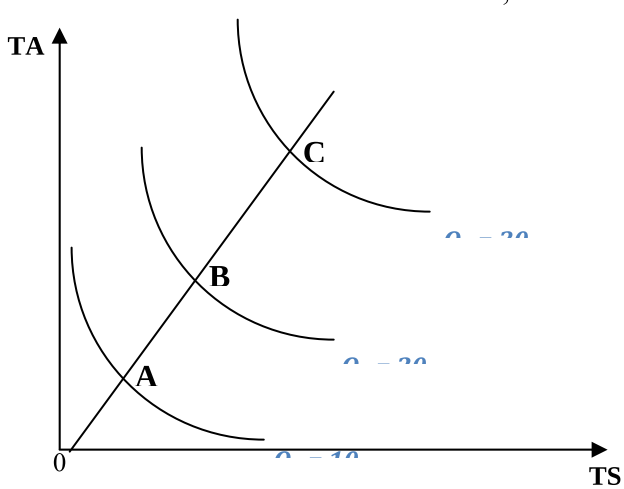
A empresa estaria inicialmente na situação A, conseguindo alcançar um montante de serviços prestados de Q_1 mas procedendo à reafectação referida poderia alcançar alcançar um montante de serviços prestados superior (Q_2), atingindo a situação de equilíbrio (E).



d) Os rendimentos decrescentes numa das categorias de técnicos ocorrem quando a utilização sucessiva de um técnico adicional, mantendo constante o número de técnicos da outra categoria, conduz a aumentos sucessivamente menores no montante de serviços prestados. Trata-se de uma análise em contexto de curto prazo, já que pressupõe apenas um factor produtivo variável e os restantes fixos. Por exemplo, caso a empresa decida contratar sucessivamente mais técnicos auxiliares, mantendo o número de técnicos superiores, cada técnico auxiliar adicional tenderá a ser menos produtivo que o anterior uma vez que tenderá a realizar tarefas habitualmente atribuídas a técnicos superiores. Graficamente, a função produtividade marginal dos técnicos auxiliares seria decrescente, à medida que aumenta o número de técnicos auxiliares utilizados.



Os rendimentos à escala enquadram-se num contexto de longo prazo, uma vez que pressupõem o aumento de todos os factores produtivos e na mesma proporção. Se esse aumento na escala de produção originar um aumento do montante de serviços prestados numa proporção inferior, a função produção exibe rendimentos decrescentes à escala. Assim, se por exemplo, a empresa triplicar o número de técnicos de ambas as categorias e o montante de serviços prestados apenas duplicar, observam-se rendimentos decrescentes à escala. Graficamente, com AO < AB < BC:



e) O plano de formação tornará os técnicos mais produtivos, o que num contexto de curto prazo corresponderia a uma alteração na função produtividade média respectiva: o mesmo número de técnicos de uma dada categoria, mantendo o número de técnicos da outra categoria constante, permitiria alcançar um montante de serviços prestados superior. Em período longo, cada combinação de técnicos de ambas as categorias permitiria alcançar um montante de serviços prestados superior. Assim, a relação óptima entre o número de técnicos contratados e o volume de serviços resultante altera-se e, consequentemente, o mapa das isoquantas também. Assim, com o mesmo orçamento, a empresa conseguirá alcançar um volume de produção superior.

<u>Exercício 3</u>

1.a) Um factor fixo é aquele cuja quantidade não pode ser ajustada pela empresa num determinado horizontal temporal, definido como o período curto associado a esse factor produtivo. Tal significa que, mesmo que a empresa pretenda alterar o volume de serviços prestados, terá que o fazer alterando outros factores produtivos, pois nesse horizonte temporal não pode alterar a extensão da linha do caminho-de-ferro.

1.b) No curto prazo, as alterações ocorridas no custo total resultam apenas de alterações no custo variável e, admitindo que os preços dos factores produtivos são constantes, de alterações na quantidade utilizada dos factores variáveis. Ora, se um aumento do montante de serviços prestados (volume de produção) provoca um aumento no custo variável total numa menor proporção, significa que quer o custo marginal quer o custo variável médio decrescerão. Por outro lado, tal significa que, para se conseguir aumentar o montante de serviços prestados em 10%, a quantidade média dos factores produtivos variáveis apenas teve que aumentar 3,98%, reflectindo-se num decréscimo num aumento da produtividade média.

1.c) Um aumento do número de milhas de caminho-de-ferro só se verificará no longo prazo mas, após essa alteração, no curto prazo volta a ser um factor fixo. É, por isso, possível comparar a situação actual de curto prazo com uma outra situação hipotética de curto prazo caracterizada por uma quantidade de factor fixo superior. Ora, assumindo que há substituibilidade entre os factores produtivos e que os preços dos factores produtivos são constantes, é natural que aumentando a quantidade de um factor fixo, a quantidade necessária dos factores variáveis para se alcançar um determinado volume de serviços prestados seja menor do que inicialmente, daí a redução no custo variável total. Para obter cada montante de serviços prestados, há uma maior quantidade do factor fixo que pode ser combinada com uma quantidade menor de factores variáveis.

2.a) A análise do tipo de rendimentos à escala exige uma variação na escala de produção, isto é, uma variação da quantidade de todos os factores produtivos na mesma proporção. Logo, pressupõe um contexto de longo prazo. Se, no longo prazo, o custo médio é decrescente na fase relevante da produção significa que o custo total cresce numa proporção inferior àquela em que cresce o volume de produção. Como o custo total é uma função linear das quantidades dos factores produtivos, admitindo que os preços dos factores produtivos são constantes, o volume de produção aumenta numa proporção superior à proporção em que aumenta a escala de produção. Logo, a função de produção exibe rendimentos crescentes à escala.

2.b) As razões para a existência de rendimentos crescentes à escala são:

- Indivisibilidades técnicas: para escalas de produção reduzidas, a empresa pode ser forçada a utilizar factores produtivos menos eficientes, porque os recursos mais eficientes podem só estar disponíveis para escalas de produção maiores (por exemplo, pode não ser possível ajustar a dimensão das carruagens a viagens com volume de tráfico reduzido e assim haverá sublotação das mesmas).
- Divisão do trabalho/especialização: à medida que a escala de produção aumenta, pode ser possível especializar o factor trabalho (maquinistas, mecânicos, administrativos), com ganhos de eficiência e redução nos desperdícios de alternar entre tarefas.
- Relações geométricas: por exemplo, duplicar as paredes de um vagão, quadruplica a área disponível de transporte.
- Stocks (*inventories*): normalmente, o stock óptimo (em termos de vagões, carruagens) aumenta menos do que proporcionalmente que o volume de produção.

Exercício 4

Considere a seguinte função de produção relativa ao fabrico de um certo bem:

$$Q = 4K^{3/4}L^{1/2}$$

Os preços unitários dos factores K e L são, respectivamente, de 2 e de 1 u.m.

a) Que tipo de rendimentos técnicos à escala exibe a função de produção deste bem?

$Q = 4K^{3/4}L^{1/2} \Rightarrow Q' = 4(\lambda K)^{3/4}(\lambda L)^{1/2} \Rightarrow Q' = \lambda^{5/4}Q$ Logo, a quantidade produzida varia numa proporção superior à que ocorre na escala de produção, pelo que se verificam rendimentos crescentes à escala.

b) Considere um período curto caracterizado pela utilização de 25 unidades do factor K. Calcule as funções de produtividade média e marginal do factor L , relacione-as e esboce as curvas de custo respectivas.

$Q = 4(25)^{3/4} L^{1/2} = 44{,}7L^{1/2}$ $\quad$ $PmgL = 22{,}36L^{-1/2}$ $\quad$ $PmdL = 44{,}7L^{-1/2}$

São ambas funções decrescentes como L. Como $PmgL = P_L/Cmg$ e $PmdL = P_L/CVM$

As funções CVM e Cmg são sempre crescentes, pelo que o custo total cresce a ritmos crescentes. Ora, como o CFM é sempre decrescente, para volumes de produção menores, o CTM deverá ser decrescente, para depois se tornar crescente quando a evolução do CVM mais do que compensar a evolução do CFM.

c) Determine a expressão analítica da linha de expansão.

$$TMST^{K}{}_{L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{2K^{3/4}L^{-1/2}}{3K^{-1/4}L^{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2K}{3L} = \frac{1}{2} \Rightarrow K = (3/4)L$$

d) Determine a expressão da função custo total de período longo.

$$TMST^{K}{}_{L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow K = (3/4)L$$

$CT = P_L L + P_K K \Rightarrow CT = L + 2K \Rightarrow CT = (5/2)L \Rightarrow CT \approx Q^{4/5}$

$Q = 4K^{3/4}L^{1/2} \Rightarrow Q = 3{,}224L^{5/4} \Rightarrow L = Q^{4/5} / 2{,}55$

e) Para que níveis de output os custos de período curto são inferiores, iguais ou superiores aos de período longo?

Em período curto:

$Q = 4(25)^{3/4} L^{1/2} = 44{,}7L^{1/2}$

$CT = P_L L + P_K K \Rightarrow CT = L + 2(25) = L + 50 = Q^2 / 2000 + 50$

O custo de período curto nunca será menor que o custo de período longo e serão iguais apenas quando se estiver a utilizar a dimensão óptima. O volume de produção correspondente designa-se de volume de produção típico.

$CTM_{PL} = CTM_{PC} \Rightarrow Q^{-0,2} = Q / 2000 + 50 / Q \Rightarrow 316{,}25$

Exercício 5

Seja a função de produção: $Q = 2\sqrt{KL}$ e considere que os preços unitários dos factores L e K são, respectivamente, de 9 e de 4 u.m.

a) Calcule as quantidades óptimas de factores que o empresário deverá utilizar para produzir um volume de produção de 100 unidades de produto.

Trata-se de um problema de optimização: minimizar o custo total para um volume de produção de 100 unidades.

$$TMST^{K}{}_{L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{4} \Rightarrow L = 4/9K \Rightarrow L = 33{,}3(3)$$

$$Q = 100 \Rightarrow 2L^{0,5}K^{0,5} = 100 \Rightarrow 1{,}3(3)K = 100 \Rightarrow K = 75$$

Esta é a combinação que permite produzir 100 unidades, minimizando custo total (CT = 600), dados a tecnologia e os preços dos factores produtivos.

b) Após ter realizado esse cálculo, o empresário constata que apenas pode gastar 504 u.m. na aquisição dos factores de produção. Qual será então a combinação óptima de K e L e o volume de produção correspondente que poderá obter?

Trata-se de um problema de optimização: maximizar o volume de produção para um custo total de 504 unidades monetárias.

$$TMST^{K}{}_{L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{4} \Rightarrow L = 4/9K \Rightarrow L = 28$$

$$CT = P_L L + P_K K \Rightarrow 504 = 9L + 4K \Rightarrow 504 = 4K + 4K \Rightarrow K = 63$$

$$Q = \overline{Q} \Rightarrow 2L^{0,5}K^{0,5} = 2(28)^{0,5}(63)^{0,5} = 84$$

Esta é a combinação que permite maximizar o volume de produção, dados o custo total de 504 u.m.., a tecnologia e os preços dos factores produtivos.

c) Determine a expressão analítica da linha de expansão e explique o seu significado económico.

Linha de expansão de período longo: $TMST^{K}{}_{L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{4} \Rightarrow L = 4/9K \Rightarrow K = 9/4L$

Traduz o conjunto das combinações óptimas dos dois factores produtivos, dada a tecnologia e a razão dos preços dos factores produtivos; corresponde às combinações que permitem produzir cada volume de produção ao menor custo.

d) Suponha, apenas para a resolução desta alínea, que o preço do factor L aumenta para 16 u.m. e que a empresa tenciona vender 100 unidades de produto.

d1) Compare as produtividades marginais ponderadas dos factores e explique o seu significado económico.

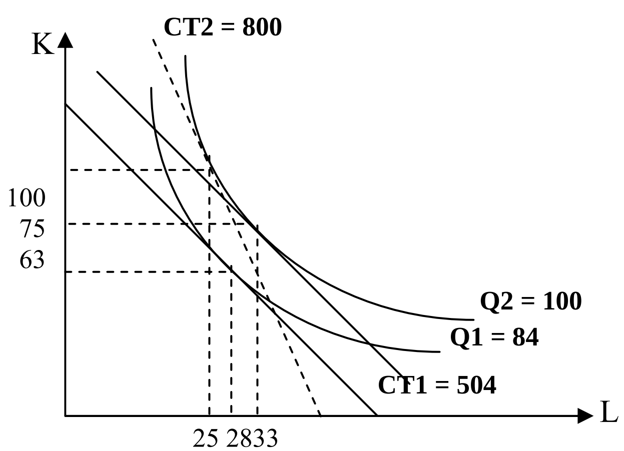
Aos novos preços e caso a empresa não proceda a ajustamentos:

$$TMST^K{}_L < \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{Pmg_L}{P_L} < \frac{Pmg_K}{P_K} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{K}{L}}}{16} < \frac{\sqrt{\frac{L}{K}}}{4} \Rightarrow 0{,}09375 < 0{,}16667$$

Perante o aumento do preço do factor produtivo L, caso o empresário não ajuste as quantidades utilizadas dos factores produtivos, o acréscimo de produção proporcionado por unidade monetária gasta na aquisição de uma unidade adicional do factor produtivo L passará a ser inferior ao acréscimo de produção proporcionado por unidade monetária gasta na aquisição de uma unidade adicional do factor produtivo K. Por outro lado, sem ajustamentos na quantidade utilizada dos factores produtivos e perante o aumento no preço do factor produtivo L, o custo de produção aumentará.

d2) Mostre que esta empresa terá vantagens em proceder a ajustamentos em período longo e determine a nova linha de expansão. Represente graficamente a situação anterior e posterior a esta alteração.

Logo, o empresário deve diminuir L e/ou aumentar K até que a igualdade se volte a estabelecer, o que tenderá a acontecer porque a PmgL aumentará e/ou a PmgK diminuirá.



Linha de expansão de período longo: $TMST^K{}_L = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{16}{4} \Rightarrow L = 1/4K \Rightarrow K = 4L$

$Q = 100 \Rightarrow 2L^{0,5}K^{0,5} = 100 \Rightarrow L = 25 \wedge K = 100$

e1) Se a empresa decidir aumentar em 50% a quantidade utilizada de ambos os factores de produção, qual é o aumento correspondente na quantidade produzida? Que conclui quanto ao tipo de rendimentos à escala associados a esta função de produção? Justifique.

$Q_1 = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow Q_1' = 2(\lambda L)^{0,5}(\lambda K)^{0,5} = \lambda Q_1$ A função produção exibe rendimentos constantes à escala, pelo que o volume de produção também aumentará em 50%.

e2) E se a empresa decidir aumentar apenas a quantidade usada de factor trabalho em 50%? Que conceito utilizou?

O efeito na quantidade produzida de um aumento na quantidade utilizada de apenas um factor produtivo, mantendo os restantes constantes, permite averiguar se os rendimentos marginais desse factor (isto é, a respectiva produtividade marginal) são crescentes, constantes ou decrescentes.
$PmgL = L^{-0,5}K^{0,5}$, cuja segunda derivada é negativa, indicando que, à medida que L aumenta, a produtividade marginal decresce, isto é, os acréscimos na produção são cada vez menores, verificando-se rendimentos marginais decrescentes no factor L.
A elasticidade do produto total permite complementar esta resposta:

$E^Q_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \frac{Pmg_L}{Pmd_L} = \frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{2L^{-0,5}K^{0,5}} = 0,5$ Assim, uma variação de 1% na quantidade utilizada do factor produtivo L, mantendo-se tudo o resto constante, conduz a uma variação de 0,5% na quantidade produzida, pelo que se a quantidade do factor L aumentar em 50%, a quantidade produzida aumentará numa proporção inferior.

f) Determine a função custo total de período longo da empresa. Explique o seu significado económico. Qual a influência do tipo de rendimentos à escala associados a esta função de produção sobre a função custo total de período longo determinada?

$TMST^K_L = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{4} \Rightarrow L = 4/9K \Rightarrow K = 9/4L$

$Q_1 = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow Q_1 = 3L^{0,5}L^{0,5} = 3L$

$CT = P_LL + P_KK \Rightarrow CT = 9L + 4K \Rightarrow CT = 9L + 4K \Rightarrow CT = 18L \Rightarrow CT = 6Q$

Uma vez que a função produção exibe sempre rendimentos constantes à escala, o custo médio será constante, pelo que o custo marginal também e o custo total crescerá a um ritmo constante.

g) Suponha que o empresário está limitado, no período em análise, a utilizar uma quantidade de factor K = 64. Determine a função custo total de período curto da empresa. Explique o seu significado económico.

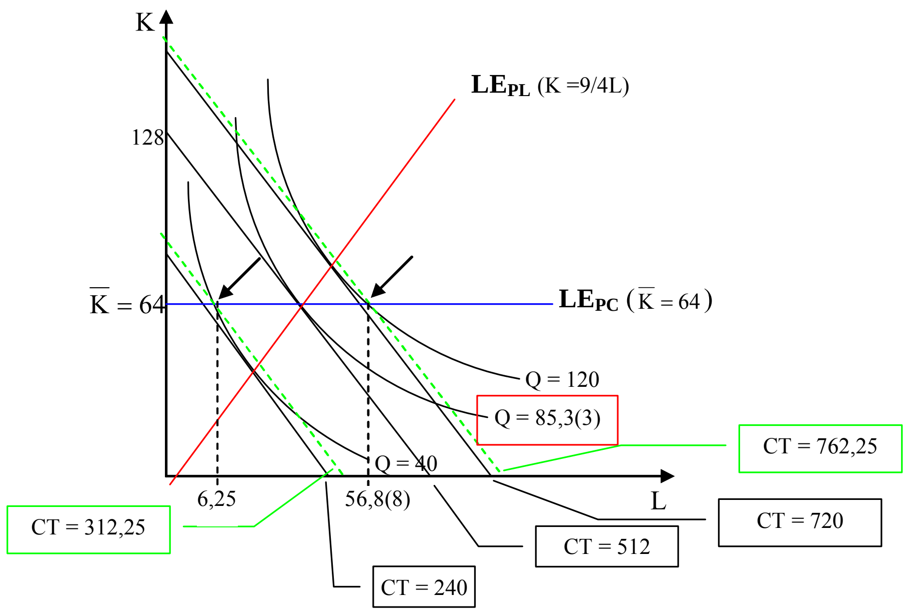
$Q_1 = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow Q_1 = 2L^{0,5}64^{0,5} = 16L^{0,5} \Rightarrow L = Q^2/256$

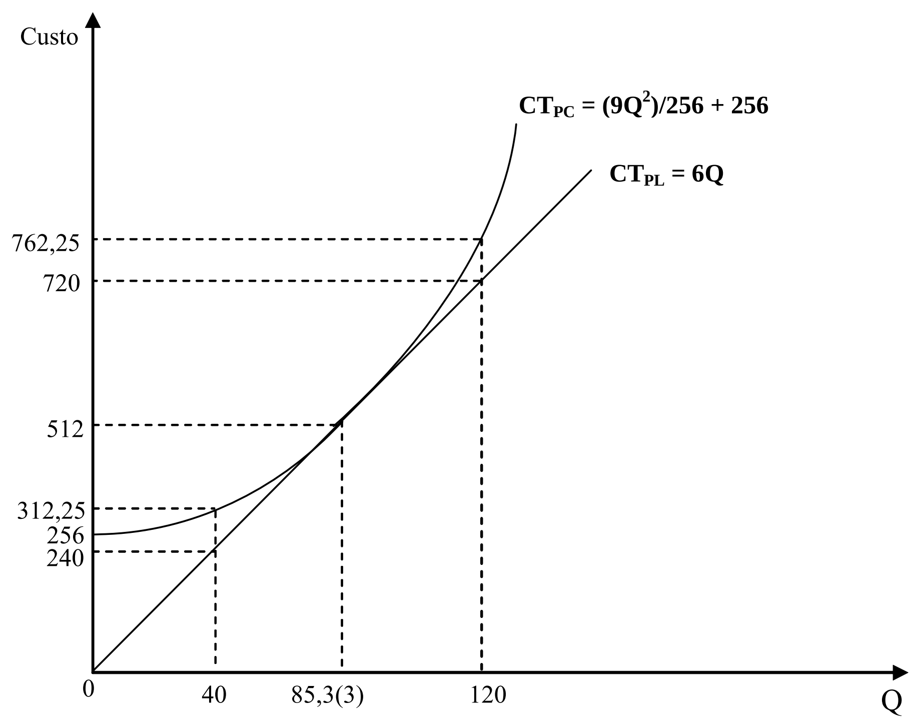
$CT = P_LL + P_KK \Rightarrow CT = 9L + 4(64) \Rightarrow CT = 9L + 256 \Rightarrow CT = (9Q^2)/256 + 256$ Esta função traduz o mínimo custo total associado a cada volume de produção, dados o montante de K e os preços dos factores produtivos.

h) Para que nível de output os custos obtidos em período curto são iguais aos de período longo?

O volume de produção típico ocorre quanto o custo médio de período longo é igual ao custo médio de período curto: $CTM_{PL} = CTM_{PC} \Rightarrow 6 = (9Q)/256 + 256/Q \Rightarrow Q = 85,3(3)$

Adenda: Represente graficamente as linhas de expansão de período curto e de período longo e as funções custo total de período curto e de período longo.





Exercício 6

Suponha que as condições técnicas de produção do bem X são traduzidas pela seguinte expressão:

$$X = K^{1/4}L^{1/4}$$

onde L representa horas de trabalho e K as horas-máquina. Suponha ainda que os preços de uma hora de trabalho e de uma hora-máquina são, respectivamente, de 1 e de 4 unidades monetárias.

a) Deduza a expressão da função custo total na hipótese de total ajustamento da empresa ao volume de produção.

Pretende-se a função custo total de longo prazo. Expressão geral da $TMST^{K}{}_{L} = \frac{Pmg_L}{Pmg_K} = K/L$. Logo, em equilíbrio, $K/L = ¼ \Rightarrow L = 4K \Rightarrow X = 4^{1/4}K^{1/2} \Rightarrow K = X^2/2$.

Como $CT = P_L L + P_K K = 8K \Rightarrow CT = 4X^2$

b) Relacione o tipo de rendimentos à escala associados à função produção com as economias de escala associadas à função custo.

Trata-se de uma função que exibe rendimentos decrescentes à escala. Se a escala de produção variar na proporção λ, o volume de produção varia na proporção $\lambda^{1/2}$. Assim, o custo total varia numa proporção (λ) menor do que aquela em que varia o volume de produção, pelo que o custo médio será crescente. Se assim é, o custo marginal também o será.

c) Suponha que a função de produção apresentada corresponde a uma empresa de consultadoria que resolve "oferecer" estágios não remunerados a estudantes de economia, gestão, secretariado, etc. que desejem ganhar experiência. Com esse estágio a empresa consegue reduzir o preço do factor trabalho em 50%. Em que medida seriam os seus resultados e análises afectados por esta nova hipótese?

Expressão geral da $TMST^{K}{}_{L} = K/L$ e $P_L = 0$. Em equilíbrio, $TMST^{K}{}_{L} = 0 \Rightarrow Pmg_L = 0$

Como $PmgL = (1/4)K^{1/4}L^{-3/4}$ A produtividade marginal de L é sempre decrescente, à medida que L aumenta, não se tornando nula, pelo deve ser utilizada toda a quantidade do factor trabalho disponível no mercado.

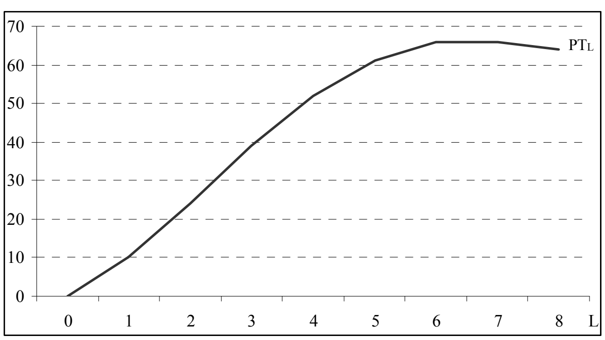
Exercício 7[1]

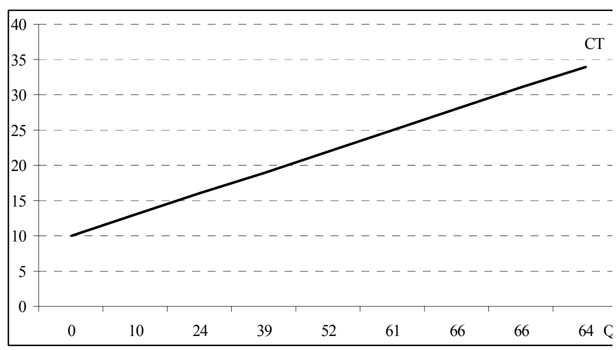
A produção de um bem Q é efectuada através da utilização de dois factores: trabalho (L) e terra (T). A quantidade deste último está fixada em $T=T_0$ e a produção de Q em função de L é dada no quadro seguinte:

Número de unidades de L	Quantidade produzida de Q	PmdL	PmgL	CF	CV	CT
0	0	-	-	10	0	10
1	10	10	10	10	3	13
2	24	12	14	10	6	16
3	39	13	15	10	9	19
4	52	13	13	10	12	22
5	61	12,2	9	10	15	25
6	66	11	5	10	18	28
7	66	9,4	-	10	21	31
8	64	8	-2	10	24	34

O custo total de utilização do factor T é de 10 u.m. e o preço de cada unidade de factor L é de 3 u.m..

a) Represente graficamente as curvas de produtividade total do factor L e de custo total do bem Q.





b) A partir dos valores do custo total e da produtividade total de L, deduza as correspondências que existem, por um lado, entre os custos médios (custo fixo médio, custo variável médio e custo médio total) e a produtividade média e, por outro, entre o custo marginal e a produtividade marginal, considerando a zona em que a produtividade total é crescente.

Em termos discretos: $Pmg_L = \frac{\Delta PT_L}{\Delta L} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{P_L(\Delta Q)}{\Delta(LP_L)} = P_L \frac{\Delta Q}{\Delta CV} = \frac{P_L}{Cmg}$

[1] PERCHERON, Serge, *op. cit.*,Exercício VI-4, p.140.

Para um volume de produção até 3, a produtividade total de L cresce a ritmos crescentes e, portanto, a produtividade marginal de L é crescente. Assim, para se produzir uma unidade adicional de produto são necessárias cada vez menos unidades de L, logo o custo total cresce a ritmos decrescentes, isto é, o custo marginal é decrescente. Para volumes de produção entre 3 e 7, a produtividade total de L cresce a ritmos decrescentes e, portanto, a produtividade marginal de L é decrescente. Assim, para se produzir uma unidade adicional de produto são necessárias cada vez mais unidades de L, logo o custo total cresce a ritmos crescentes, isto é, o custo marginal é crescente.

$Pmd_L = \frac{PT_L}{L} = \frac{Q}{L} = \frac{P_L Q}{P_L L} = P_L \frac{Q}{CV} = \frac{P_L}{CVM}$ O custo variável médio é decrescente enquanto PmdL é crescente; atinge o mínimo quando a PmdL é máxima e torna-se crescente quando PmdL for decrescente. Assim, o comportamento do custo variável médio está directamente relacionado com o comportamento da PmdL.

Exercício 8[2]

Uma empresa produtora do bem Q possui a seguinte função custo de período curto:

$$CT = 15Q - 6Q^2 + Q^3 + 2$$

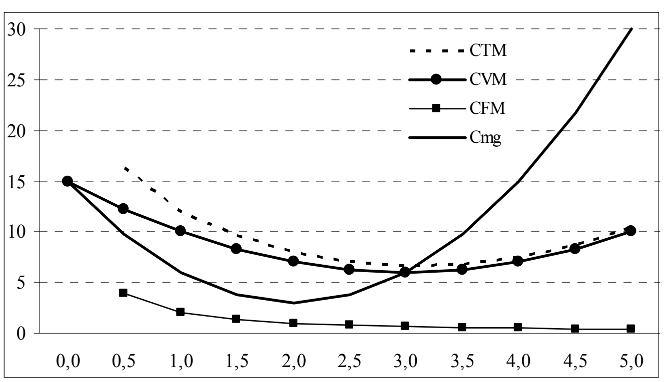
a) Determine a expressão das seguintes funções de custo: CFT, CFM, CTM, CVT, CVM, CMg.

$CFT = 2$ $CFM = 2/Q$

$CVT = 15Q - 6Q^2 + Q^3$ $CTM = 15 - 6Q + Q^2 + 2/Q$ (mínimo para Q=3,1)

$CVM = 15 - 6Q + Q^2$ (mínimo para Q=3) $Cmg = 15 - 12Q + 3Q^2$ (mínimo para Q=2)

b) Determine os pontos característicos de cada uma dessas funções e faça a sua representação gráfica.



[2] PERCHERON, Serge, *op. cit.*,Exercício VI-7, p.141

Exercício 9

Uma empresa para obter um dado produto à custa de um factor fixo e de um factor variável suporta despesas totais expressas em milhares de u.m. e representadas por:

$$50 + 4x - x^2 + 4x^3$$

onde x designa o volume de produção em toneladas.

a) Qual é o montante de despesas constantes? Justifique.

As despesas constantes, designadas de custo fixo, são de 50 u.m.. Trata-se da parcela de custo que a empresa tem que suportar mesmo que não produza o bem.

b) Preencha o seguinte quadro:

Vol. Prod.	1	2
CVM	7	18
CFM	50	25
CTM	57	43
CMg	14	48

$CVM = 4 - x + 4x^2$ $CFM = 50/x$ $CTM = 50/x + 4 - x + 4x^2$ $CMg = 4 - 2x + 12x^2$

c) Atendendo aos dados do problema e aos resultados da alínea anterior, diga, justificando as suas respostas,

c1) se o CTM mínimo corresponde a um volume de produção superior ou inferior a uma tonelada;

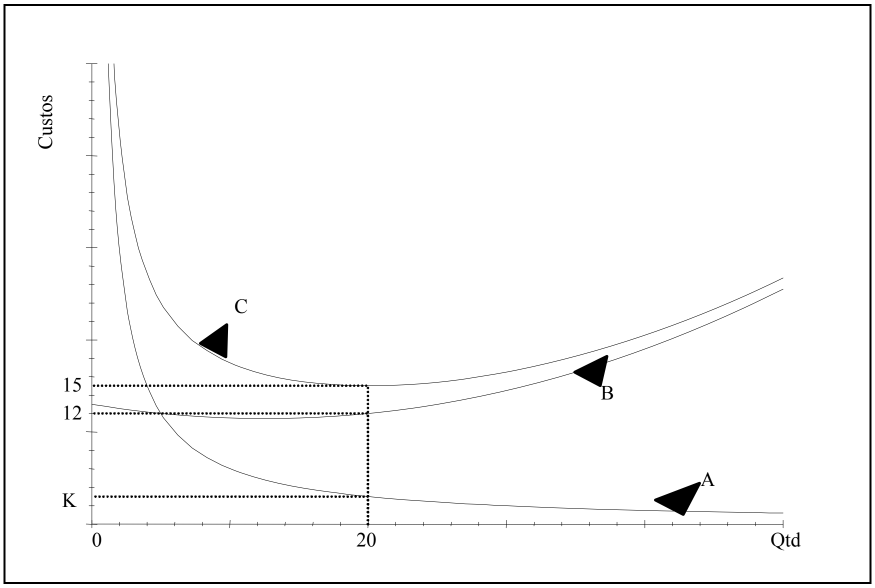
Para x = 1, o custo de produzir uma unidade adicional (CMg) é inferior ao custo total médio, logo o custo total médio ainda não atingiu o mínimo; em X=2, pelo contrário, já o ultrapassou. Assim, o mínimo do CTM ocorrerá para um volume de produção entre 1 e 2.

c2) idem, para o CVM mínimo.

Para x = 1, o custo de produzir uma unidade adicional (CMg) é superior ao custo variável médio, logo já se ultrapassou o mínimo do custo variável médio.

Exercício 10

Considere o seguinte gráfico:



a) Identifique as curvas nele representadas.

Com base na ordenada na origem decrescente; CTM, CVM e CFM.

b) Quantifique K.

K = CFM (Q=20) = CTM (Q = 20) - CFM (Q = 20) = 15 -12 = 3

c) Determine o montante de despesas constantes.

CFM (Q = 20) = 3 $\Rightarrow$ CF = 3*20 = 60

d) Para PT = 20, calcule o valor total das despesas variáveis.

CV (Q = 20) = CVM (Q = 20) * Q = 12*20 = 240

e) Demonstre que no mínimo custo total médio este é igual ao custo marginal.

Enquanto produzir uma unidade adicional do bem proporcione um acréscimo no custo total (custo marginal) menor que o custo por unidade produzida (custo total médio), este último diminuirá; a partir do volume de produção em que o custo marginal supere o custo médio, este passará a crescer. Assim, no mínimo do custo médio, as duas funções terão o mesmo valor.

f) Determine um possível valor do custo marginal para PT = 25.

Para PT = 20, ocorre o mínimo do custo total médio, pelo que CMg (Q = 20) = 15. Assim, para PT = 25, Cmg será necessariamente superior a 15.

Exercício 11

Uma empresa para obter um dado produto suporta despesas totais representadas, em milhares de u.m., pela expressão:

$$150 + 15x + \frac{3}{2}x^2$$

onde x exprime o volume de produção em toneladas.

a) A função dada refere-se a um período curto ou longo? Justifique.

Trata-se de uma função custo de período curto uma vez que há uma parcela dos custos que não depende do volume de produção, tendo que ser suportada mesmo que não se produza nada: custo fixo.

b) Sabendo que o preço unitário do factor variável é de 15 u.m., determine quantas unidades desse factor se devem combinar com a quantidade fixa do outro factor de modo a obter o produto ao custo de produção mais baixo.

Mínimo CTM = $1{,}5x + 15 + 150/x \Rightarrow x = 10$

CT (x=10) = $450 = P_L L + P_K K = 15L + 150 \Rightarrow L = 20$

c) Qual o montante produzido nesse ponto? Será esse o volume de produção correspondente à melhor utilização do factor variável? Justifique.

São produzidas 10 unidades. Não, o máximo de eficiência na utilização do factor variável ocorre no máximo da Pmd_L (óptimo técnico) que corresponde ao mínimo do CVM e não do CTM. Já o máximo de eficiência na utilização do factor fixo ocorre no máximo da PT_L (máximo técnico).

d) Como sabe, do estudo das relações entre as diversas modalidades de custos, no ponto referido em b) verifica-se a igualdade entre duas importantes categorias de custos. Identifique-as e demonstre a referida igualdade.

Enquanto produzir uma unidade adicional do bem proporcione um acréscimo no custo total (custo marginal) menor que o custo por unidade produzida (custo total médio), este último diminuirá; a partir do volume de produção em que o custo marginal supere o custo médio, este passará a crescer. Assim, no mínimo do custo médio, as duas funções terão o mesmo valor.

c.3) Defina o conceito "dimensão óptima mínima". No caso da empresa "ABC", será que existe uma e só uma dimensão óptima mínima? Justifique.

Exercício 12[3]

Considere uma empresa agrícola produtora de trigo cuja função produção é a seguinte:

$Q = 2\, L^{0,5}\, K^{0,5}$, *onde:*

---

[3] Retirado da Prova escrita de 3 de Junho de 2005.

Q = toneladas de trigo, por período de tempo; L = unidades de factor trabalho, por período de tempo e K= unidades de factor capital, por período de tempo. Admita que os preços unitários dos factores capital (K) e trabalho (L) são, respectivamente, de 4 e 1 unidades monetárias.

1) Admita que o empresário actualmente utiliza 25 unidades de capital.

a) O gestor de produção da empresa afirma que "as condições técnicas de produção, no curto prazo, não são favoráveis, porque implicam custos marginais sempre crescentes". Concorda? Justifique.

Este processo produtivo exiba sempre rendimentos decrescentes do factor variável, isto é, verifica-se a lei da produtividade marginal decrescente (dos rendimentos decrescentes) a partir da primeira unidade de factor trabalho empregue, o que acontece porque a produtividade marginal do factor trabalho começa a decrescer a partir da primeira unidade de factor trabalho.

$PmgL = L^{-0,5}K^{0,5} \Rightarrow \frac{\partial PmgL}{\partial L} = -0,5L^{-1,5}K^{0,5} < 0$, para todo o L.

Assim, dada a relação inversa $Cmg = \frac{P_L}{Pmg_L}$, o custo marginal será, de facto, sempre crescente.

b) Na dimensão actual (K = 25), a empresa está a produzir 100 toneladas. Analistas de mercado esperam um aumento da procura deste produto, pelo que o empresário pretende produzir 130 toneladas. O gestor de produção da empresa afirma que "será necessário ajustar a dimensão para que se produza ao mínimo custo total possível". Concorda? Justifique, recorrendo à representação gráfica e apresentando cálculos.

No curto prazo, Q = 100; K = 25; L = 100.

Se o volume de produção 130 for produzido em período longo (ajustamento de ambos os factores):

$TMST_{K,L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{1}{4} \Rightarrow L = 4K$

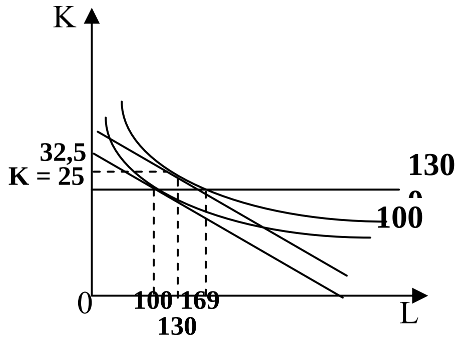
$CT = P_L L + P_K K \Rightarrow CT = L + 4K \Rightarrow CT = 8K$

$Q = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow 130 = 4K \Rightarrow K = 32,5 \wedge L = 130 \wedge CT = 260$

Se o volume de produção 130 for produzido em período curto na dimensão K=25:

$Q = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow 130 = 10L^{0,5} \Rightarrow 13 = L^{0,5} \Rightarrow L = 169 \wedge CT = 260$

$CT = P_L L + P_K K \Rightarrow CT = L + K \Rightarrow CT = L + 100 = 269$



Conclusão: Naturalmente, no curto prazo, o acréscimo de produção tem que ser conseguido à custo de um aumento na quantidade utilizada do factor variável enquanto, no longo prazo, o factor produtivo L já não tem que aumentar tanto, pois é acompanhado de um aumento no factor produtivo K. Neste caso particular, o custo total é igual em ambas as situações, logo não é necessário ajustar a dimensão.

2) Quais os rendimentos à escala exibidos por esta função de produção? Justifique a sua resposta. Quais as implicações da sua resposta sobre o andamento da função custo médio de período longo? Justifique.

$Q' = \phi Q = 2(\lambda L)^{0,5}(\lambda K)^{0,5} = \lambda Q \Rightarrow \phi = \lambda$

A função de produção exibe rendimentos constantes à escala, significando que, se ambos os factores forem aumentados numa dada proporção, o produto aumenta na mesma proporção. Assim, à medida que a produção aumenta, o acréscimo de factores produtivos requerido para obter um mesmo aumento do volume de produção é sempre o mesmo. Consequentemente, e assumindo que os preços dos factores produtivos se mantêm constantes, o custo médio de produção de período longo é constante.

Exercício 13[4]

Considere uma empresa agrícola produtora de milho cuja função produção é a seguinte:

$$Q = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}},$$

onde Q = toneladas de milho, por período de tempo; L = unidades de factor trabalho, por período de tempo e K= unidades de factor capital, por período de tempo. Admita que os preços unitários dos factores capital (K) e trabalho (L) são, respectivamente, de 4 e 1 unidades monetárias.

[4] Retirado da Prova escrita de 12 de Setembro de 2005.

a) Quais os rendimentos à escala exibidos por esta função de produção? Justifique a sua resposta. Quais as implicações da sua resposta sobre o andamento da função custo total de período longo? Justifique.

$Q' = \phi Q = 2(\lambda L)^{0,5}(\lambda K)^{0,5} = \lambda Q \Rightarrow \phi = \lambda$

A função de produção exibe rendimentos constantes à escala, significando que, se ambos os factores forem aumentados numa dada proporção, o produto aumenta na mesma proporção. Assim, à medida que a produção aumenta, o acréscimo de factores produtivos requerido para obter um mesmo aumento do volume de produção é sempre o mesmo. Consequentemente, e assumindo que os preços dos factores produtivos se mantêm constantes, o custo total de produção de período longo cresce a ritmos constantes.

b) O gestor de produção da empresa afirma que "atendendo às condições técnicas de produção, no curto prazo, esta função exibe sempre rendimentos decrescentes do factor variável". Concorda? Justifique. Como compatibiliza a sua resposta com a dada na alínea a)?

Para que este processo produtivo exiba sempre rendimentos decrescentes do factor variável, é necessário que a lei da produtividade marginal decrescente (dos rendimentos decrescentes) se verifique a partir da primeira unidade de factor trabalho empregue, o que acontece se a produtividade marginal do factor trabalho começar a decrescer a partir da primeira unidade de factor trabalho.

$PmgL = L^{-0,5}K^{0,5} \Rightarrow \frac{\partial PmgL}{\partial L} = -0,5L^{-1,5}K^{0,5} < 0$, para todo o L.

A existência de rendimentos decrescentes não é incompatível com a existência de rendimentos constantes à escala, na medida em que acontecem em períodos de análise diferentes: aqueles em período curto, estes em período longo e, portanto, com ajustamentos diferentes.

c) Defina e determine a expressão analítica de linha de expansão de período longo. Explicite os pressupostos utilizados.

A linha de expansão de período longo é o lugar geométrico de pontos de equilíbrio que representam combinações de factores que permitem produzir sucessivos volumes de produção ao mínimo custo, tudo o mais constante (preços dos factores e tecnologia).

$TMST_{K,L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{1}{4} \Rightarrow L = 4K$

d) No curto prazo a empresa está a produzir 100 toneladas, utilizando 25 unidades de capital. Analistas de mercado esperam um aumento da procura deste produto, pelo que o empresário pretende produzir 130 toneladas. O gestor de produção da empresa afirma que será necessário

No curto prazo, $Q = 100$; $K = 25$; $L = 100$.

Se o volume de produção 130 for produzido em período longo (ajustamento de ambos os factores):

$$TMST_{K,L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{1}{4} \Rightarrow L = 4K$$

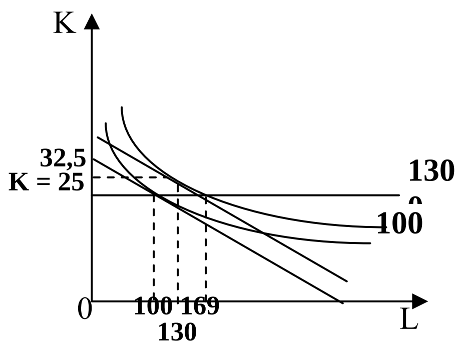
$CT = P_L L + P_K K \Rightarrow CT = L + 4K \Rightarrow CT = 8K$

$Q = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow 130 = 4K \Rightarrow K = 32{,}5 \wedge L = 130 \wedge CT = 260$

Se o volume de produção 130 for produzido em período curto na dimensão K=25:

$Q = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow 130 = 10L^{0,5} \Rightarrow 13 = L^{0,5} \Rightarrow L = 169 \wedge CT = 260$

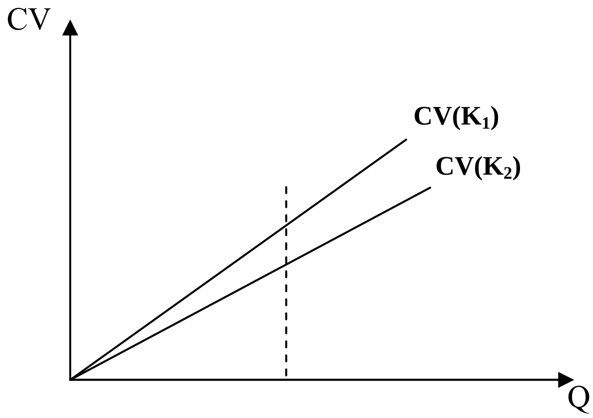
$CT = P_L L + P_K K \Rightarrow CT = L + K \Rightarrow CT = L + 100 = 269$



Conclusão: Naturalmente, no curto prazo, o acréscimo de produção tem que ser conseguido à custo de um aumento na quantidade utilizada do factor variável enquanto, no longo prazo, o factor produtivo L já não tem que aumentar tanto, pois é acompanhado de um aumento no factor produtivo K.

e) "Se a quantidade do factor capital aumentar, a função custo variável total continuará a ter a mesma expressão analítica." Comente, acompanhando a sua explicação de representação gráfica (não efectue cálculos).

A função custo variável total é uma função crescente com o montante de factor variável utilizado e decrescente com o montante de factor capital utilizado. A função custo variável total depende da função produtividade total que é definida para uma dada dimensão da empresa (K_1). Se a dimensão da empresa variar, nomeadamente aumentar para K_2, é possível produzir o mesmo volume de produção com menor montante de factor trabalho ou produzir mais com o mesmo montante de factor L, o que permite diminuir os custos variáveis (com o factor trabalho). Assim, a expressão analítica do custo variável altera-se com a variação da dimensão da empresa (factor K). Por exemplo, admitindo funções lineares:



Exercício 14

A empresa Pão Kente dedica-se à montagem e comercialização de torradeiras eléctricas. A empresa adquire os componentes da torradeira eléctrica (C) a fornecedores autónomos e posteriormente procede à montagem desses componentes nas suas instalações recorrendo exclusivamente a trabalho (L). Dada a tecnologia de produção da Pão Kente, a sua função produção de torradeiras eléctricas é dada por:

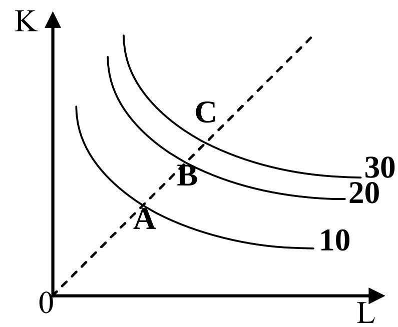
$$Q = C^{0,5}L^{0,7},$$

em que Q representa a quantidade produzida de torradeiras eléctricas por período de tempo; C a quantidade de componentes utilizados por período de tempo e L a quantidade de horas de trabalho utilizadas por período de tempo.

1. Colocando-se num horizonte temporal em que é possível a alteração de todas as quantidades utilizadas de factores produtivos (K e L), indique o tipo de rendimentos à escala a que está sujeita a montagem de torradeiras eléctricas. Ilustre graficamente.

$Q' = \phi Q = (\lambda C)^{0,5}(\lambda L)^{0,7} = \lambda^{1,2}Q \Rightarrow \phi > \lambda$

Logo, a função produção exibe rendimentos crescentes à escala: perante um aumento na escala de produção (isto, é se todos os factores produtivos aumentarem na mesma proporção), o volume de



produção aumenta numa proporção superior.

Com 0A > AB > BC, isto é, para alcançar o mesmo acréscimo de produção, as quantidades dos factores produtivos têm que aumentar numa proporção cada vez menor.

2. Recentemente, a Gerência da Pão Kente colocou a hipótese de utilizar robots (K) na montagem de torradeiras eléctricas (para além do trabalho e dos componentes). Nesse caso, a função de produção da Pão Kente viria dada por:

$$Q = C^{0,5}(L + 100K)^{0,7}$$

em que Q representa a quantidade produzida de torradeiras eléctricas por período de tempo; C a quantidade de componentes utilizados por período de tempo; K a quantidade robots utilizados por período de tempo e L a quantidade de horas de trabalho utilizadas por período de tempo.

Utilizando um conceito adequado (e definindo-o) o que pode concluir quanto ao grau de substituibilidade existente entre a quantidade utilizada de trabalho e de robots.

$TMST_{K,L} = \dfrac{Pmg_L}{Pmg_K} = \dfrac{0{,}7C^{0,5}(L+100K)^{-0,3}}{100C^{0,5}(L+100K)^{-0,3}} = 0{,}007$ Como a taxa marginal de substituição técnica é constante, significa que, para manter o volume de produção constante e usar uma unidade adicional do factor produtivo L, abdica-se sempre da mesma quantidade do factor produtivo K. Logo, os factores produtivos são substitutos perfeitos.

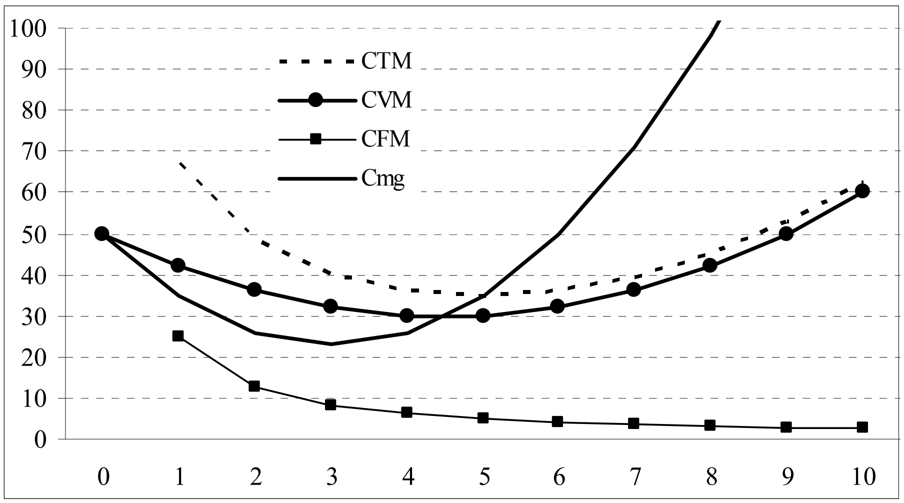
Exercício 15[5]

[5] Retirado do trabalho para casa de 11 de Abril de 2006.

a) A empresa "DEF", tem a seguinte função custo de período curto: $CT = Q^3 - 9Q^2 + 50Q + 25$ para $0 \leq Q \leq 10$. Proceda à representação gráfica das funções Custo Variável Médio, Custo Total Médio, Custo Fixo Médio e Custo Marginal. Neste caso, como será o andamento da função produtividade total do factor variável?

$CT = Q^3 - 9Q^2 + 50Q + 25$ $\qquad$ $CVM = Q^2 - 9Q + 50$ (Min: Q = 4,5)

$CTM = Q^2 - 9Q + 50 + 25/Q$ (Min: Q = 5) $\qquad$ $CFM = 25/Q$ $\qquad$ $Cmg = 3Q^2 - 18Q + 50$ (Min: Q = 3)

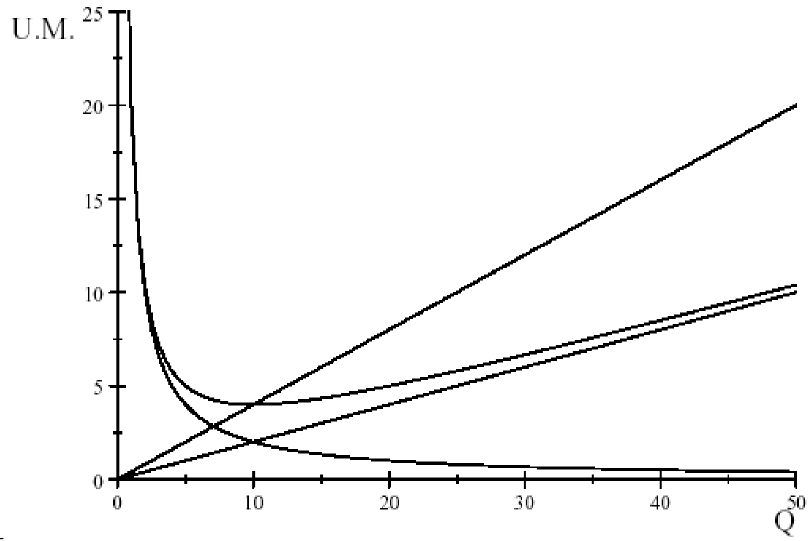


Como a Pmg_L tem um comportamento inverso ao do Cmg, dado por $Pmg_L = \dfrac{P_L}{Cmg}$ e o custo marginal decresce até Q = 3 e depois cresce, a Pmg_L cresce e depois decresce. Logo, a produtividade total do factor variável cresce a ritmos crescentes e depois a ritmos decrescentes.

b) Sabe-se que, em período curto, a empresa ABC tem a seguinte função Custo Total de Período Curto: $CT = \dfrac{Q^2}{5} + 20$

b.1) Represente graficamente as funções Custo Variável Médio, Custo Total Médio, Custo Fixo Médio e Custo Marginal.

$CT = \frac{Q^2}{5} + 20$ $\quad CVM = \frac{Q}{5}$ $\quad CTM = \frac{Q}{5} + \frac{20}{Q}$ (Min: Q = 10) $\quad CFM = \frac{20}{Q}$ $\quad Cmg = \frac{2Q}{5}$



b.2) Relacione, genericamente e para este caso específico, o comportamento das funções Custo Variável Médio e Custo Marginal com as funções Produtividade Média do Factor Variável e Produtividade Marginal, respectivamente.

Genericamente, com preços dos inputs constantes, a fase crescente da Pmd_L está associada à fase decrescente do CVM, o máximo da Pmd_L ao mínimo do CVM e a fase decrescente da Pmd_L à fase crescente do CVM. A Pmg_L tem também um comportamento inverso ao do Cmg. Neste caso específico, o CVM e Cmg são sempre crescentes e lineares, pelo que a Pmd_L e Pmg_L são sempre decrescentes e lineares.

ser usada uma dimensão de 4,5.

c) Considere que a Função Custo Total de Período Longo é a seguinte: **CT = 4Q**

.

c.1) Determine as Funções Custo Médio e Custo Marginal de Período Longo.

CT = 4Q $\quad$ CTM = Cmg = 4

c.2) Relacione o tipo de funções obtidas na alínea c.1 com o tipo de rendimentos à escala exibidos pela função de produção.

Como a função produção exibe rendimentos constantes à escala: $Q_1' = \phi Q_1 = (\lambda L_1)^{0,5}(\lambda K_1)^{0,5} = \lambda Q_1 \Rightarrow \phi = \lambda$, a função custo médio será constante, não se verificando nem economias nem deseconomias à escala e, portanto, o custo marginal também será constante.

c.3) Defina o conceito "dimensão óptima mínima". No caso da empresa "ABC", será que existe uma e só uma dimensão óptima mínima? Justifique.

A "dimensão óptima mínima" corresponde à quantidade de factor fixo adequada à produção do volume de produção associado ao menor custo unitário de período longo. Neste caso, qualquer volume de produção típico permite produzir ao menor custo médio possível, pelo que está associado à dimensão óptima mínima. Existe uma infinidade de dimensões óptimas mínimas.

Exercício 16

Considere a seguinte função custo total, de período curto, de uma unidade económica de produção:

$CT_{PC} = 2Q^3 - 50Q^2 + 800Q + 1000$

onde Q representa a quantidade de produto e CT o custo total da empresa.

a) Tomando em consideração apenas os custos de produção, qual o volume de produção que aconselharia ao empresário?

Atendendo a que a dimensão está definida, a empresa está a laborar em período curto, pelo que procurará minimizar o custo médio de período curto:

$CT_{PC} = 2Q^3 - 50Q^2 + 800Q + 1000$

$CTM_{PC} = 2Q^2 - 50Q + 800 + 1000/Q$

$$\frac{dCTM}{dQ} = 0 \Rightarrow 4Q - 50 - 1000/(Q^2) = 0 \Rightarrow Q = 13{,}81$$

$$\frac{d^2CTM}{dQ^2} > 0 \Rightarrow 4 + 2000/(Q^3) > 0 \Rightarrow 4{,}76 > 0 \text{ (V)}$$

b) Considere a seguinte função custo total de período longo: $CT_{PL} = 2Q^3 - 60Q^2 + 1000Q$

Determine o volume de produção correspondente ao mínimo custo unitário de produção (dimensão óptima). Represente graficamente a situação.

(i) $CTM_{PL} = 2Q^2 - 60Q + 1000$

(ii) Min CTM_{PL}: CPO: $\frac{dCTM}{dQ} = 0 \Leftrightarrow 4Q - 60 = 0 \Leftrightarrow Q = 15$ (Escala mínima eficiente)