BUKU AJAR

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Oleh:
Dr. St. Budi Waluya, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2006

Daftar Isi

Bab 1

Pengantar Persamaan Diferensial

1.1 Pendahuluan

Dalam bab ini kita akan membicarakan gambaran yang luas tentang Persamaan Diferensial. Persamaan Diferensial merupakan matakuliah yang cukup strategis karena berkaitan dengan bagian-bagian sentral dalam matematika seperti dalam Analisis, Aljabar, Geometri dan yang lainnya yang akan sangat berperan dalam pengenalan konsep maupun pemecahan masalah yang berkaitan dengan dunia nyata.

1.1.1 Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari pokok bahasan I ini, diharapkan anda mampu memahami pengertian persamaan differensial dan solusinya.

1.1.2 Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari pokok bahasan I ini anda dapat

1. memahami jenis-jenis persamaan diferensial
2. membedakan persamaan diferensial biasa dan sebagian
3. memahami mengenai sistem persamaan diferensial
4. mengerti tentang pengertian order persamaan diferensial
5. memahami pengertian solusi persamaan diferensial
6. memahami perbedaan persamaan diferensial linear dan tak linear
7. memahami tentang lapangan arah (*direction field*)

1.2 Penyajian Materi

1.2.1 Klasifikasi Persamaan Diferensial

Banyak masalah yang sangat penting dalam mesin, ilmu fisika, ilmu sosial dan yang lainya, ketika memformulakan dalam bentuk matematika mensyaratkan fungsi yang memenuhi persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Persamaan-persamaan di atas disebut persamaan diferensial. Perhatikan hukum Newton $F = m.a$. Jika $y(t)$ menyatakan posisi partikel bermasa m pada waktu t dan dengan gaya F, maka kita akan dapatkan

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F\left[t, y, \frac{dy}{dt}\right], \qquad (1.2.1)$$

dimana gaya F mungkin merupakan fungsi dari t,y, dan kecepatan dy/dt. Untuk menentukan gerakan sebuah partikel dengan diberikan gaya F yakni dengan mencari fungsi y yang memenuhi persamaan (1.2.1).

1.2.2 Persamaan Diferensial Biasa dan Sebagian

Klasifikasi ini didasarkan pada apakah fungsi yang diketahui tergantung pada satu atau beberapa vareabel bebas. Dalam kasus yang pertama disebut persamaan diferensial biasa sedang dalam kasus yang kedua disebut persamaan diferensial sebagian. Persamaan (1.2.1) merupakan salah satu contoh persaman diferensial biasa. Contoh lainnya misalnya dalam elektronika kita punyai relasi antara kapasitas C, hambatan R, induktansi L, tegangan E dan muatan Q diberikan

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t). \qquad (1.2.2)$$

Contoh lain misalkan dalam peluruhan zat radio aktif akan diberikan sebagai

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t), \qquad (1.2.3)$$

dimana $R(t)$ adalah jumlah zat radioaktif pada waktu t, dan k adalah konstanta peluruhan. Sedangkan contoh untuk persamaan diferensial sebagian misalnya persamaan Laplace yang diberikan sebagai

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad (1.2.4)$$

persamaan panas

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad (1.2.5)$$

dimana α adalah konstanta tertentu. Juga persamaan gelombang yang diberikan sebagai

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad (1.2.6)$$

dengan a konstanta tertentu.

1.2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Klasifikasi lain adalah tergantung pada banyaknya fungsi-fungsi yang tidak diketahui. Jika hanya terdapat fungsi tunggal yang akan ditentukan maka satu persamaan sudah cukup. Akan tetapi jika terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui maka sebuah sistem dari persamaan diperlukan. Untuk contohnya, persamaan Lotka-Volterra atau predator-pray adalah contoh sistem persamaan yang sangat penting yang merupakan model dalam ekologi. Persamaan tersebut mempunyai bentuk

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \tag{1.2.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy, \tag{1.2.8}$$

dimana $x(t)$ dan $y(t)$ adalah populasi species prey dan predator. Konstanta a, α, c, and γ didasarkan pada observasi empirik dan tergantung pada spesies tertentu yang sedang dipelajari.

1.2.4 Order Persamaan Diferensial

Order dari persamaan diferesial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan. Persamaan (1.2.3) adalah persamaan orde satu, sedang persamaan (1.2.4),(1.2.5),(1.2.6) merupakan persamaan-persamaan diferensial berorde dua. Secara umum persamaan diferensial berorde n dapat dituliskan sebagai

$$F\left[t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)\right] = 0. \tag{1.2.9}$$

Persamaan (1.2.9) menyatakan relasi antara vareabel bebas t dan nilai-nilai dari fungsi u, u',$\ldots$, $u^{(n)}$. Untuk lebih mudahnya dalam persamaan (1.2.9) biasanya kita tulis y untuk $u(t)$, y' untuk $u'(t)$ dan seterusnya. Jadi persamaan (1.2.9) dapat ditulis sebagai

$$F\left[t, y, y', \ldots, y^{(n)}\right] = 0. \tag{1.2.10}$$

Untuk contohnya,

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \tag{1.2.11}$$

adalah persamaan diferensial orde 3 untuk $y = u(t)$. Kita asumsikan bahwa selalu mungkin untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang diberikan untuk turunan yang terbesar, yakni

$$y^{(n)} = f\left(t, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{1.2.12}$$

Kita hanya akan pelajari persamaan dalam bentuk (1.2.12). Hal ini untuk menghindari makna ganda yang muncul bahwa sebuah persamaan dalam bentuk (1.2.10) bersesuaian dengan beberapa persamaan dalam bentuk (1.2.12). Contohnya persamaan dalam bentuk

$$y'^2 + ty' + 4y = 0 \tag{1.2.13}$$

sampai pada dua persamaan

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16y}}{2} \text{ atau } y' = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16y}}{2}. \tag{1.2.14}$$

1.2.5 Solusi Persamaan Diferensial

Sebuah solusi dari persamaan diferensial (1.2.12) pada interval $\alpha < t < \beta$ adalah sebuah fungsi ϕ sedemikian sehingga $\phi'(t), \phi(t)'', \ldots, \phi^n(t)$ ada dan memenuhi

$$\phi^n(t) = f\left[t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{n-1}(t)\right] \tag{1.2.15}$$

untuk setiap t dalam $\alpha < t < \beta$. Kita asumsikan bahwa fungsi f untuk persamaan (1.2.12) adalah fungsi yang bernilai riil dan kita tertarik untuk mendapatkan solusi-solusi yang bernilai riil $y = \phi(t)$. Adalah sangat mudah untuk menunjukkan dengan substitusi langsung bahwa persamaan diferensial orde satu

$$\frac{dR}{dt} = -kR \tag{1.2.16}$$

mempunyai solusi

$$R = \phi(t) = ce^{-kt}, \ \ -\infty < t < \infty. \tag{1.2.17}$$

Kasus sama, bahwa fungsi-fungsi $y_1(t) = \cos(t)$ dan $y_2(t) = \sin(t)$ adalah solusi-solusi dari

$$y'' + y = 0 \tag{1.2.18}$$

untuk semua t. Kita berikan contoh yang lebih rumit untuk membuktikan $\phi_1(t) = t^2 \ln(t)$ adalah sebuah solusi dari

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0, \ \ t > 0. \tag{1.2.19}$$

Kita catat bahwa

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= t^2 \ln(t), \\ \phi_1'(t) &= t^2(1/t) + 2t\ln(t) = t + 2t\ln(t), \\ \phi_1''(t) &= 1 + 2t(1/t) + 2\ln(t) = 3 + 2\ln(t). \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Kita substitusikan (1.2.20) ke dalam persamaan diferensial (1.2.19) dan kita peroleh

$$\begin{aligned} &t^2\left(3 + 2\ln(t)\right) - 3t\left(t + 2t\ln(t)\right) + 4(t^2\ln(t)) \\ &\quad = 3t^2 - 3t^2 + (2 - 6 + 4)t^2\ln(t) = 0, \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

yang membuktikan bahwa $\phi_1(t) = t^2 \ln(t)$ adalah sebuah solusi persamaan (1.2.19).

1.2.6 Persamaan Linear dan Tak Linear

Persamaan diferensial biasa

$$F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

dikatakan linear jika F adalah linear dalam vareabel-vareabel $y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}$. Definisi serupa juga berlaku untuk persamaan diferensial sebagian. Jadi secara umum persamaan diferensial biasa linear order n diberikan dengan

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = g(t). \tag{1.2.22}$$

Persamaan yang tidak dalam bentuk persamaan (1.2.22) merupakan persamaan tak linear. Contoh persamaan tak linear, persamaan pendulum

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

Persamaan tersebut tak linear karena suku $\sin\theta$. Persamaan diferensial

$$y'' + 2e^t y' + yy' + y^2 = t^4,$$

juga tak linear karena suku yy' dan y^2.

1.2.7 Lapangan Arah/ *Direction Field*

Lapangan arah dapat diberikan sebagai berikut. Misalkan diberikan persamaan diferensial

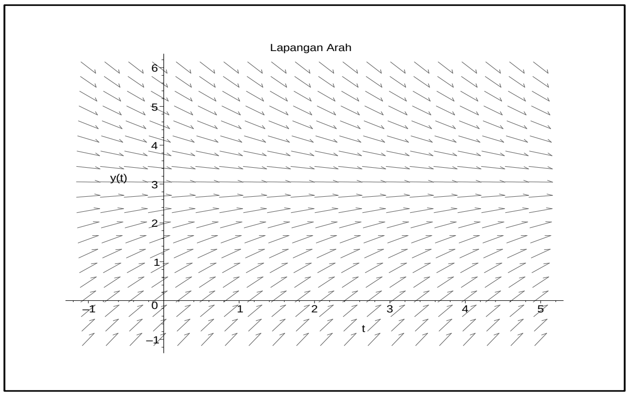
$$\frac{dy}{dx} = f(t, y). \tag{1.2.23}$$

Solusi persamaan diferensial (1.2.23) adalah suatu fungsi $y = \phi(t)$, yang secara geometri merepresentasikan sebuah kurva fungsi. Secara geometri persamaan (1.2.23) dapat dipandang sebagai kemiringan (*slope*) dy/dx dari solusi di setiap titik (t, y) diberikan dengan $f(t, y)$. Koleksi dari semua segmen garis yang merepresentasikan *slope* ini dalam bidang ty disebut Lapangan arah (*direction filed*). Untuk mendapatkan lapangan arah ini dapat dengan mudah ditunjukkan dengan program Maple.

Contoh. Gambarkan lapangan arah dari

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3 - y}{2}.$$

Jawab. Dengan menggunakan Maple (bisa juga dilakukan dengan tangan) dapat diberikan dalam Gambar 1.1. Dalam Gambar 1.1 dapat diperhatikan bahwa pada garis $y = 2$ maka semua titik mempunyai slope $1/2$, berarti semua solusi akan memotong garis $y = 2$ dengan kemiringan kurva (slope) $1/2$. Juga semua solusi akan menurun bila $y > 3$ dan akan naik untuk $y < 3$. Dan semua solusi akan menuju 3 jika $t \to \infty$.



Gambar 1.1: Lapangan arah dari $y' = (3 - y)/2$.

1.2.8 Latihan Soal

1. Pada soal berikut tentukan order persamaan diferensial dan nyatakan apakah persamaan linear atau tak linear

a. $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = \sin(t)$

b. $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = e^t$

c. $\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

Pada soal 2 sampai 6 berikut buktikan bahwa sebuah atau beberapa fungsi yang diberikan merupakan solusi persamaan diferensialnya

2. $y'' - y = 0;\ y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = \cosh(t)$

3. $ty' - y = t^2;\ y = 3t + t^2$

4. $y'''' + 4y''' + 3y = t;\ y_1(t) = t/3,\ y_2(t) = e^{-t} + t/3$

5. $y'' + y = \sec t, 0 < t < \pi/2;\ y = (\cos t)\ln\cos t + t\sin t$

6. $y' - 2ty = 1;\ y = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + e^{t^2}$

Pada soal 7 sampai 10 berikut temukan nilai dari r dari persamaan diferensial yang diberikan dalam bentuk $y = e^{rt}$

7. $y' + 2y = 0$

8. $y'' + y - 6y = 0$

9. $y'' - y = 0$

10. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Pada soal 11 sampai 14 berikut tentukan order dari persamaan diferensial parsial yang diberikan dan nyatakan apakah merupakan linear atau tak linear

11. $u_{xx} + u_{xy} + u_{zz} = 0$
12. $u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u$
13. $u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$
14. $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$

Pada soal 15 sampai 18 berikut buktikan bahwa sebuah atau beberapa fungsi yang diberikan merupakan solusi persamaan diferensial parsial yang diberikan

15. $u_{xx} + u_{yy} = 0;\ u_1(x, y) = \cos x \cosh y,\ u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
16. $\alpha^2 u_{xx} = u_t;\ u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \sin x,\ u_2(x, t) = e^{-\alpha^2\lambda^2 t} \sin \lambda x,\ \lambda = \text{konstanta riil}$
17. $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt};\ u_1(x, t) = \sin \lambda x \sin \lambda at,\ u_2(x, t) = \sin(x - at),\ \lambda = \text{konstanta riil}$
18. $\alpha^2 u_{xx} = u_t; u = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t},\ t > 0$
19. Temukan nilai r sedemikian sehingga persamaan diferensial yang diberikan mempunyai solusi dalam bentuk $y = t^r, t > 0$ dari $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$.
20. Lakukan hal yang sama untuk $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$.
21. Dengan menggunakan program Maple gambarkan lapangan arah dan temukan solusi umumnya serta perilaku solusi untuk $t \to \infty$ dari persamaan diferensial berikut

    a. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
    b. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$
    c. $y' + y = te^{-t} + 1$
    d. $y' + (1/t)y = 3\cos 2t,\ t > 0$
    e. $y' - 2y = 3e^t$
    f. $ty' + 2y = \sin t,\ t > 0$
    g. $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$
    h. $2y' + y = 3t$
    i. $y' + y = 5 \sin 2t$
    j. $2y' + y = 3t^2$

Bab 2

Persamaan Diferensial Orde Satu

2.1 Pendahuluan

Dalam bab ini kita akan mempelajari persamaan diferensial orde satu yang mempunyai bentuk umum

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{2.1.1}$$

dimana f adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan. Sebarang fungsi terturunkan $y = \phi(t)$ yang memenuhi persamaan ini untuk semua t dalam suatu interval disebut solusi. Tujuan kita adalah untuk menentukan apakah fungsi-fungsi seperti ini ada dan jika ada kita akan mengembangkan metoda untuk menemukannya. Akan tetapi untuk sebarang fungsi f tidak terdapat metoda umum yang dapat dipakai untuk menyelesaikannya dalam bentuk fungsi-fungsi sederhana. Kita akan membahas beberapa metoda yang dapat dipakai untuk menyelesaikan beberapa jenis persamaan diferensial orde satu.

2.1.1 Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari pokok bahasan II ini, diharapkan anda mampu memahami persamaan differensial orde satu.

2.1.2 Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari pokok bahasan II ini anda dapat

1. memahami mengenai persamaan linear
2. memahami persamaan terpisah
3. membedakan persamaan linear dan tak linear

4. memahami persamaan diferensial Bernoulli
5. menyelesaikan persamaan eksak dan faktor-faktor integral
6. memahami persamaan homogen
7. mengaplikasikan persamaan diferensial

2.2 Penyajian Materi

2.2.1 Persamaan Linear

Apabila fungsi f dalam persamaan (2.1.1) bergantung linear pada variabel bebas y, maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{2.2.2}$$

dan disebut **persamaan linear orde satu**. Kita asumsikan bahwa p dan g adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval $\alpha < t < \beta$. Untuk contohnya persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \tag{2.2.3}$$

adalah contoh sederhana dari persamaan diferensial linear dengan $p(t) = 1/2$ dan $g(t) = 3/2$ yang merupakan fungsi-fungsi konstan.

Contoh 1. Selesaikan persamaan (2.2.3) dan tentukan bagaimana perilaku solusi untuk t yang cukup besar. Dan juga tentukan solusi dalam grafik yang melalui titik $(0, 2)$.

Jawab. Kita tulis persamaan (2.2.3) dalam bentuk

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y-3}{2},$$

atau jika $y \neq 3$,

$$\frac{dy/dt}{y-3} = -\frac{1}{2}. \tag{2.2.4}$$

Karena ruas kiri persamaan (2.2.4) merupakan turunan dari $\ln|y-3|$, maka kita punyai

$$\frac{d}{dt}\ln|y-3| = -\frac{1}{2}.$$

Ini berarti bahwa

$$\ln|y-3| = -\frac{t}{2} + C,$$

dimana C adalah sebarang konstanta integrasi. Dengan mengambil eksponensial kedua ruas diperoleh

$$|y - 3| = e^C e^{-t/2},$$

atau

$$y - 3 = \pm e^C e^{-t/2},$$

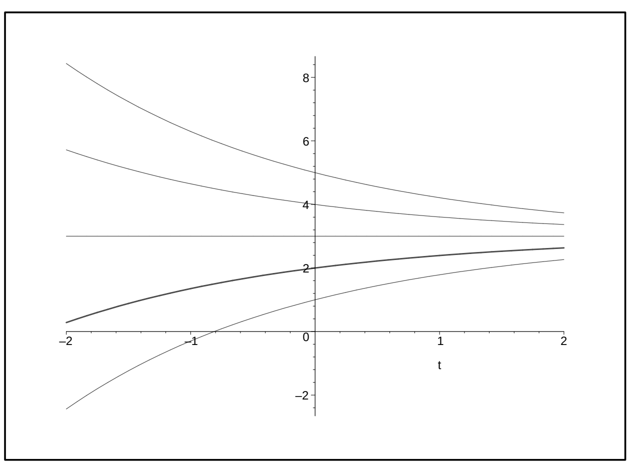
Jadi solusinya

$$y = 3 + ce^{-t/2}, \tag{2.2.5}$$

dimana $c = \pm e^C$ yang merupakan konstanta tak nol. Catat bahwa jika $c = 0$ maka kita peroleh fungsi konstan $y = 3$ yang juga merupakan solusi persamaan (2.2.3). Dari persamaan (2.2.5) jelas bahwa jika $t \longrightarrow \infty$ maka $y \longrightarrow 3$. Untuk sebuah nilai tertentu dari c akan bersesuaian dengan sebuah garis yang melalui $(0, 2)$. Untuk menemukan nilai c kita substitusikan $t = 0$ dan $y = 2$ ke dalam persamaan (2.2.5) dan kita pecahkan c dan akan diperoleh $c = -1$. Jadi

$$y = 3 - e^{-t/2}$$

adalah sebuah solusi yang melalui titik $(0, 2)$. Kurva integralnya dapat dilihat pada gambar 2.1. Persamaan diferensial orde satu dengan koefisien konstan yang lebih



Gambar 2.1: Plot kurva integral $y' = -\frac{y-3}{2}$.

umum dapat diberikan sebagai

$$\frac{dy}{dt} = ry + k, \tag{2.2.6}$$

dimana r dan k adalah konstanta-kontanta dapat diselesaikan dengan cara yang sama seperti contoh 1. Jika $r \neq 0$, dan $y \neq -k/r$, kita dapat menulis persamaan (2.2.6) dalam bentuk

$$\frac{dy/dt}{y + (k/r)} = r.$$

Maka

$$\ln|y + (k/r)| = rt + C,$$

dimana C adalah sebarang konstan. Dengan mengambil eksponensial pada kedua ruas kita peroleh

$$y + \frac{k}{r} = \pm e^C e^{rt},$$

dengan menyelesaikan untuk y kita dapatkan

$$y = -\frac{k}{r} + ce^{rt}, \tag{2.2.7}$$

dengan $c = \pm e^C$. Fungsi konstan $y = -k/r$ adalah solusi juga untuk $c = 0$. Periksa bahwa persamaan (2.2.3) bersesuaian untuk $r = -1/2$ dan $k = 3/2$ dalam persamaan (2.2.6) demikian juga solusi (2.2.5) dan (2.2.7) juga bersesuaian. Perilaku umum dari solusi persamaan (2.2.7) sangat tergantung pada tanda parameter r. Untuk $r < 0$ maka $e^{rt} \to 0$ bila $t \to \infty$, dan grafiknya untuk setiap solusi mendekati garis horizontal $y = -k/r$ secara asimptotik. Di lain pihak jika $r > 0$, maka e^{rt} membesar tak terbatas jika t bertambah. Grafiknya untuk semua solusi akan menjauh dari garis $y = -k/r$ bika $t \to \infty$. Solusi konstan $y = -k/r$ sering disebut solusi setimbang (equilibrium solution) karena $dy/dt = 0$. Solusi setimbang ini dapat ditemukan tanpa harus menyelesaikan persamaan diferensialnya, yakni dengan memisalkan $dy/dt = 0$ dalam persamaan (2.2.6) dan kemudian pecahkan untuk y. Solusi-solusi lain dapat juga disket dengan mudah. Untuk contohnya jika $r < 0$ maka $dy/dt < 0$ untuk $y > -k/r$ dan $dy/dt > 0$ jika $y < -k/r$. Kemiringan dari kurva solusi akan cukup tajam jika y cukup jauh dari $-k/r$ dan menuju 0 jika y mendekati $-k/r$. Jadi semua kurva solusi menuju garis horizontal yang bersesuaian dengan solusi equilibrium $y = -k/r$. Perilaku solusi akan berkebalikan jika $r > 0$. Akhirnya kita katakan bahwa solusi (2.2.7) hanya valid untuk $r \neq 0$. Jika $r = 0$ persamaan diferesialnya menjadi $dy/dt = k$, yang mempunyai solusi $y = kt + c$, yang bersesuaian dengan keluarga garis lurus dengan gradien k.

Faktor-faktor Integral. Dengan memperhatikan solusi dari persamaan (2.2.6) kita dapat menemukan sebuah metode yang dapat memecahkan persamaan linear orde satu dengan koefisien tak konstan. Pertama kita tulis kembali persamaan (2.2.7) dalam bentuk

$$ye^{-rt} = -\frac{k}{r}e^{-rt} + c, \tag{2.2.8}$$

kemudian dengan mendeferensialkan kedua ruas terhadap t, dan kita akan dapatkan

$$(y' - ry)e^{-rt} = ke^{-rt}, \tag{2.2.9}$$

yang ekuivalen dengan persamaan diferensial (2.2.6). Periksa bahwa kita sekarang dapat memecahkan persamaan diferensial (2.2.6) dengan membalik langkah di atas. Pindahkan suku ry ke ruas kiri dari persamaan dan kalikan dengan e^{-rt}, yang akan memberikan persamaan (2.2.9). Catat bahwa ruas kiri persamaan (2.2.9) adalah turunan dari ye^{-rt} sehingga persamaannya menjadi

$$(ye^{-rt})' = ke^{-rt}. \tag{2.2.10}$$

Akhirnya dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (2.2.10) kita peroleh persamaan (2.2.8) yang merupakan solusi (2.2.7). Dengan kata lain satu cara untuk memecahkan persamaan (2.2.6) adalah pertama dengan mengalikan dengan sebuah fungsi e^{-rt}. Karena perkalian ini membawa persamaan menjadi bentuk yang langsung dapat diintegralkan, fungsi e^{-rt} disebut **faktor integral** untuk persamaan (2.2.6). Untuk dapat dipakai dalam menyelesaikan persamaan lain dengan metode ini kita harus dapat menemukan faktor integral dari persamaan diferensial secara langsung. Sekarang kita kembali pada persamaan umum (2.2.2). Kita harus dapat menemukan faktor integral yang merupakan pengali persamaan diferensial (2.2.2)

$$y' + p(t)y = g(t)$$

yang dapat membawa kedalam bentuk yang dapat diintegralkan. Misalkan kita kalikan persamaan diferensial (2.2.2) dengan sebuah fungsi yang belum diketahui $\mu(t)$. Maka kita punyai

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \tag{2.2.11}$$

Kita akan menandai ruas kiri persamaan (2.2.11) sebagai turunan dari sebuah fungsi. Bagaimana mungkin ini terjadi? Kenyataannya terdapat dua suku dan salah satu sukunya adalah $\mu(t)y'$ yang dapat kita duga bahwa ruas kiri persamaan (2.2.11) merupakan turunan dari hasil kali $\mu(t)y$. Agar ini benar maka suku kedua dari ruas kiri persamaan (2.2.11), $\mu(t)p(t)y$, haruslah sama dengan $\mu'(t)y$. Ini berarti $\mu(t)$ haruslah memenuhi persamaan diferensial

$$\mu'(t) = p(t)\mu(t). \tag{2.2.12}$$

Jika sementara kita asumsikan bahwa $\mu(t)$ positif, maka kita dapat tuliskan persamaan (2.2.12) sebagai

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t),$$

atau

$$\frac{d}{dt}\ln\mu(t) = p(t), \tag{2.2.13}$$

dan dengan mengintegralkan kedua ruas kita peroleh

$$\ln\mu(t) = \int p(t)dt + k. \tag{2.2.14}$$

Dengan memilih sebarang konstanta $k = 0$, kita peroleh fungsi paling sederhana untuk μ, yakni

$$\mu(t) = \exp \int p(t)dt. \tag{2.2.15}$$

Periksa bahwa $\mu(t) > 0$ untuk semua t. Dengan faktor integral yang diperoleh kita kembali pada persamaan (2.2.2) dan kalikan dengan $\mu(t)$ dan kita dapatkan persamaan (2.2.11). Karena μ memenuhi persamaan (2.2.12) maka persamaan (2.2.11) dapat disederhanakan menjadi

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t). \tag{2.2.16}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (2.2.16) kita peroleh

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c,$$

atau

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}. \tag{2.2.17}$$

Karena y menyatakan sebarang solusi dari persamaan (2.2.2), kita simpulkan bahwa setiap solusi persamaan (2.2.2) termasuk dalam ruas kanan persamaan (2.2.17). Oleh karena itu persamaan ini disebut solusi umum persamaan (2.2.2). Periksa bahwa untuk menemukan solusi seperti persamaan (2.2.17) dua integrasi disaratkan, pertama untuk menemukan $\mu(t)$ dari persamaan (2.2.15) dan kedua untuk menemukan y dari persamaan (2.2.17). Catat juga bahwa sebelum menghitung faktor integral $\mu(t)$ dari persamaan (2.2.15), adalah perlu untuk meyakinkan bahwa persamaan diferensial adalah eksak dalam bentuk (2.2.2) khususnya koefisien y' haruslah 1, karena kalau tidak $p(t)$ yang digunakan dalam penghitungan μ akan salah. Kedua setelah menemukan $\mu(t)$ dan mengalikan dengan persamaan (2.2.2) yakinkan bahwa suku-sukunya memuat y' dan y yang tidak lain adalah turunan $\mu(t)y$. Ini dapat dicek pada penghitungan μ. Jelas salah satu solusi dapat diperoleh, dan untuk mengeceknya dengan mensubstitusikan kedalam persamaan diferensianya. Interpretasi geometri dari persamaan (2.2.17) adalah sebuah keluarga takhingga dari kurva-kurva solusi, untuk setiap c merupakan grafik solusi persamaan (2.2.5) dari persamaan (2.2.3). Kurva-kurva ini sering disebut kurva-kurva integral. Kadang-kadang penting untuk mengambil salah satu kurva, ini dapat dilakukan dengan mengindentifikasi titik kusus (t_0, y_0) yang disaratkan dilewati oleh grafik solusi, dan biasanya ditulis

$$y(t_0) = y_0, \tag{2.2.18}$$

yang disebut sebagai kondisi awal. Persamaan diferensial orde satu seperti persamaan (2.1.1) atau (2.2.2) dan sebuah kondisi awal seperti (2.2.18) bersama-sama disebut masalah nilai awal.

Contoh 2. Temukan solusi masalah nilai awal

$$\begin{aligned} y' - y/2 &= e^{-t}, && (2.2.19)\\ y(0) &= -1. && (2.2.20) \end{aligned}$$

Jawab. Periksa bahwa persamaan ini memenuhi persamaan (2.2.2) dengan $p(t) = -1/2$ dan $g(t) = e^{-t}$. Sehingga kita punyai faktor integralnya

$$\mu(t) = \exp \int \left(-\frac{dt}{2}\right) = e^{-t/2},$$

dan kita kalikan faktor integral ini dengan persamaan (2.2.19) dan akan kita dapatkan

$$e^{-t/2}y' - e^{-t/2}y/2 = e^{-3t/2}. \tag{2.2.21}$$

Ruas kiri persamaan (2.2.21) adalah turunan dari $e^{-t/2}y$, sehingga kita tulis persamaan ini menjadi

$$(e^{-t/2}y)' = e^{-3t/2},$$

dengan mengintegralkan kita dapatkan

$$e^{-t/2}y = -\frac{2}{3}e^{-3t/2} + c,$$

dimana c adalah sebarang konstan. Oleh karena itu

$$y = -\frac{2}{3}e^{-t} + ce^{t/2} \tag{2.2.22}$$

yang merupakan solusi dari persamaan (2.2.19). Untuk memenuhi kondisi awal (2.2.20) kita substitusikan $t = 0$ dan $y = -1$ dalam persamaan (2.2.22) dan pecahkan untuk c, kita peroleh $c = -1/3$. Jadi sebuah solusi dari masalah nilai awal yang diberikan adalah

$$y = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}. \tag{2.2.23}$$

Contoh 3. Temukan masalah nilai awal

$$y' + 2ty = t, \;\; y(0) = 0. \tag{2.2.24}$$

Jawab. Kita pertama menemukan faktor integral, yakni

$$\mu(t) = \exp \int 2tdt = e^{t^2}.$$

Kita kalikan persamaannya dengan $\mu(t)$ kita peroleh

$$e^{t^2}y' + 2te^{t^2}y = te^{t^2},$$

atau

$$(ye^{t^2})' = te^{t^2}.$$

Oleh karena itu

$$ye^{t^2} = \int te^{t^2}dt + c = \frac{1}{2}e^{t^2} + c,$$

sehingga

$$y = \frac{1}{2} + ce^{-t^2} \tag{2.2.25}$$

merupakan solusi umum persamaan diferensial yang diberikan. Untuk memenuhi kondisi awal $y(0) = 0$ kita harus memilih $c = -1/2$. Jadi

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t^2}$$

merupakan solusi masalah nilai awal (2.2.24). Ada solusi yang melewati titik asal $(0, 0)$. Periksa bahwa semua solusi mendekati solusi equilibrium $y = 1/2$ untuk $t \to \infty$.

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 5 gambarkan lapangan arah, diskripsikan bagaimana perilaku untuk nilai t yang besar dan temukan solusi umumnya dan gunakan itu untuk menentukan perilaku solusi pada $t \to \infty$.

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
2. $y' + y = te^{-t} + 1$
3. $y' + y = 5 \sin 2t$
4. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$
5. $ty' + 2y = \sin t,\ t > 0$

Temukan solusi dari masalah nilai awal soal no 6 sampai 15

6. $y' - y = 2te^{2t},\ \ y(0) = 1$
7. $y' + 2y = te^{-2t},\ y(1) = 0$
8. $ty' + 2y = t^2 - t + 1,\ y(1) = 1/2,\ t > 0$
9. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2, y(\pi) = 0,\ t > 0$
10. $y' - 2ty = 1;\ \ y(0) = 5$
11. $y' - 2y = e^{2t},\ y(0) = 2$
12. $ty' + 2y = \sin t,\ y(\pi/2) = 1$
13. $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t},\ \ y(-1) = 0$
14. $ty' + (t + 1)y = t,\ y(\ln 2) = 1$
15. $y' + 3y = t + 1 + e^{-2t},\ \ y(0) = 0$
16. Tunjukkan bahwa $\phi(t) = e^{2t}$ adalah solusi dari $y' - y = 0$. Tunjukkan juga bahwa untuk sebarang c, $y = c\phi(t)$ juga merupakan solusi

17. Tunjukkan jika $y = \phi(t)$ merupakan solusi dari $y' + p(t)y = 0$, maka $y = c\phi(t)$ juga merupakan solusi untuk sebarang c.

18. Misalkan $y = y_1(t)$ adalah solusi dari $y' + p(t)y = 0$, dan misalkan $y = y_2(t)$ merupakan solusi dari $y' + p(t)y = g(t)$. Tunjukkan bahwa $y = y_1(t) + y_2(t)$ merupakan solusi dari $y' + p(t)y = g(t)$.

19. Perhatikan persamaan linear
$$y' + p(t)y = g(t).$$
(i) Jika $g(t) \equiv 0$ tunjukkan bahwa solusinya $y = A\exp[-\int p(t)dt]$, dengan A konstan. (ii) Jika $g(t) \neq 0$ asumsikan solusinya $y = A(t)\exp[-\int p(t)dt]$ dengan $A(t)$ sebuah fungsi. Dengan mensubstitusikan ini kedalam persamaan diferensial, tunjukkan bahwa $A(t)$ harus memenuhi
$$A'(t) = g(t)\exp[\int p(t)dt].$$
dan temukan y.

20. Gunakan soal 19 untuk menyelesaikan (i) $y' - 2y = t^2e^{2t}$ dan (ii) $y' + (1/t)y = 3\cos 2t$, $t > 0$.

2.2.2 Persamaan Terpisah

Kadang-kadang akan lebih baik menggunakan x untuk menyatakan vareabel bebas dari pada t dalam persamaan diferensial. Dalam kasus ini persamaan umum linear orde satu mempunyai bentuk
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.2.26}$$
Jika persamaan (2.2.26) adalah tak linear, yakni f tidak linear dalam vareabel bergantung y, maka tidak terdapat metode umum yang dapat dipakai untuk menyelesaikannya. Dalam bagian ini kita akan membahas subklas dari persamaan linear orde satu yang dapat diintegralkan langsung. Pertama kita tulis kembali persamaan (2.2.26) dalam bentuk
$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.2.27}$$
Adalah selalu mungkin untuk mengerjakan ini dengan memisalkan $M(x, y) = -f(x, y)$ dan $N(x, y) = 1$, tetapi mungkin cara lain juga bisa. Dalam kasus M hanya fungsi dari x dan N hanya fungsi dari y, maka persamaan (2.2.26) menjadi
$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.2.28}$$
Persamaan ini disebut persamaan terpisah karena dapat dituliskan dalam bentuk
$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{2.2.29}$$

kemudian kita dapat memisahkannya dalam ruas yang lain. Persamaan (2.2.29) lebih simetrik dan dapat menghilangkan perbedaan vareabel bebas dan tak bebas.

Contoh 1. Tunjukkan bahwa persamaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \tag{2.2.30}$$

adalah persamaan terpisah dan temukan sebuah fungsi yang merupakan kurva integralnya.
Jawab. Kita dapat tulis persamaan (2.2.30) ke dalam

$$-x^2 + (1-y^2)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2.2.31}$$

yang mempunyai bentuk seperti persamaan (2.2.28), oleh karena itu terpisah. Periksa bahwa suku pertama persamaan (2.2.31) yang merupakan turunan dari $-x^3/3$ dan suku yang ke dua dengan menggunakan aturan rantai merupakan turunan dari $y - y^3/3$ terhadap x. Jadi persamaan (2.2.31) dapat ditulikan sebagai

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

atau

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3}\right) = 0.$$

Oleh karena itu kita dapatkan

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, \tag{2.2.32}$$

dimana c adalah sebarang konstan, yang merupakan kurva integral dari persamaan (2.2.31). Sebuah persamaan dari kurva integral yang melalui sebuah titik tertentu (x_0, y_0) dapat ditemukan dengan mensubstitusikan x_0 dan y_0 untuk x dan y berturut-turut ke dalam persamaan (2.2.32) dan kita dapat temukan c. Sebarang fungsi terturunkan $y = \phi(x)$ yang memenuhi (2.2.32) adalah solusi dari persamaan (2.2.30). Dengan menggunakan cara yang sama untuk persamaan (2.2.28) dengan memisalkan H_1 dan H_2 adalah sebarang fungsi sedemikian sehingga

$$H_1'(x) = M(x), \quad H_2'(y) = N(y), \tag{2.2.33}$$

maka persamaan (2.2.28) menjadi

$$H_1'(x) + H_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.2.34}$$

Dengan menggunakan aturan rantai

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2(y),$$

maka persamaan (2.2.34) menjadi

$$\frac{d}{dx}[H_1(x) + H_2(y)] = 0. \tag{2.2.35}$$

Dengan mengintegralkan persamaan (2.2.35) kita dapatkan

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{2.2.36}$$

dengan c adalah sebarang konstan. Setiap fungsi $y = \phi(x)$ yang memenuhi persamaan (2.2.36) adalah solusi dari (2.2.28). Dengan kata lain persamaan (2.2.36) mendefinisikan solusi implisit daripada eksplisit. Fungsi-fungsi H_1 dan H_2 adalah antiturunan dari M dan N berturut-turut. Dalam prakteknya persamaan (2.2.36) biasanya diperoleh dari persamaan (2.2.29) dengan mengintegralkan suku pertama terhadap x dan suku ke dua terhadap y. Jika persamaan (2.2.28) ditambah dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$ maka solusinya merupakan solusi dari (2.2.36) dengan mensubstitusikan $x = x_0$ dan $y = y_0$ dan akan didapatkan

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0).$$

Substitusikan kembali c ke dalam persamaan (2.2.36) dan catat bahwa

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(s)ds, \;\; H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(s)ds,$$

maka kita dapatkan

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0. \tag{2.2.37}$$

Persamaan (2.2.37) merupakan solusi implisit dari persamaan diferensial (2.2.28) yang memenuhi kondisi awal $y(x_0) = y_0$.

Contoh 2. Selesaikan masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \;\; y(0) = -1. \tag{2.2.38}$$

Jawab. Persamaan differensial ini dapat dituliskan sebagai

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx.$$

Kita integralkan ruas kiri terhadap y dan ruas kanan terhadap x dan memberikan

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, \tag{2.2.39}$$

dengan c adalah sebarang konstan. Kemudian kita substitusikan kondisi awal $x = 0$ dan $y = -1$ ke dalam persamaan (2.2.39) didapat $c = 3$. Jadi solusi masalah nilai awal dapat diberikan

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \tag{2.2.40}$$

Untuk menyatakan solusi eksplisit dalam persamaan (2.2.40) kita pecahkan y sebagai fungsi dari x dan kita dapatkan

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \tag{2.2.41}$$

Persamaan (2.2.41) memberikan dua solusi, tetapi hanya ada satu yang memenuhi kondisi awal, yakni

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \tag{2.2.42}$$

Catat bahwa kesalahan yang bertanda positif terletak pada persamaan (2.2.41) yang sebetulnya merupakan solusi persamaan diferesial dengan kondisi awalnya $y(0) = 3$. Untuk menentukan daerah dimana solusi (2.2.42) valid yakni kita harus temukan nilai dibawah tanda akar haruslah positif, jadi $x > -2$.

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 8 tentukan solusi umumnya

1. $y' = x^2/y$
2. $y' + y^2 \sin x = 0$
3. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$
5. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$
6. $y' = \frac{(3x^2-1)}{(3+2y)}$
7. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$

Untuk soal no 9 sampai 20 pecahkan masalah nilai awal yang diberikan

9. $y' = (1-2x)y^2$, $y(0) = -1/6$
10. $y' = (1-2x)/y,\ y(1) = -2$
11. $xdx + ye^{-x}dy = 0,\ y(0) = 1$
12. $dr/d\theta = r^2/\theta,\ r(1) = 2$
13. $y' = 2x/(y + x^2y),\ y(0) = 2$
14. $y' = xy^3(1+x^2)^{-1/2},\ y(0) = 1$
15. $y' = 2x/(1+2y),\ y(2) = 0$
16. $y' = x(x^2+1)/4y^3,\ y(0) = -1/\sqrt{2}$
17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y-5),\ y(0) = 1$
18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3+4y),\ y(0) = 1$
19. $\sin 2x dx + \cos 3y dy = 0,\ y(\pi/2) = \pi/3$
20. $y^2(1-x^2)^{1/2}dy = \arcsin x dx,\ y(0) = 0$
21. $y' = ty(4-y)/3,\ y(0) = 2$
22. $\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d}, y(0) = 1, a, b, c, d$ konstanta.

Tugas Terstruktur

Selesaikan

1. $(1-t^2)y' - ty = t(1-t^2), y(0) = 2$
2. $t(2+t)y' + 2(1+t)y = 1 + 3t^2, y(-1) = 1$
3. $y' + 2y = g(t), y(0) = 0$, untuk $0 \le t \le 1, g(t) = 1$ dan $g(t) = 0$ untuk $t > 1$
4. $y' + y = 1/(1+t^2), y(0) = 0$

2.2.3 Persamaan Linear dan Tak Linear

Di dalam mempelajari masalah nilai awal

$$y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0, \tag{2.2.43}$$

pertanyaan mendasar yang harus dipikirkan adalah apakah solusinya ada, apakah tunggal, pada interval mana terdefinisi dan bagaimana mengkonstruksi solusinya atau bagaimana menggambarkan grafiknya. Jika persamaan itu linear maka terdapat formula umum dari solusinya, contohnya seperti pada bagian terdahulu. Tambahannya untuk persamaan linear terdapat solusi umum (yang memuat sebuah konstanta sebarang) yang memuat semua solusi, dan kemungkinan titik-titik diskontinu dari solusi dapat dilokalisasi titik-titik diskontinu dari koeffisien-koefisien. Akan tetapi dalam kasus tak linear tidak terdapat formula yang bersesuaian sehingga lebih sulit untuk menyatakan sifat-sifat umum dari solusi. Dalam bagian ini kita akan pelajari perbedaan tersebut.

Teorema Eksistensi dan Ketunggalan. *Misalkan f dan $\partial f/\partial y$ kontinu pada daerah $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ yang memuat titik (t_0, y_0). Maka dalam suatu interval $-h < t < t_0 + h$ di $\alpha < t < \beta$ terdapat solusi tunggal $y = \phi(t)$ dari masalah nilai awal (2.2.43).*

Bukti. Lihat buku persamaan diferensial dalam referensi.

Contoh 1. Selesaikan masalah nilai awal

$$y' = y^{1/3},\ y(0) = 0,\ t \ge 0. \tag{2.2.44}$$

Jawab. Masalah ini dapat mudah diselesaikan dengan metoda terpisah. Jadi kita punyai

$$y^{-1/3} dy = dt,$$

sehingga

$$\frac{3}{2} y^{2/3} = t + c$$

atau

$$y = \left[\frac{2}{3}(t + c)\right]^{3/2}.$$

Kondisi awal akan terpenuhi jika $c = 0$, sehingga

$$y = \phi_1(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \ t \geq 0. \tag{2.2.45}$$

Di lain pihak fungsi

$$y = \phi_2(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \ t \geq 0 \tag{2.2.46}$$

dan

$$y = \psi(t) = 0, \ t \geq 0. \tag{2.2.47}$$

juga merupakan solusi. Jadi untuk sebarang t_0, fungsi

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, \ \text{jika} \ 0 \leq t < t_0, \\ \pm\left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, \ \text{jika} \ t \geq t_0 \end{cases} \tag{2.2.48}$$

adalah kontinu dan terturunkan (khususnya pada $t = t_0$), dan merupakan solusi masalah nilai awal (2.2.44). Masalah ini mempunyai takhingga banyak keluarga solusi. Ketidaktunggalan solusi masalah (2.2.44) tidak bertentangan dengan teorema ketunggalan dan eksistensi karena

$$\frac{\partial}{\partial y}f(t, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^{1/3}) = \frac{1}{3}y^{-2/3},$$

dan fungsi ini tidak kontinu atau meskipun terdefinisi pada setiap titik $y = 0$. Oleh karena itu teorema tidak berlaku pada semua daerah yang memuat sumbu t. Jika (t_0, y_0) sebarang titik yang tidak terletak pada sumbu t maka terdapat sebuah solusi yang tunggal dari persamaan diferensial $y' = y^{1/3}$ yang melewatinya.

Contoh 2. Selesaikan masalah nilai awal

$$y' = y^2, \ y(0) = 1, \tag{2.2.49}$$

dan temukan dimana solusi ada.
Jawab. Karena $f(t, y) = y^2$ dan $\partial f/\partial y = 2y$ kontinu dimana-mana maka keberadaan dijamin oleh teorema. Untuk menemukan solusi pertama kita nyatakan persamaan diferensial dalam bentuk

$$y^{-2}dy = dt. \tag{2.2.50}$$

Maka

$$-y^{-1} = t + c$$

dan

$$y = -\frac{1}{t+c}. \tag{2.2.51}$$

Dengan mensubstitusikan kondisi awal akan diperoleh $c = -1$, sehingga solusinya

$$y = -\frac{1}{1-t}. \tag{2.2.52}$$

Jelas bahwa solusi akan menjadi takterbatas untuk $t \to 1$ oleh karena itu solusi hanya akan ada pada interval $-\infty < t < 1$.
Jika kondisi awal diganti dengan $y(0) = y_0$, maka konstanta c dalam persamaan (2.2.51) menjadi $c = -1/y_0$, sehingga solusinya menjadi

$$y = -\frac{y_0}{1-y_0 t}. \tag{2.2.53}$$

Periksa bahwa solusinya menjadi takterbatas jika $t \to 1/y_0$, sehingga interval keberadaan solusinya menjadi $-\infty < t < 1/y_0$ jika $y_0 > 0$ dan $1/y_0 < t < \infty$ jika $y_0 < 0$.

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 6 nyatakan daerah di bidang ty dimana hipotesis dari teorema terpenuhi, sehingga terdapat solusi tunggal untuk setiap titik dalam daerahnya.

1. $y' = \frac{t-y}{2t+5y}$
2. $y' = 2ty/(1+y^2)$
3. $y' = \frac{1+t^2}{3y-y^2}$
4. $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$
5. $y' = 3(t+y)^{-2}$
6. $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$

Untuk soal no 7 sampai 10 pecahkan masalah nilai awal yang diberikan dan tentukan interval dimana solusi ada yang bergantung pada y_0

7. $y' = -4t/y$, $y(0) = y_0$
8. $y' + y^3 = 0$, $y(0) = y_0$
9. $y' = 2ty^2$, $y(0) = y_0$
10. $y' = t^2/y(1+t^3)$, $y(0) = y_0$

2.2.4 Persamaan Diferensial Bernoulli

Bentuk umum persamaan Bernouli diberikan dengan

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{2.2.54}$$

Cara penyelesaian persamaan Bernoulli yakni dengan membagi kedua rusa persamaan (2.2.54) dengan y^n dan dengan memisalkan $v = y^{1-n}$ sehingga

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Dan kita dapatkan persamaan

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + Pv = Q, \tag{2.2.55}$$

atau

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)Q, \tag{2.2.56}$$

yang merupakan persamaan diferensial orde satu yang dapat diselesaikan dengan metode faktor integrals.

Contoh. Selesaikan $\frac{dy}{dx} + 3xy = xy^2$.
Jawab. Persamaan di atas ditulis dalam bentuk

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + 3xy^{-1} = x.$$

Misalkan $v = y^{-1}$. Maka $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$, sehingga kita punyai

$$-\frac{dv}{dx} + 3xv = x,$$

atau

$$\frac{dv}{dx} - 3xv = -x.$$

Dipunyai $p(x) = -3x$, dan $q(x) = -x$. Jadi FI(faktor integral) nya adalah

$$e^{\int -3x dx} = e^{-3/2x^2}.$$

Dan kita kalikan persamaan diferensial dengan faktor integral tersebut, kita dapatkan persamaan

$$\left(ve^{-3/2x^2}\right)' = -xe^{-3/2x^2},$$

atau

$$ve^{-3/2x^2} = \frac{1}{3}\int d\left(e^{-3/2x^2}\right) = \frac{1}{3}e^{-3/2x^2} + c.$$

Jadi

$$v = \frac{1}{3} + ce^{3/2x^2},$$

dan kita dapatkan solusinya, yakni

$$y^{-1} = \frac{1}{3} + ce^{3/2x^2}.$$

2.2.5 Persamaan Diferensial Eksak

Dalam bagian terdahulu kita telah membahas bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial eksak, dimana persamaan diferensial itu dapat dipisahkan variabel - variabelnya, dalam hal ini kita punyai

$$M(x, y) = M(x), \quad N(x, y) = N(y).$$

Dalam sub bagian ini, kita akan membahas bagaimana jika

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.2.57}$$

tetapi

$$P(x, y) \neq P(x), \quad Q(x, y) \neq Q(y).$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial (2.2.57), kita misalkan suatu fungsi

$$\psi(x, y(x)) = c,$$

dimana c adalah suatu konstanta, dan $\psi(x, y)$ adalah suatu fungsi dari x dan $y(x)$ yang akan kita temukan kemudian. Dengan menggunakan aturan rantai kita punyai:

$$\frac{d}{dx}[\psi(x, y(x))] = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.2.58}$$

Jika kita samakan persamaan (2.2.58) di atas dengan persamaan diferensial (2.2.57), maka kita akan peroleh

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P(x, y) \text{ and } \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x, y).$$

Jika kondisi di atas dipenuhi oleh persamaan diferensial, maka $\psi(x, y) = c$ adalah solusi dari persamaan diferensial. Pertanyaan penting yang perlu kita jawab adalah kapan kita bisa terapkan teknik di atas dan bagaimana kita bisa menyelesaikan $\psi(x, y)$? Pertanyaan pertama dapat kita jawab dengan mengingat kembali dalam calculus multivariabel bahwa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}.$$

Jadi kita dapat temukan bahwa

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

yang harus sama. Sehingga kita harus memiliki kondisi agar persamaan diferensial di atas dapat di selesaikan (menjadi persamaan diferensial eksak), yakni

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Kemudian bagaimana menemukan $\psi(x, y)$, kita perhatikan contoh berikut:

Contoh 1: Selesaikan persamaan diferensial

$$(4x + 2y) + (2x - 2y)y' = 0.$$

Jawab. Kita pertama perhatikan bahwa

$$P(x, y) = 4x + 2y \to P_y = 2,$$

$$Q(x, y) = 2x - 2y \to Q_x = 2.$$

Jadi $P_y = Q_x$, dan kita katakan persamaan diferensial tersebut eksak. Kita akan menemukan penyelesaiannya yaitu $\psi(x, y)$ dengan:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P = 4x + 2y,$$

dan

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Q = 2x - 2y.$$

Kita integralkan persamaan pertama terhadap variable x dan kita akan peroleh

$$\psi(x, y) = 2x^2 + 2xy + h(y),$$

dimana $h(y)$ adalah suatu konstanta sebarang terhadap variabel x yang dapat tergantung pada variable y(fungsi dari variabel y). Kita substitusikan $\psi(x, y)$ ke dalam persamaan ke dua dan kita akan dapatkan

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x + \frac{dh}{dy} = 2x - 2y,$$

jadi kita peroleh

$$\frac{dh}{dy} = -2y,$$

yang jika kita integralkan akan menghasilkan

$$h(y) = -y^2.$$

Jadi penyelesaian dari persamaan diferensial eksak di atas adalah

$$\psi(x, y) = 2x^2 + 2xy - y^2 = c,$$

dimana kontanta c dapat ditentukan dari kondisi awal.

Contoh 2: Selesaikan persamaan diferensial

$$(y \cos x + 2x \exp(y)) + (\sin x + x^2 \exp(y) - 1)y' = 0.$$

Jawab. Kita pertama perhatikan bahwa

$$P(x, y) = y \cos x + 2x \exp(y) \to P_y = \cos x + 2x \exp(y),$$

$$Q(x, y) = \sin x + x^2 \exp(y) - 1 \rightarrow Q_x = \cos x + 2x \exp(y).$$

Jadi $P_y = Q_x$, dan kita katakan persamaan diferensial tersebut eksak. Kita akan menemukan penyelesaiannya yaitu $\psi(x, y)$ dengan:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P = y \cos x + 2x \exp(y),$$

dan

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Q = \sin x + x^2 \exp(y) - 1.$$

Kita integralkan persamaan pertama terhadap variable x dan kita akan peroleh

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2 \exp(y) + h(y),$$

dimana $h(y)$ adalah suatu konstanta sebarang terhadap variabel x yang dapat tergantung pada variable y(fungsi dari variabel y). Kita substitusikan $\psi(x, y)$ ke dalam persamaan ke dua dan kita akan dapatkan

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sin x + x^2 \exp(y) + \frac{dh}{dy} = \sin x + x^2 \exp(y) - 1,$$

jadi kita peroleh

$$\frac{dh}{dy} = -1,$$

yang jika kita integralkan akan menghasilkan

$$h(y) = -y.$$

Jadi penyelesaian dari persamaan diferensial eksak di atas adalah

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2 \exp(y) - y = c,$$

dimana kontanta c dapat ditentukan dari kondisi awal. Seringkali persamaan diferensial yang bukan eksak dapat dibentuk menjadi eksak. Dalam hal ini konsep dari faktor integral diperlukan kembali. Perhatikan persamaan diferensial

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

bukan eksak, yakni $P_y \neq Q_x$. Kita dapat mengalikan persamaan direfensial tersebut di atas sedemikian sehingga persamaan itu menjadi eksak. Misalkan kita kalikan persamaan diferensial itu dengan sebuah fungsi $\mu(x, y)$ yang akan kita tentukan kemudian. Kita akan peroleh

$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Persamaan tersebut akan menjadi eksak jika memenuhi

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x,$$

yang akan memberikan

$$P\mu_y - Q\mu_x + (P_y - Q_x)\mu$$

Umumnya persamaan diferensial ini sulit untuk menemukan μ. Akan tetapi kita perhatikan kasus di mana $\mu(x, y) = \mu(x)$, sehingga kita akan punyai persamaan diferensial dalam μ, yakni

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}\mu,$$

di mana $\frac{P_y - Q_x}{Q}\mu$ harus merupakan fungsi dalam x. Jika ini dapat dipenuhi maka kita akan mudah untuk mendapatkan faktor integral μ dan kita akan mendapatkan persamaan diferensial eksak.

Contoh 1: Selesaikan persamaan diferensial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0. \tag{2.2.59}$$

Jawab. Kita pertama perhatikan bahwa

$$P(x, y) = 3xy + y^2 \rightarrow P_y = 3x + 2y,$$

$$Q(x, y) = x^2 + xy \rightarrow Q_x = 2x + y.$$

Jadi $P_y \neq Q_x$, dan kita katakan persamaan diferensial tersebut tidak eksak. Kita akan temukan faktor integral fungsi μ sehingga persamaan tersebut menjadi eksak. Kita kalikan persamaan 2.2.59 dengan μ dan kita dapatkan

$$\mu(3xy + y^2) + \mu(x^2 + xy)y' = 0. \tag{2.2.60}$$

Misalkan $\mu = \mu(x)$ (hanya fungsi dalam x, maka haruslah kita punyai

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}dx = \frac{(3x + 2y) - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}.$$

Jadi kita punyai $\mu = x$. Dan kita kalikan persamaan dengan $\mu = x$, kita peroleh

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0.$$

Pembaca perlu memeriksa bahwa $P_y = Q_x$, dan persamaan diferensial menjadi eksak. Penyelesaiannya kemudian mengikuti cara di atas (pembaca perlu menyelesaikan).

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 10 tentukan apakah persamaan diferensial yang diberikan adalah eksak atau tidak. Jika eksak temukan solusinya.

1. $(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$
2. $(3x^2-2xy+2)dx+(6y^2-x^2+3)dy=0$
3. $(2xy^2+2y)+(2x^2y+2x)y'=0$
4. $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax-by}{bx-cy}$
5. $(e^x\sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$
6. $(e^x\sin y+3y)dx-(3x-e^x\sin y)dy=0$
7. $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$
8. $(y/x+6x)dx+(\ln x-2)dy=0,\ x>0$
9. $(x\ln y+xy)dx+(y\ln x+xy)dy=0,\ x>0,\ y>0$
10. $\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\frac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$

Untuk soal 11 dan 12 tentukan nilai b sehingga persamaaan menjadi eksak dan selesaikanlah persamaannya.

11. $(xy^2+bx^2y)dx+(x+y)x^2dy=0$
12. $(ye^{2xy}+x)dx+bxe^{2xy}dy=0$

Untuk soal 13 sampai 15 merupakan persamaan tidak eksak tetapi menjadi eksak dengan faktor integral yang diberikan, tunjukkan dan selesaikanlah.

13. $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0,\ \mu(x,y)=1/xy^3$
14. $ydx+(2x-ye^y)dy=0,\ \mu(x,y)=y$
15. $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0,\ \mu(x,y)=xe^x$

Untuk soal no 16 sampai 20 temukan faktor integral dan kemudian selesaikanlah.

16. $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$
17. $y'=e^{2x}+y-1$
18. $dx+(x/y-\sin y)dy=0$
19. $ydx+(2xy-e^{-2y})dy=0$
20. $e^xdx+(e^x\cot y+2y\csc y)dy=0$
21. $(4(x^3/y^2)+3/y)dx+(3(x/y^2)+4y)dy=0$

2.2.6 Persamaan Diferensial Homogen

Dalam sub bagian ini kita akan membahas suatu persamaan diferensial yang kita sebut persamaan diferensial homogen. Bentuk umum dari persamaan diferensial homogen dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cara termudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial homogen yaitu dengan mendefinisikan variable baru

$$z = \frac{y}{x}$$

dan persaman diferensialnya menjadi

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z),$$

di mana ruas kiri dari persamaan diferensial ini diperoleh dengan menerapkan aturan rantai pada $y = zx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Dalam bentuk ini kita selalu akan memisahkan variabel-variabelnya, yakni

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z},$$

yang dengan mudah kita dapat selesaikan persamaan diferensial di atas dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan.

Contoh 1: Selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}.$$

Jawab: Kita dapat nyatakan persamaan diferensial di atas dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}.$$

Jadi persamaan diferensial di atas merupakan persamaan homogen. Misalkan $z = \frac{y}{x}$, maka kita peroleh

$$x\frac{dz}{dx} + z = z^2 + 2z.$$

Kita pisahkan variable-variabelnya, dan kita akan dapatkan

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2 + z} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz.$$

Kita integralkan kedua ruas persamaan dan kita dapatkan

$$\ln|x| + \ln c = \ln|z| - \ln|z+1| \rightarrow cx = \frac{z}{z+1}.$$

Kita substitusikan kembali $z = \frac{y}{x}$, dan kita dapatkan penyelesaian dari persamaan direfernsial, yaitu

$$y = \frac{cx^2}{1 - cx},$$

dimana konstanta c dapat ditentukan dari kondisi awalnya.

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 10 tunjukkan bahwa persamaan yang diberikan homogen, kemudian pecahkan dan gambarkan lapangan arah dan beberapa kurva integralnya.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x}{2x-y}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2y-y^3}{x^3-2xy^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-3y^2}{2xy}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$
9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-3y^2}$

2.2.7 Penerapan Persamaan Diferensial Orde satu

Dalam bagian ini kita akan bahas beberapa penerapan persamaan diferensial orde satu. Dalam kehidupan sehari-hari banyak penomena yang dalam menyelesaikannya menggunakan persamaan diferensial orde satu. Contoh penerapan diferensial orde satu sering dijumpai dalam masalah pencairan atau pemekatan suatu cairan, masalah suku bunga bank, masalah pembelahan dan pertumbuhan sel, masalah dalam mekanika dan lain sebagainya.

Masalah Konsentrasi suatu cairan

Dalam sub bagian ini kita akan bahas masalah pemekatan dan pencairan suatu zat cair. Dalam masalah ini, kita akan menemukan suatu formula yang menyatakan jumlah dari substansi sebagai suatu fungsi dari waktu t, dimana jumlah ini akan berubah secara teratur setiap satuan waktu. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1. Sebuah bak memuat 100 liter air. Karena suatu kesalahan 300 pon garam tertaburkan dalam bak yang mestinya diperlukan 200 pon. Untuk mengatasi masalah ini, dibuanglah air yang sudah bercampur garam dengan teratur 3 liter tiap menit. Dalam waktu yang sama ke dalam bak dimasukkan juga 3 liter air murni. Jika dijaga agar kondisi garam dalam bak merata setiap saat dengan diadakan pengadukan. Pertanyaan yang muncul adalah diperlukan berapa lama agar garam yang ada dalam bak sesuai yang diharapkan yaitu 200 pon?

Jawab: Untuk menyelesaikan masalah ini, selalu kita misalkan dengan suatu variabel, katakan vaiabel x menyatakan banyaknya pon garam dalam setiap saat. Maka sebuah persamaan akan di set dengan approximasi perubahan x dalam sebarang interval kecil waktu $\triangle t$. Dalam masalah ini $3\triangle$ liter akan dibuang dalam $\triangle t$ menit. Karena dalam setiap waktu akan selalu ada 100 liter dalam bak, x menyatakan banyaknya garam dalam solusi dalam suatu waktu t. Jadi kita dapat asumsikan bahwa banyaknya garam yang dibuang adalah kira-kira $\frac{3\triangle t}{100}x$. Jika $\triangle x$ menyatakan perkiraan garam yang hilang dalam sebarang waktu $\triangle t$, maka kita akan dapatkan hubungan

$$\triangle x \approx -\frac{3\triangle t}{100}x \rightarrow \frac{\triangle x}{\triangle t} \approx \frac{3}{100}x.$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa x adalah berkurang. Karena tidak ada garam yang dimasukkan, maka kita sampai pada persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}.$$

Persamaan diferensial di atas termasuk persamaan diferensial yang terpisahkan variablenya. Dengan mudah kita temukan solusi dari persaam diferensial itu dengan mengintegralkan kedua ruas setelah variabelnya dipisahkan. Kita akan peroleh penyelesaiannya, yakni

$$x = c\exp(-0.03t).$$

Pada saat $t = 0$, kita punyai $x = 300$, sehingga kita akan peroleh konstanta $c = 300$. Jadi penyelesaiannya menjadi

$$x = 300\exp(-0.03t),$$

yang menyatakan banyaknya garam sebagai suatu fungsi dari waktu t. Dan ketika $x = 200$, maka kita punyai relasi

$$200 = 300\exp(-0.03t),$$

dan kita temukan $t = 13.5$ menit.

Contoh 2. Sebuah tangki memuat 100 liter air asin yang mempunyai konsentrasi 3 pon per liter. Tiga liter dari air asin yang mempunyai konsentrasi 2 pon perliter dialirkan kedalam tangkin tersebut tiap menit, dan pada waktu yang bersamaan dialirkan juga keluar tangki 3 liter tiap menit. Jika dijaga agar konsentrasi larutan merata dengan pengadukan. Temukan kandungan garam dari air asin sebagai suatu fungsi dari waktu t!

Jawab: Misalkan x menyatakan banyaknya pon dari garam dalam solusi pada sebarang waktu t. Dari hipotesis 6 pon dari garam dimasukkan dan 3 liter air asin dialirkan ke luar setiap menit. Maka dalam waktu $\triangle t$, $6\triangle t$ pon dari garam dimasukkan dan kira-kira $\frac{x}{100}(3\triangle t)$ pon dialirkan keluar. Jadi dalam waktu $\triangle t$, perkiraan perubahan kandungan garam dalam tangki adalah

$$\triangle x \approx 6\triangle t - \frac{x}{100} 3\triangle t \rightarrow \frac{\triangle x}{\triangle t} \approx 6 - 0.03x.$$

Jadi kita akan dapatkan persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = 6 - 0.03x,$$

yang dapat kita nyatakan sebagai

$$\frac{dx}{6 - 0.03x} = dt \rightarrow \frac{dx}{0.03x - 6} = -dt.$$

Kita integralkan kedua ruas persamaan dan kita akan peroleh

$$x = 200 + \frac{100}{3} c \exp(-0.03t),$$

dimana c adalah konstanta sebarang. Dan kita tahu bahwa pada saat $t = 0$ kita punyai banyaknya garam $x = 300$. Kita substitusikan ke dalam penyelesaian persamaan di atas dan kita dapatkan konstanta $c = 3$. Sehingga banyaknya garam x sebagai suatu fungsi dari waktu dapata dinyatakan sebagai:

$$x = 100(2 + \exp(-0.03t)).$$

Masalah Model Populasi

Misalkan kita perhatikan sebuah populasi yang bertambah dengan pembelahan sel. Dalam model, kita asumsikan bahwa rata-rata pertumbuhan adalah proposional terhadap populasi awal. Asumsi ini konsisten terhadap pengamatan dari pertumbuhan bakteri. Sepanjang cukup ruang dan supply makanan untuk bakteri, kita juga asumsikan bahwa rata-rata kematian adalah nol. Ingat bahwa jika sebuah bakteri membelah, bakteri itu tidaklah mati tetapi menjadi dua sel baru. Sehingga kita akan mendapatkan model matematika untuk pertumbuhan bakteri adalah

$$\frac{dp}{dt} = k_1 p, \;\; p(0) = p_0,$$

dimana $k_1 > 0$ adalah konstanta proposional untuk rata-rata pertumbuhan dan p_0 adalah populasi bakteri pada saat $t = 0$. Untuk pertumbuhan manusia, asumsi bahwa rata-rata kematian adalah nol adalah jelas salah. Akan tetapi jika kita asumsikan bahwa kematian manusia merupakan kasus alam, kita bisa mengharap bahwa rata-rata kematiannya juga akan proposional terhadap populasinya. Sehingga kita akan peroleh model pertumbuhannya, yakni

$$\frac{dp}{dt} = k_1 p - k_2 p = (k_1 - k_2)p = kp,$$

dimana $k = k_1 - k_2$, dan k_2 adalah konstanta proposional untuk rata-rata kematian. Jika kita asumsikan $k_1 > k_2$ maka $k > 0$. Sehingga kita peroleh model matematikanya, yakni

$$\frac{dp}{dt} = kp, \;\; p(0) = p_0,$$

yang disebut hukum Maltus atau hukum eksponesial dari pertumbuhan populasi. Penyelesaian dari persamaan diferensial hukum maltus dapat dengan mudah kita temukan, yakni

$$p(t) = p_0 \exp(kt).$$

Contoh 1. Dalam tahun 1790 jumlah penduduk Amerika 3.93 juta, kemudian dalam tahun 1890 62.95 juta jiwa. Gunakan model pertumbuhan Maltus, perkiraan pertumbuhan penduduk Amerika sebagai fungsi dari waktu!

Jawab: Misalkan untuk $t = 0$ di tahun 1790, maka dari penyelesaian persamaan diferensial model Maltus, kita akan dapatkan

$$p(t) = 3.93 \exp(kt),$$

dimana $p(t)$ adalah jumlah penduduk dalam juta. Untuk menentukan konstanta k, kita perhatikan bahwa dalam tahun 1890, saat $t = 100$, kita dapatkan

$$p(100) = 62.95 = 3.93 \exp(100k).$$

Dan kita mudah menemukan k, yakni

$$k = \frac{\ln(62.95) - \ln(3.93)}{100} \approx 0.027737.$$

Jadi kita peroleh perkiraan pertumbuhan penduduk Amerika sebagai fungsi dari waktu adalah

$$p(t) = 3.93 \exp(0.027737t).$$

Contoh 2. Banyaknya bakteri pada suatu waktu tumbuh dalam rata-rata yang proposional dengan banyaknya bakteri saat sekarang. Jika populasi dari bakteri dalam suatu waktu banyaknya dua kali lipat dalam waktu satu jam, temukan banyaknya bakteri dalam waktu 3.5 jam!

Jawab: Misalkan x adalah banyaknya bakteri pada suatu waktu t. Maka model matematikanya adalah

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

dimana k adalah konstanta proposional. Dan solusi dari persamaan diferensial pertumbuhan bakteri adalah

$$x(t) = x_0 \exp(kt),$$

misalkan untuk saat $t = 0$ banyaknya bakteri awal $x = 100$, maka kita akan dapatkan

$$x(t) = 100 \exp(kt).$$

Pada waktu $t = 1$ jumlah bakteri menjadi dua kali lipat, maka

$$200 = x(1) = 100 \exp(k) \rightarrow k = \ln(2).$$

Dan kita peroleh perkiraan banyaknya bakteri setelah 3.5 jam yaitu

$$x(3.5) = 100 \exp(3.5 \ln(2)) = 100.(2^{3.5}) = 1131.$$

Dari kedua contoh dan penyelesaian persamaan diferensial hukum Maltus dapat diperhatikan bahwa populasi tumbuh secara eksponensial dari populasi awal. Dalam hal tersebut rata-rata pertumbuhan ditentukan dengan parameter k, dapat diperhatikan bahwa jika k besar maka pertumbuhan populasi akan lebih cepat bila parameter k kecil. Parameter ini juga menunjukkan perbedaan ukuran dan penyebaran populasi untuk k besar dan k kecil. Kenyataannya dalam alam, kebanyakan populasi tidak bertumbuh secara eksponensial murni karena populasi akan menuju tak hingga jika waktunya menuju tak hingga. Jadi kita perlu pemodelan yang lebih realistik untuk ini, jika suatu populasi menjadi besar maka mereka akan lebih kompetitif baik untuk makanan, air, tempat untuk hidup dan lain sebagainya. Dalam suatu arti, bahwa teory Darwin menunjukkan bahwa populasi tidak dapat kompetitif. Sebuah model pertumbuhan yang lebih realistis adalah

$$\frac{dp}{dt} = h(p)p = f(p),$$

yang tetap sama dengan persamaan pertumbuhan Maltus, hanya saja rata-rata pertumbuhannya dalam hal ini bergantung pada ukuran populasi itu sendiri. Persamaan diferensial pertumbuhan ini disebut persamaan *Autonomous* karena ruas kanan dari persamaan itu tidak bergantung pada waktu. Untuk mendapatkan sebuah model yang lebih realistis kita tentukan beberapa kenyataan

- Jika p kecil, maka populasi tumbuh ($h(p) > 0$).
- Jika p besar, maka populasi menurun ($h(p) < 0$).

Cara termudah untuk menggabungkan sifat tersebut di atas dalam sebuah persamaan diferensial, kita misalkan

$$h(p) = k - ap,$$

sedemikian sehingga jika p kecil, $h(p) \approx k > 0$ dan jika p besar $h(p) \approx -ap < 0$. Dengan ini kita peroleh persamaan populasi

$$\frac{dp}{dt} = k\left(1 - \frac{p}{K}\right)p,$$

dimana $K = \frac{k}{a}$. Persamaan di atas dikenal dengan *Persamaan Logistik* yang diperkenalkan oleh ahli matematika dari Belgium, Verhulst dalam tahun 1838. Bagian dari solusi yang cukup menarik adalah dimana turunan atau populasi tidak tumbuh atau menurun. Ini akan terjadi jika

$$\frac{dp}{dt} = 0,$$

yang disebut titik seimbang (equilibrium), karena solusi tidak tumbuh atau menurun. Tetapi bukan berarti bahwa solusinya stabil. Untuk persamaan logistik, equilibrium terjadi jika

$$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow \left(1 - \frac{p}{K}\right) = 0,$$

yang akan memberikan solusi equilibrium

$$p = 0 \text{ dan } p = K.$$

Lebih umum, solusi equilibrium dapat ditentukan dari sebarang persamaan diferensial dalam bentuk

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

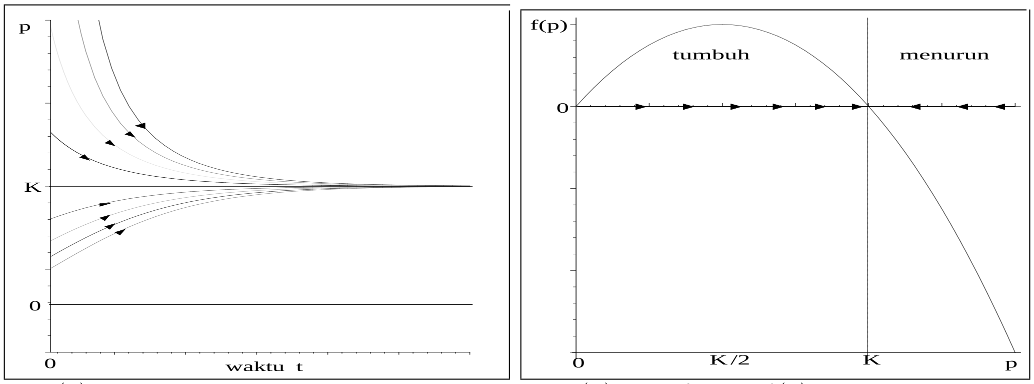
Solusi titik tetap atau solusi equilibrium y_c diberikan dengan

$$f(y_c) = 0.$$

Equilibrium ini juga sering disebut juga titik kritik(*critical points*). Kita kembali lagi ke masalah persamaan logistik di atas dan titik-titik kritiknya. Secara khusus kita akan membahas stabilitas dari titik-titik kritiknya. Kita katakan bahwa untuk p kecil populasi tumbuh, tetapi untuk p besar populasi menurun. Jadi dalam hal ini kita punyai

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &> 0 \text{ (tumbuh), jika } 0 < p < K,\\ \frac{dp}{dt} &< 0 \text{ (menurun), jika } p > K.\end{aligned}$$

Kita hanya memperhatikan jika $p > 0$ karena kita berbicara mengenai masalah ukuran populasi. Perilaku dynamic dari solusi dapat diperhatikan dalam gambar (2.2) berikut: Dalam gambar (a) ditunjukkan plot solusi p terhadap waktu t. Solusi equilibrium $p = K$ disebut *Asimptotic stabil (asymptotically stable)* karena semua solusi menuju ke $p = K$ jika $t \to \infty$. Ini sangat bertolak belakang dengan solusi equilibrium $p = 0$ yang adalah solusi tak stabil karena semua solusi menjauhinya. Cara lain untuk melihat perilaku dari solusi persamaan logistik ini adalah dengan memplot fungsi $f(p)$ terhadap p(gambar (b)). Kita lihat bahwa jika $f(p) > 0$ kita punyai pertumbuhan dan sebaliknya jika $f(p) < 0$ kita punyai penurunan. Catat bahwa solusi equilibrium berkaitan dengan perpotongan kurva $f(p)$ terhadap $p = 0$. Kita juga mencatat bahwa semua solusi baik dibawah maupun di atas equilibrium $p = K$ menuju $p = K$ jika $t \to \infty$. Dalam kasus ini K disebut titik jenuh. Walaupun hampir semua perilaku secara kualitatif sudah kita ketahui, namun kita dapat mencatat bahwa kita belum menemukan solusinya dan kita perhatikan bahwa model ini



(a) Plot solusi p terhadap wakyu t. (b) Plot fungsi $f(p)$ terhadap p.

Gambar 2.2: Perilaku dynamik dari persamaan Logistik.

sangat berbeda dari kasus yang linear. Dengan metode variabel terpisah yang sudah kita pelajari, maka dapat kita tentukan solusi dari persamaan logistik yaitu

$$\frac{dp}{\left(1-\frac{p}{K}\right)p} = kdt \rightarrow \left(\frac{1}{p} + \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{p}{K}}\right) dp = kdt.$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan akan kita peroleh

$$\ln|p| - \ln\left|1-\frac{p}{K}\right| = kt = c \rightarrow \frac{p}{1-\frac{p}{K}} = C\exp(kt).$$

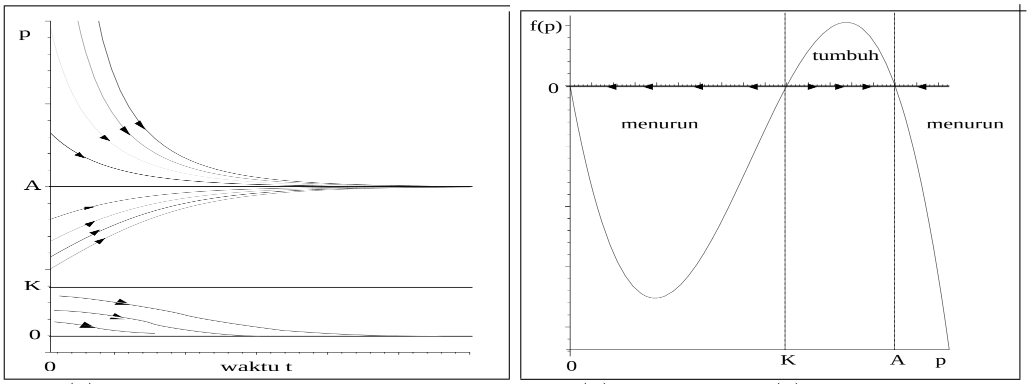
Dengan mengasumsikan populasi awal p_0, maka kita akan punyai solusi dari persamaan logistik yaitu

$$p = \frac{p_0 K}{p_0 + (K-p_0)\exp(-kt)}.$$

Jelas bahwa jika $t \rightarrow \infty$ maka $p \rightarrow K$. Jadi sekali lagi dapat kita lihat bahwa $p = K$ adalah equilibrium stabil secara asimptotik dan $p = 0$ adalah equilibrium yang tidak stabil. Persamaan logistik merupakan model populasi yang cukup menarik karena populasi tumbuh dan akhirnya akan mencapai suatu limit dari populasi. Kita dapat juga memikirkan modifikasi dari model logistik yang tidak kalah menariknya. Misalkan sejumlah species diproduksi ulang dari sejumlah besar populasi(misalnya burung merpati pos).Dalam kasus ini adalah jika populasi dibawah level tertentu akan tutun. Dalam hal ini kita modifikasi persamaan logistik dalam bentuk

$$\frac{dp}{dt} = -k\left(1-\frac{p}{K}\right)\left(1-\frac{p}{A}\right)p = f(p).$$

Dalam gambar (2.3), kita plot analogi dari gambar (2.2). Dalam modifikasi dari model logistik dapat diperhatikan bahwa populasi akan menuju nol jika pupolasi awalnya di bawah $p = K$. Dan jika populasi lebih dari K, maka populasinya akan mencapai titik jenuhnya pada titik equilibrium $p = A$.



(a) Plot solusi p terhadap wakyu t. (b) Plot fungsi $f(p)$ terhadap p.

Gambar 2.3: Perilaku dynamik dari modifikasi Persamaan Logistik.

Masalah Bunga Bank

Misalkan uang sebanyak $\$A$ diinvestasikan dalam suatu bank dengan bunga 6 % pertahun. Banyaknya uang P setelah satu tahun akan menjadi

$$
\begin{aligned}
P &= A\,(1+0.06)\,, \text{ jika bunga diperhitungkan tiap tahun} \\
P &= A\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^2, \text{ jika bunga diperhitungkan tiap } \tfrac{1}{2} \text{ tahun} \\
P &= A\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^4, \text{ jika bunga diperhitungkan tiap } \tfrac{1}{4} \text{ tahun} \\
P &= A\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12}, \text{ jika bunga diperhitungkan tiap bulan.}
\end{aligned}
$$

Secara umum banyaknya uang setelah satu tahun menjadi

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^m,$$

dimana bunga $r\%$ pertahun dan bunga diperhitungkan m kali tiap tahun. Dan pada akhir tahun ke n banyaknya uang akan menjadi

$$P = A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^n.$$

Jika banyaknya penghitungan bunga tak terhingga atau menuju tak hingga, maka kita akan peroleh

$$P = \lim_{m\to\infty} = A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^n = \lim_{m\to\infty} = A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{nr}.$$

Tetapi

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}} = e,$$

Jadi kita akan dapatkan

$$P = Ae^{nr}.$$

Akhirnya dengan mengganti n dengan t, kita akan dapatkan

$$P = Ae^{rt},$$

yang memberikan arti bahwa setelah akhir waktu ke t, jika uang sejumlah \$$A$ diinvestasikan di suatu bank yang memberikan bunga r% pertahun secara kontinu. Dan persamaan diferensial yang berkaitan dengan solusi diatas adalah

$$\frac{dP}{dt} = rP.$$

Contoh 1. Berapa lama waktu yang diperlukan jika uang sebesar \$1 akan menjadi dobel, jika diberikan bunga 4% pertahun secara kontinu?

Jawab: Dalam hal ini kita punyai $r = 0.04$, dan kita punyai persamaan diferensialnya yaitu

$$\frac{dP}{dt} = 0.04P.$$

Penyelesaiannya adalah $P = Ae^{0.04t}$ dengan $A = 1$. Kita harus menentukan berapa t jika $P = 2$, sehingga kita dapatkan relasi

$$2 = e^{0.04t} \to t = \frac{\ln(2)}{0.04} = 17\frac{1}{3} \text{ tahun.}$$

Contoh 2. Berapa banyak uang yang akan diperoleh jika \$100 diinvestasikan dengan bunga $4\frac{1}{2}$% pertahun setelah 10 tahun?

Jawab: Dalam hal ini kita punyai $r = 0.045$, $A = 100$, dan $t = 10$. Jadi kita akan peroleh

$$P = 100e^{0.045*10} = 100e^{0.45} = \$156.831.$$

Masalah Perubahan Suhu

Telah dibuktikan dengan percobaan bahwa dengan kondisi tertentu, rata-rata perubahan suhu benda yang dimasukkan dalam sebuah medium yang temperaturnya diusahakan konstan yang berbeda dari suhu benda itu adalah sebanding dengan perbedaan antara kedua suhu itu. Secara matematika penyataan di atas dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dT_b}{dt} = -k\left(T_b - T_M\right),$$

dimana k adalah konstanta positif yang merupakan konstanta pembanding. T_b adalah suhu dari benda pada sebarang waktu t, dan T_M adalah suhu konstan dari medium. Dalam menyelesaikan masalah perubahan suhu dengan kontanta pembandingnya k, adalah perlu dibutuhkan kondisi lain yang merupakan kondisi awal.

untuk contohnya kita perlu tahu suhu awal dan suhu dari benda untuk suatu waktu t. Dengan dua kondisi tersebut, memungkinkan kita menemukan nilai konstanta pembanding k dan sebarang konstanta integrasi yang muncul c.

Contoh 1. Sebuah benda dengan suhu 180^o dimasukkan dalam suatu cairan yang mempunyai suhu konstan 60^o. Dalam satu menit, suhu benda yang dimasukkan menjadi 120^o. Berapa lama waktu yang diperlukan sehingga suhu benda itu menjadi 90^o?

Jawab: Misalkan T menyatakan suhu benda pada sebarang waktu t. Dalam hal ini kita punyai $T_M = 60$. Jadi kita punyai persamaan diferensial

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-60) \rightarrow \frac{dT}{T-60} = -kdt,$$

dimana tanda negatif menunjukkan penurunan suhu T. Kita integralkan sekaligus kita gunakan kondisi-kondisi awalnya, kita dapatkan

$$\int_{T=180}^{120} \frac{dT}{T-60} = -k\int_{t=0}^{1} dt.$$

Kita peroleh

$$\ln(0.5) = -k, \text{ atau } k = \ln(2).$$

Sekarang,

$$\int_{T=180}^{90} \frac{dT}{T-60} = -\ln(2)\int_{t=0}^{t} dt.$$

Jadi

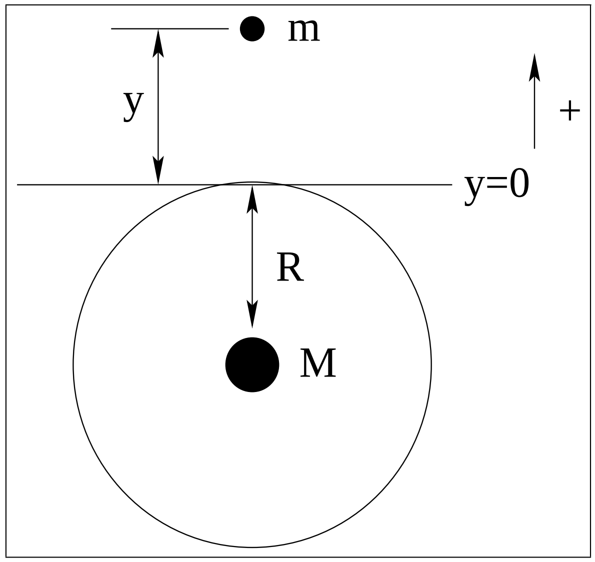
$$\ln(0.25) = -\ln(2)t \rightarrow t = 2.$$

Jadi akan diperlukan waktu 2 menit agar suhu benda itu akan menjadi 90^o.

Masalah Mekanika Klasik

Dalam bagian ini kita akan mendiskusikan masalah-masalah yang berkaitan dengan gerakan partikel sepanjang garis lurus. Dengan menggunakan hukum Newton pertama dari gerakan, bahwa benda diam akan tetap diam dan benda yang bergerak akan tetap bergerak (akan tetap mempertahankan kecepatannya) kecuali ada gaya luar yang mempengaruhinya. Dengan hukum ke dua Newton, bahwa rata-rata perubahan dari momentum(momentum=massa x kecepatan) suatu benda adalah berbanding lurus dengan gaya luar yang mempengaruhi benda itu. Secara matematik, hukum kedua ini dapat dinyatakan sebagai

$$F = km\frac{dv}{dt}, \tag{2.2.61}$$



Gambar 2.4: Gerakan vertikal.

dimana m adalah massa benda, v adalah kecepatan, dan $k > 0$ adalah konstanta pembanding yang besarnya bergantung pada satuan yang digunakan. Jika digunakan satuan kaki untuk jarak, pon untuk gaya, slug untuk mass($=\frac{1}{32}$ pon), dan detik untuk waktu, maka $k = 1$ dan (2.2.61) menjadi

$$F = m\frac{dv}{dt} = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}, \tag{2.2.62}$$

dimana a adalah rata-rata perubahan kecepatan(biasanya disebut percepatan) dari benda, s adalah jarak yang ditempuh dari benda dari titik tetap. Sebuah gaya 1 lb akan diberikan pada benda dengan massa 1 slug maka percepatannya benda itu adalah 1 ft/det^2. Ingat bahwa F, a, dan v merupakan vektor artinya kecuali mempunyai besaran juga mempunyai arah. Sehingga sangat penting tanda yang terdapat dalam vektor-vektor tersebut. Jika kita tulis

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt},$$

dan kita tahu bahwa $v = \frac{ds}{dt}$, maka persamaan (2.2.62) dapat ditulis sebagai

$$F = mv\frac{dv}{ds}.$$

Newton juga memberikan ke kita hukum atraksi antara dua benda. Jika m_1 dan m_2 adalah dua benda yang berjarak r, maka gaya atraksi antara kedua benda tersebut adalah

$$F = k\frac{m_1m_2}{r^2}, \tag{2.2.63}$$

dimana k adalah suatu konstanta pembanding. Sekarang kita akan mempelajari gerakan vertikal. Misalkan, perhatikan gambar (2.4) dengan
M= massa dari bumi, m= massa benda, R= jari-jari bumi, dan y= jarak benda di atas permukaan bumi.

Dengan menggunakan rumus (2.2.63), maka gaya antara benda dan bumi, kita asumsikan massa bumi dan benda terkonsentrasi pada pusatnya, menjadi

$$F = -G\frac{Mm}{(R+y)^2},$$

dimana G adalah konstanta gravitasi. Tanda negatif menunjukkan bahwa gaya resultannya ke bawah, ke pusat bumi. Jika jarak y dari benda di atas permukaan bumi sangat kecil jika dibandingkan dengan jari-jari bumi R, maka kesalahan dari penulisan gaya atraksinya menjadi

$$F = -\frac{GMm}{R^2}$$

juga akan kecil. Jari-jari bumi R kira kira 4000 mil. Jika jarak benda kira-kira 1 mil masih dianggap kecil karena $(4000 \times 5280)^2$ kaki dan $(4001 \times 5280)^2$ kaki akan sangat kecil perbedaannya. Dengan mengganti s dengan y dalam persamaan (2.2.62) maka kita akan peroleh

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^2}.$$

Karena G, M, dan R adalah konstan, kita bisa mengganti $\frac{GM}{R^2}$ dengan konstanta baru, misalkan dengan g. Oleh karena itu kita peroleh persamaan diferensial dari benda jatuh karena gaya gravitasi bumi, yakni

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -gm, \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -gm, \tag{2.2.64}$$

dimana $v = \frac{dy}{dt}$. Dari persamaan (2.2.64) kita bisa dapatkan bahwa gaya atraksi dari bumi ke bawah adalah

$$\frac{d^y}{dt^2} = -g. \tag{2.2.65}$$

Jadi konstanta g merupakan suatu percepatan benda berkaitan dengan gaya atraksi bumi. Gaya ini sering disebut dengan gaya gravitasi bumi. Biasanya di tempat berbeda dari bumi akan memiliki gaya gravitasi yang berbeda karena perbedaan ketinggiannya. Gaya gravitasi bumi rata-rata 32 $kaki/det^2$. Jika kita integralkan persamaan (2.2.65) memberikan persamaan kecepatan

$$v = \left(-\frac{dy}{dt}\right) = -gt + c_1.$$

Dan jika kita integrasikan sekali lagi kita akan peroleh persamaan jaraknya, yakni

$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2.$$

2.2.8 Soal Soal Tambahan

Selesaikan persamaan diferensial berikut.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-1}{x-y-5}$
2. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{e^x+1}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y+y^3}$, Hint: misalkan $u = x^2$
4. $(2y + 3x)dx = -xdy$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1-2xy^2}$, $y(0) = 1$
6. $(x^2y + xy - y)dy + (x^2y - 2x^2)dy = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2+1}$, $y(-1) = 1$
8. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 - y^2}dy$
9. $yy' - xy^2 + x = 0$
10. $xdy + ydx = x^3y^6dx$
11. $(2y - x^3)dx + xdy = 0$
12. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$
13. $(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$
14. $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)dy = 0$
15. $y(y^2 - 2x^2)dx + x(2y^2 - x^2)dx = 0$
16. $xy' = y + xe^{y/x}$
17. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$
18. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{3+3y^2-x}$, $y(0) = 0$
19. $(x + e^y)dy - dx = 0$
20. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+1}{x^2+2y}$
21. $(\cos 2y - \sin x)dx - 2\tan x \sin 2ydy = 0$
22. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y+\sqrt{x^2-y^2}}{2x}$
23. $(x^2y + xy - y)dx + (x^2y - 2x^2)dy = 0$
24. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$, $y(1) = -2$
25. $2\sin y \cos xdx + \cos y \sin xdy = 0$
26. $\sin y\frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y)$, $v = \frac{1}{\cos y}$
27. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$

2.2.9 Latihan Soal Pemodelan Sederhana

Selesaikan masalah pemodelan sederhana berikut.

1. Jika jumlah penduduk suatu kota berlipat ganda dalam 50 th, dan jika kecepatan bertambah sebanding dengan jumlah penduduk. Dalam berapa tahun jumlah penduduk berlipat tiga?

2. Suatu bakteri tertentu mempunyai kecepatan bertambah sebanding dengan jumlah saat ini. (a) Jika jumlah berlipat ganda dalam 4 jam, berapa jumlah setelah 12 jam? (b) Jika setelah 3 jam berjumlah 10^4 dan setelah 5 jam berjumlah 4.10^4, berapa jumlah awalnya?

3. Suatu zat mendingin di udara sebanding dengan beda suhu zat dan udara. Jika suhu udara $300K$ dan suhu zat mendingin dari $370K$ menjadi $340K$ dalam 15 menit. Bilamanakah suhu menjadi $310K$?

4. Suatu benda bergerak pada garis lurus dengan kecepatan 2 kali lebih besar jaraknya dari titik tertentu pada garis itu. Jika $v = 5$ bila $t = 0$, carilah persamaan geraknya?

5. Radium lenyap dengan kecepatan sebanding dengan jumlah sekarang. Jika waktu parohnya 1600 tahun. Temukan prosentasi berkurangnya Radium dalam 100 tahun?

6. Suhu udara $290K$. Zat tertentu mendingin dari $370K$ ke $230K$ dalam 10 menit. Carilah suhu setelah 40 menit?

7. Radio aktif Plutonium 240 berkurang dan memenuhi persamaan $\frac{dQ}{dt} = -0.0525Q$. (a) Temukan waktu parohnya! (b) Jika sekarang ada 50 mg, berapa sisa setelah 10 tahun.

8. Radium 226 mempunayi waktu paroh 1620 tahun. Berapa lama massa menjadi 1/4 bagiannya?

9. Sebuah pegas yang beratnya di abaikan tergantung vertikal. Suatu massa m kg digantungkan pada ujung pegas. Jika massa bergerak dengan kecepatan $v_0\, m/dt$. Apabila pegas tidak direntangkan, carilah kecepatan v sebagai fungsi rentangan x!

10. Carilah waktu yang diperlukan agar sejumlah uang berliupat dua pada 5% bunga yang terus menerus. Petunjuk $dx/dt = 0.05x$, jika x adalah jumlah setelah t tahun.

Bab 3

Persamaan Diferensial Order Dua

3.1 Pendahuluan

Terdapat dua alasan mengapa persamaan-persamaan linear yang berorde dua menjadi sangat penting dalam mempelajari persamaan diferensial. Pertama bahwa persamaan-persamaan linear orde dua mempunyai struktur teoritik yang kaya dengan metoda-metoda sistematis dalam menentukan solusi. Dengan metoda yang sitematis ini sangat mudah dimengerti untuk level matematika yang sederhana. Alasan kedua adalah kita tidak mungkin mempelajari lebih jauh mengenai mekanika cairan, aliran panas, gerakan gelombang ataupun penomena elektromagnetik tanpa menemukan solusi persamaan linear orde dua.

3.1.1 Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari pokok bahasan III ini, diharapkan anda mampu memahami persamaan differensial order dua.

3.1.2 Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari pokok bahasan III ini anda dapat

1. memahami persamaan diferensial homogen dengan koeffisien konstan
2. memahami pengertian bergantung linear dan wronskian
3. memahami persamaan tak homogen dengan metoda koeffisien tak tentu
4. menyelesaikan persamaan diferensial dengan operator $\mathcal{D}$.
5. menyelesaikan persamaan diferensial dengan metoda vareasi parameter
6. memahami tentang aplikasi persamaan diferensial.

3.2 Penyajian Materi

Dalam bab ini kita akan membahas persamaan differensial linear orde dua yang mempunyai bentuk umum

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{3.2.1}$$

dimana $p(t)$, $q(t)$, dan $g(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval waktu I, dan dimana $y' = \frac{dy}{dt}$. Hal yang sangat berbeda dengan persamaan differensial orde satu adalah keunikan solusi dari persamaan differensial orde dua disyaratkan dengan dua kondisi awal yang harus dipenuhi yakni $y(t_0) = y_0$ dan $y'(t_0) = {y'}_0$. Tetapi pada akhirnya untuk kita bahwa persamaan differensial orde dua akan lebih mudah menyelesaikannya dibandingkan dengan persamaan differensial orde satu. Dalam hal ini kita hanya berpedoman pada tiga aturan, yakni

- $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$
- $\left(e^{\lambda t}\right)'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$
- $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \to \lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Kita akan menggunakan ketiga aturan di atas dan aturan aljabar dalam membahas persamaan differensial orde dua dalam bab ini. Secara umum persamaan differensial orde dua lebih penting jika kita bandingkan dengan persamaan differensial orde satu karena persamaan differensial orde dua mendiskripsikan lebih luas variasi dari suatu penomena. Untuk contohnya, kita akan menunjukkan dalam bab ini seperti pendulum sederhana, sistem massa pegas dan penomena osilator lain yang dapat dinyatakan dengan persamaan differensial orde dua.

3.2.1 Persamaan Homogen dengan Koeffisien Konstan

Kita mulai dengan membahas dengan apa yang dimaksud dengan koefisien konstan dan persamaan homogen itu. Yang dimaksud dengan koefisien konstan adalah dengan mengambil fungsi-fungsi $p(t)$ dan $q(t)$ dalam (3.2.1) dengan nilai konstan dan jika kita ambil fungsi $g(t) = 0$ akan kita sebut sebagai persamaan homogen. Jadi dalam hal ini kita akan dapat persamaan differensial homogen dengan koefisien konstan yang dapat dinyatakan sebagai

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3.2.2}$$

Sebagai contoh ilustrasi dari perilaku persamaan orde dua, kita ambil contoh kasus dimana $b = 0$ dan $a = 1$ dalam persamaan (3.2.2), jadi

$$y'' + cy = 0. \tag{3.2.3}$$

Jika $c = -1$, maka kita akan menemukan solusi dari persamaan $y'' = y$. Bentuk fungsi yang bagaimanakah jika kita mendifenesialkan dua kali akan memberikan fungsi semula?. Kita perhatikan tiga aturan di atas, jawabannya adalah sebuah fungsi eksponensial. Dalam kenyataannya kita punyai

$$y'' - y = 0 \text{ maka } y = c_1 e^{(t)} \text{ atau } y = c_2 e^{(-t)}. \tag{3.2.4}$$

Menarik dalam hal ini, kita punyai dua solusi dalam masalah ini. Dengan cara yang sama kita juga akan mendapatkan dua solusi untuk $c = 1$, yakni

$$y'' + y = 0 \text{ maka } y = c_1 \cos(t) \text{ atau } y = c_2 \sin(-t). \tag{3.2.5}$$

Dapat kita catat bahwa dua solusi itu membedakan dengan persamaan differensial orde satu yang dibangun oleh satu solusi dengan sebuah konstanta sebarang. Dengan alasan ini kita memerlukan dua kondisi awal untuk masalah persamaan differensial orde dua. Jadi solusi umum dari persamaan differensial orde dua harus menghasilkan dua konstanta sebarang sehingga kita bisa memenuhi kondisi awalnya. Untuk lebih jelasnya, terdapat cara mudah untuk menemukan solusi umum persamaan differensial orde dua homogen dengan koefisien konstan. Perhatikan kembali persamaan (3.2.2). Dengan mengasumsikan solusinya dalam bentuk $y = e^{(\lambda t)}$, maka kita akan dapatkan persamaan kuadrat dalam λ yang nantinya akan kita namakan *persamaan karakteristik* untuk λ, yakni

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \text{ maka } \lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.2.6}$$

Jadi dua solusi kita adalah $y_1 = e^{(\lambda_+ t)}$ dan $y_2 = e^{(\lambda_- t)}$, dan solusi umumnya dapat dinyatakan sebagai

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{(\lambda_+ t)} + c_2 e^{(\lambda_- t)}. \tag{3.2.7}$$

Kontanta c_1 dan c_2 dapat ditentukan dari kondisi awal $y(t_0)$ dan $y'(t_0)$. Berikut beberapa contoh yang akan memberikan gambaran yang lebih jelas

Contoh 1. Selesaikan $y'' + 5y' + 6y = 0$ dengan $y(0) = 2$ dan $y'(0) = 3$.

Jawab. Kita misalkan solusi kita dalam bentuk $y = e^{(\lambda t)}$, dan kita substitusikan ke persamaan, sehingga kita akan peroleh persamaan karakteristiknya, yakni $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, yang dengan mudah kita selesaikan, dan akan kita dapatkan $\lambda = -2$ atau $\lambda = -3$. Jadi solusi umumnya menjadi

$$y = c_1 e^{(-2t)} + c_2 e^{(-3t)}.$$

Dengan kondisi awal yang diberikan maka kita peroleh

$$y(0) = 2 = c_1 + c_2 \text{ dan } y'(0) = 3 = -2c_1 - 3c_2.$$

Dari kedua relasi itu, kita akan peroleh $c_1 = 9$ dan $c_2 = -7$, sehingga solusi tunggal kita adalah

$$y = 9e^{(-2t)} - 7e^{(-3t)}.$$

Kita akan nyatakan diskusi kita dalam bentuk yang lebih formal, dengan memperkenalkan notasi

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi, \tag{3.2.8}$$

dimana p dan q adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval I (artinya, $\alpha < t < \beta$). Kita akan buktikan bahwa jika $L[y] = 0$ (persamaan homogen) dengan

$y(t_0) = y_0$ dan $y'(t_0) = y'_0$ maka terdapat sebuah solusi yang tunggal. Dalam hal ini solusi tersebut juga terdefferensialkan dua kali, hal tersebut jelas dikarenakan persamaan differensial kita berorde dua. Lebih lanjut untuk melengkapi teorema keberadaan dan ketunggalan, kita akan membahas konsep tentang *superposisi*, yaitu penggabungan solusi-solusi yang akan membentuk solusi umum. Dalam persamaan differensial orde dua ini kita selalu mendapatkan dua solusi, kita akan gabungkan dua solusi tersebut sehingga menjadi solusi umumnya. Perhatikan

- Jika y_1 adalah sebuah solusi maka $L[y_1] = 0$,
- Jika y_2 adalah sebuah solusi maka $L[y_2] = 0$,

Kemudian kita akan bertanya apakah $y = c_1y_1 + c_2y_2$ juga solusi? Jawabanya adalah ya, perhatikan

$$\begin{aligned} L[y] &= L[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= (y = c_1y_1 + c_2y_2)'' + (y = c_1y_1 + c_2y_2)' + q(y = c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ketunggalan dari solusi karena harus memenuhi kondisi-kondisi awalnya. Jika kita punyai kondisi awal $y(t_0) = y_0$ dan $y'(t_0) = y'_0$ maka kita akan peroleh

$$y_0 = c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) \text{ dan } y'_0 = c_1y'_1(t_0) + c_2y'_2(t_0).$$

Kedua persamaan di atas memuat dua konstanta yang belum diketahui c_1 dan c_2, yang jika kita selesaikan akan kita dapatkan

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_0y'_2(t_0) - y'_0y_2(t_0)}{y_1(t_0)y'_2(t_0) - y'_1(t_0)y_2(t_0)}, \\ c_2 &= \frac{-y_0y'_1(t_0) + y'_0y_1(t_0)}{y_1(t_0)y'_2(t_0) - y'_1(t_0)y_2(t_0)}. \end{aligned}$$

Sepanjang

$$W(y_1, y_2)y_1(t_0)y'_2(t_0) - y'_1(t_0)y_2(t_0) \neq 0$$

maka kita tentu akan dapat menemukan nilai c_1 dan c_2. Jika $W = 0$, kita dapat catat bahwa penyebut akan menuju nol dan c_1 dan c_2 menuju tak hingga, ini tak memiliki arti. Lebih lanjut kita syaratkan bahwa $W \neq 0$ untuk semua t, karena t_0 yang kita pakai di atas telah dipilih sembarang. Besaran W kita sebut dengan $Wronskian$ dan sangat penting dalam persamaan differensial.

Teorema: Jika y_1 dan y_2 adalah solusi-solusi dan

$$L[y] = 0 \text{ dan } W(y_1, y_2) \neq 0$$

untuk suatu t_0, maka

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

adalah solusi umum, dimana konstanta sebarang c_1 dan c_2 diperoleh dari semua kemungkinan solusi dari $L[y] = 0$.

Contoh. Temukan nilai dari $Wronskian$ dari contoh pertama di atas.

Jawab. Kita perhatikan kembali dari contoh pertama di atas bahwa $y_1 = e^{(-2t)}$ dan $y_2 = e^{(-3t)}$, maka

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{(-2t)} \left(e^{(-3t)}\right)' - e^{(-3t)} \left(e^{(-2t)}\right)' = -e^{(-5t)} \neq 0.$$

Jelas kita tahu bahwa y_1 dan y_2 adalah pembangun ($basis$) dari solusi contoh pertama di atas.

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 6 tentukan solusi umum persamaan differensial yang diberikan.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $6y'' - y' - y = 0$
3. $y'' + 5y' = 0$
4. $y'' - 9y' + 9y = 0$
5. $y'' + 3y' + 2y = 0$
6. $2y'' - 3y' + y = 0$
7. $y'' - 2y' - 2y = 0$

Untuk soal no 8 sampai 15 tentukan solusi masalah nilai awal

8. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
9. $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
10. $6y'' - 5y' + y = 0, y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
11. $y'' + 3y' = 0, y(0) = -2$, $y'(0) = 3$.
12. $y'' + 5y' + 3y = 0, y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
13. $2y'' + y' - 4y = 0, y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
14. $y'' + 8y' - 9y = 0, y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
15. $4y'' - y' = 0, y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

3.2.2 Bergantung Linear dan Wronskian

Kita sekarang akan membahas konsep penting tentang bergantung linear, bebas linear dan akan menunjukkan bahwa konsep tersebut erat kaitannya dengan wronskian. Kita mulai dengan definisi tentang bergantung atau bebas linear dari dua fungsi f dan g. Fungsi-fungsi f dan g dikatakan bergantung linear jika terdapat konstanta $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ sedemikian sehingga

$$c_1 f + c_2 g = 0.$$

Kemudian karena $c_1 \neq 0$ dan $c_2 \neq 0$ maka kita dapat menyatakan fungsi f dalam fungsi g. Jadi $f = -\frac{c_1}{c_2} g$. Kita dapat mengartikan bahwa fungsi f sama dengan fungsi g kecuali hanya berbeda dalam faktor konstanta. Jadi fungsi f dan g bergantung karena secara esensial kedua fungsi tersebut sama. Sebaliknya dua fungsi f dan g dikatakan bebas linear jika

$$c_1 f + c_2 g = 0$$

hanya terpenuhi jika $c_1 = c_2 = 0$. Jadi kita tidak mungkin menyatakan satu fungsi ke dalam yang lain, karena kedua fungsi itu memang berbeda.

Contoh. Apakah fungsi-fungsi $f = \sin(t)$ dan $g = \cos(t - \pi/2)$ bebas atau bergantung linear? Bagaimana dengan e^t dan e^{2t}?

Jawab. Kita mulai dengan definisi kita

$$c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t - \pi/2) = 0.$$

Kita catat bahwa $\cos(t-\pi/2) = \cos(t)\cos(\pi/2) + \sin(t)\sin(\pi/2)$, maka kita kemudian dapatkan

$$c_1 \sin(t) + c_2 \sin(t) = 0 \rightarrow c_1 = -c_2.$$

Jadi terdapat $c_1, c_2 \neq 0$ sedemikian sehingga $c_1 f + c_2 g = 0$. Kita simpulkan kedua fungsi itu bergantung linear. Dalam kasus kedua

$$c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0.$$

Kita tak akan menemukan konstanta c_1 dan c_2 yang tidak nol yang memenuhi kondisi tersebut. Satu-satunya kemungkinan kondisi di atas terpenuhi jika kita ambil $c_1 = c_2 = 0$. Jadi fungsi e^t dan e^{2t} saling bebas linear. Walaupun cara pemeriksaan di atas bisa dilakukan, tetapi kita ingin mendapatkan metode yang lebih tepat untuk menentukan kebebasan dan kebergantungan linear dua fungsi. Kita perhatikan lagi dua fungsi yang terturunkan f dan g pada suatu interval waktu, dan kita perhatikan

$$c_1 f + c_2 g = 0.$$

Sekarang kita hitung nilai persamaan di atas pada suatu waktu t_0 pada suatu interval waktu yang diberikan, dan kita juga temukan turunannya

$$c_1 f(t_0) + c_2 g(t_0) = 0 \rightarrow c_1 f'(t_0) + c_2 g'(t_0) = 0.$$

Ini akan memberikan dua buah persamaan dengan konstanta yang belum diketahui c_1 dan c_2. Dari persamaan yang kedua kita dapatkan

$$c_2 = -c_1 \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$$

dan kita substitusikan kedalam persamaan pertama yang akan memberikan

$$c_1 \left(f(t_0) - \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)} g(t_0) \right) = 0.$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $g'(t_0)$, kita dapatkan

$$c_1 \left(f(t_0)g'(t_0) - f'(t_0)g(t_0) \right) = c_1 W(f(t_0), g(t_0)) = 0.$$

Jadi kita dapatkan dua kemungkinan

- Jika $W \neq 0$ maka $c_1 = 0$ yang mengakibatkan $c_2 = 0$, jadi bebas linear.
- Jika $W = 0$ maka $c_1 \neq 0$ dan $c_2 \neq 0$, jadi bergantung linear.

Jadi kita simpulkan jika wronskian dua buah fungsi adalah nol untuk sebarang waktu t_0, kita katakan kedua fungsi tersebut bergantung linear, sebaliknya jika wronskiannya tidak nol maka kedua fungsi tersebut bebas linear.

Teorema Abel. Misalkan y_1 dan y_2 adalah solusi-solusi dari

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

dimana p, q adalah fungsi-fungsi kontinu dalam suatu interval I, maka

$$W(y_1, y_2) = C \exp \left(- \int p(t)dt \right)$$

sedemikian sehingga W bernilai nol untuk semua waktu t di I ($C = 0$) atau tidak pernah bernilai nol ($C \neq 0$).
Bukti dari teorema ini relatif mudah. Kita mulai bahwa y_1 dan y_2 adalah solusi-solusi, maka keduanya memenuhi

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \ \text{ dan } \ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Kita kalikan persamaan pertama dengan $-y_2$ dan persamaan ke dua dengan y_1, akan kita dapatkan

$$-y_2y_1'' - py_2y_1' - qy_2y_1 = 0 \ \text{ dan } \ y_1y_2'' + py_1y_2' + qy_1y_2 = 0.$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan kita peroleh

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(t)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0$$

Kita perhatikan bahwa $W = y_1y_2' - y_2y_1'$ dan $W' = y_1y_2'' - y_2y_1''$, yang memberikan

$$W' + p(t)W = 0.$$

Persamaan di atas merupakan persamaan differensial orde satu, yang dengan mudah kita selesaikan, yakni

$$W = C \exp\left(-\int p(t)dt\right).$$

Kita bisa perhatikan bahwa jika $C = 0$ maka Wronskian $W = 0$ dan jika $C \neq 0$ maka $W \neq 0$. Dalam hal Wronskian $W \neq 0$ untuk semua waktu dalam interval waktu yang diberikan maka solusi-solusi y_1 dan y_2 bebas linear. Dengan ini lengkaplah sudah pembicaraan kita mengenai kebebasan linear. Sekarang kita kembali pada masalah persamaan differensial orde dua homogen dengan koeffisien konstan

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Kita kembali mencoba solusinya dalam bentuk $y = e^{(\lambda t)}$ yang akan memberikan

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristik di atas adalah

$$\lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dalam contoh-contoh terdahulu, kita selalu punyai $b^2 - 4ac > 0$. Akan tetapi kita juga bisa punyai $b^2 - 4ac < 0$ atau $b^2 - 4ac = 0$. Ketiga kasus tersebut memiliki perbedaan secara mendasar. Oleh karena itu kita akan bahas semua kasus. Dalam pembahasan terdahulu kita sudah membahas kasus dimana $b^2 - 4ac > 0$, dalam kesempatan kali ini kita akan membahas kasus untuk $b^2 - 4ac < 0$. Dalam kasus ini kita mengambil akar dari bilangan negatif. Jelas akan memberikan ke kita bilangan imajiner dengan $\sqrt{-1} = i$. Dalam hal ini kita punyai dua akar dari persamaan karakteristik kita, yakni

$$\lambda_\pm = \beta \pm i\mu,$$

dimana $\beta = -\frac{b}{2a}$ dan $\mu = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. Ini mengakibatkan solusi kita berbentuk

$$y = c_1 e^{(\beta+i\mu)t} + c_2 e^{(\beta-i\mu)t},$$

dimana $y_1 = e^{(\beta+i\mu)t}$ dan $y_2 = e^{(\beta-i\mu)t}$. Kita catat bahwa

$$e^{\pm i\alpha t} = \cos(\alpha t) \pm i\sin(\alpha t).$$

Dan kita juga bisa menyatakan bahwa $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ dan $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. Sehingga kita bisa menyatakan solusi kita sebagai

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\beta+i\mu)t} = e^{\beta t}(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)), \\ y_2 &= e^{(\beta-i\mu)t} = e^{\beta t}(\cos(\mu t) - i\sin(\mu t)). \end{aligned}$$

Solusi-solusi kita tersebut di atas masih terlalu rumit dan panjang. Kita dapat menyederhanakannya dengan memperkenalkan dua solusi baru, yakni Y_1 dan Y_2 yang kita definisikan sebagai

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\beta t}\cos(\mu t) \text{ dan } Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\beta t}\sin(\mu t).$$

Dan kita dapatkan solusi umumnya sebagai

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 e^{\beta t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\beta t} \sin(\mu t),$$

dimana konstanta c_1 dan c_2 kita tentukan dari kondisi awal yang diberikan. Kita bisa menyatakan solusi-solusi y_1 dan y_2 dengan solusi-solusi baru Y_1 dan Y_2, dikarenakan semua solusi tersebut bebas linear dan kita dapat mudah menemukan Wronskian $W(Y_1, Y_2) = \mu e^{2\beta t} \neq 0$. Jadi kita simpulakan bahwa kombinasi solusi-solusi Y_1 dan Y_2 merupakan solusi umum dari persamaan differensial yang diberikan.

Contoh. Selesaikan $y'' + y' + y = 0$.

Jawab. Kita mulai dengan memisalkan solusi dalam bentuk $y = e^{\lambda t}$, yang akan memberikan persamaan karakteristiknya sebagai

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Akar-akar dari persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solusi umum kita dapat dinyatakan sebagai

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Sekarang kita akan membahas masalah yang cukup menarik yaitu jika kita punyai akar kembar. Hal ini terjadi jika $b^2 - 4ac = 0$. Dan kita punyai $\lambda = -\frac{b}{2a}$, dan kita hanya mempunyai satu solusi, yakni

$$y = c_1 y_1 = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t}.$$

Tetapi kita tahu bahwa persamaan differensial kita adalah orde dua, sehingga perlu mempunyai dua solusi untuk membangun solusi umumnya. Untuk mencari solusi kedua yang bebas linear, kita misalkan solusinya dalam bentuk

$$y = v(t) y_1(t),$$

dimana kita ganti konstanta c_1 dengan suatu fungsi $v(t)$ yang akan kita tentukan kemudia. Metode ini dikenal sebagai metode reduksi dari orde (*reduction of order*). Kita catat bahwa

$$y' = v' y_1 + v y_1' \text{ dan } y'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''.$$

Kita substitusikan ke dalam persamaan differensial kita akan dapatkan

$$v(a y_1'' + b y_1' + c y_1) + v'(2a y_1' + b y_1) + v''(a y_1) = 0.$$

Karena y_1 adalah solusi maka $a y_1'' + b y_1' + c y_1 = 0$, dan kita akan dapatkan

$$v'' + v'\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{b}{a}\right) = 0,$$

yang merupakan persamaan differensial orde satu untuk v'. Misalkan $u = v'$, maka kita punyai

$$u' + u\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{b}{a}\right) = 0,$$

dimana y_1 telah diketahui. Kita dengan mudah menyelesaikan persamaan differensial tersebut dengan metode faktor integral atau variabel terpisah. Kita perhatikan bahwa

$$\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{b}{a}\right) = 2\frac{-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}}{e^{-\frac{b}{2a}t}} + \frac{b}{a} = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} = 0.$$

Sehingga kita dapatkan

$$u' = 0 \rightarrow v'' = 0.$$

Setelah kita integralkan akan kita peroleh

$$v(t) = c_2 t + c_3.$$

Kita peroleh solusi lain yang bebas linear, yaitu $y = v(t)y_1 = c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t}$. Jadi dengan demikian solusi umum dalam kasus akar ganda dapat kita nyatakan sebagai

$$y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t}.$$

Kita catat bahwa konstanta c_3 dapat dihilangkan, termasuk dalam konstanta c_1. Jika kita hitung Wronskian dari solusi-solusi tersebut, $W(y_1, y_2) = e^{-\frac{b}{2a}t} \neq 0$, maka dapat kita simpulkan kedua solusi tersebut bebas linear.

Contoh. Selesaikan $y'' + 2y' + y = 0$.
Jawab. Persamaan karakteristik diberikan dengan

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Akar-akar karakteristiknya $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Jadi Solusi umum persamaan tersebut menjadi

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 7 tentukan apakah pasangan fungsi berikut bebas atau bergantung linear.

1. $f(t) = t^2 + 5t,\ g(t) = t^2 - 5t$
2. $f(t) = \cos 3t,\ g(t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$
3. $f(t) = e^{\lambda t}\cos \mu t,\ g(t) = e^{\lambda t}\sin \mu t,\ \mu \neq 0$
4. $f(x) = e^{3x},\ g(x) = e^{3(x-1)}$

5. $f(t) = 3t - 5$, $g(t) = 9t - 15$

6. $f(t) = t$, $g(t) = t^{-1}$

7. $f(t) = 3t$, $g(t) = |t|$

Untuk soal no 8 sampai 10 tentukan Wronskian dari dua solusi tanpa harus menyelesaikan persamaannya

8. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$

9. $(\cos t)y'' + (\sin t)y' - ty = 0$

10. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$

Latihan Tambahan

1. Kerjakan soal-soal dari Boyce Diprima
   (a) No 17 hal. 128
   (b) No 7, 9, 11, 13, 15 hal. 150-151
   (c) No 17, 19, 21 hal 151
   (d) No 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 hal. 159
   (e) No 23, 24, 25 hal. 161

2. Temukan persamaan diferensial yang mempunyai solusi umum (a) $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$, (b) $y = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$

3. Temukan solusi umum dari (a) $y'' - 2y' + 2y = 0$, (b) $4y'' + 17y' + 4y = 0$

4. Temukan solusi khusus, sketsa grafik solusi dan tentukan perilaku solusi untuk t naik ($t \to \infty$).
   (a) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (b) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   (c) $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
   (d) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

5. Dengan metode reduksi order, temukan solusi lain yang bebas linear dengan solusi yang diberikan
   (a) $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$, $t > 0, y_1 = t^2$.
   (b) $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0, t > 0, y_1 = t$

3.2.3 Persamaan Tak homogen: Koeffisien tak tentu

Kita perhatikan persamaan tak homogen

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

dimana $p(t)$, $q(t)$, dan $g(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval I. Dalam kasus ini kita punyai teorema-teorema penting berikut.

Teorema. Jika Y_1 dan Y_2 adalah solusi-solusi dari persamaan tak homogen, maka $Y_1 - Y_2$ solusi dari persamaan homogen. Dan jika y_1 dan y_2 adalah basis atau pembangun dari solusi-solusi untuk persamaan homogen, maka

$$Y_1 - Y_2 = c_1y_1 + c_2y_2,$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta. Untuk melihat hal tersebut benar, kita catat dengan definisi

$$L[Y_1] = g(t) \text{ dan } L[Y_2] = g(t).$$

Kita dapatkan

$$L[Y_1] - L[Y_2] = g(t) - g(t) \rightarrow L[Y_1 - Y_2] = 0,$$

yang mengakibatkan $Y_1 - Y_2$ juga solusi dari persamaan, jadi

$$Y_1 - Y_2 = c_1y_1 + c_2y_2,$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta. Kita akan gunakan terorema ini untuk membuktikan teorema berikut.

Teorema. Solusi umum persamaan tak homogen dapat dinyatakan sebagai

$$y = \phi(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + Y(t),$$

dimana y_1 dan y_2 adalah basis dari persamaan homogen, c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta, dan $Y(t)$ adalah penyelesaian kusus dari persamaan tak homogen.

Bukti teorema ini mengikuti langsung dari teorema terdahulu dengan memisalkan $Y_1 = \phi(t)$ dan $Y_2(t) = Y(t)$ sehingga

$$Y_1 - Y_2 = \phi(t) - Y(t) = c_1y_1 + c_2y_2,$$

sehingga memberikan ke kita

$$\phi(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + Y(t).$$

Teorema ini memberikan saran kepada kita bagaimana membangun solusi persamaan tak homogen

1. Temukan solusi umum persamaan homogennya

2. Temukan sebuah solusi untuk persamaan tak homogen

3. Jumlahkan keduanya
4. Temukan c_1 dan c_2 dari kondisi-kondisi awalnya

Kita tahu persis bagaimana menemukan solusi-solusi homogen(juga sering disebut *solusi komplemen* y_c). Akan tetapi kita belum mengetahui bagaimana menemukan solusi kusus persamaan tak homogen(juga sering disebut dengan *solusi partikular* y_p). Untuk menemukan solusi kusus ini kita kebanyakan menggunakan trik cerdik ("metoda menebak"). Berikut kita bahas beberapa contoh sebagai ilustrasi

Contoh. Temukan solusi kusus persamaan $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$.

Jawab. Untuk menemukan solusi kususnya, kita gunakan metoda menebak yang membangun e^{2t} di ruas kanan persamaan. Oleh karena itu, kita misalkan

$$y_p = Ae^{2t},$$

dimana A adalah konstanta sebarang, dan e^{2t} digunakan karena jika kita turunkan hanya koeffisiennya dikalikan dengan faktor 2. Pertama kita hitung

$$y_p' = 2Ae^{2t} \text{ dan } y_p'' = 4Ae^{2t}.$$

Kita substitusikan ke persamaan semula, dan akan kita peroleh

$$4Ae^{2t} - 3(2)Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = 3e^{2t}.$$

Karena $e^{2t} \neq 0$, maka kita bagi kedua ruas persaman dengan e^{2t}, yang akan menghasilkan

$$4A - 6A - 4A = 3 \to A = -\frac{1}{2}.$$

Jadi kusus yang dimaksud adalah

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{2t}.$$

Contoh. Temukan solusi kusus persamaan $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(t)$.

Jawab. Dalam hal ini kita akan menebak solusi kususnya berbentuk

$$y_p = A\sin(t) + B\cos(t).$$

Mengapa kita gunakan fungsi sin dan cos untuk menebaknya. Hal ini dikarenakan kedua fungsi dibangun oleh fungsi sin jika kita turunkan fungsi sin sekali atau dua kali. Jadi kita dapatkan

$$y_p' = A\cos(t) - B\sin(t) \text{ dan } y_p'' = -A\sin(t) - B\cos(t).$$

Kita substitusikan ke dalam persamaan dan akan kita dapatkan

$$-A\sin(t) - B\cos(t) - 3A\cos(t) + 3B\sin(t) - 4A\sin(t) - 4B\cos(t) = 2\sin(t).$$

Kita kumpulkan suku-suku sejenis, dan kita peroleh

$$(-B - 3A - 4B)\cos(t) + (-A + 3B - 4A)\sin(t) = 2\sin(t).$$

Jadi kita akan dapatkan

$$\begin{aligned} -3A - 5B &= 0 \\ -5A + 3B &= 2. \end{aligned}$$

Dengan mudah kita selesaikan persamaan tersebut, dan akan memberikan

$$\begin{aligned} A &= -\frac{5}{17} \\ B &= \frac{3}{17}. \end{aligned}$$

Jadi solusi kusus kita adalah

$$y_p = -\frac{5}{17}\sin(t) + \frac{3}{17}\cos(t).$$

Ada bebarapa aturan yang relatif mudah untuk menemukan solusi kusus dengan metode koeffisien tak tentu.

- Jika $g(t) = e^{\alpha t}$, maka fungsi tebakannya $y_p = Ae^{\alpha t}$
- Jika $g(t) = \cos(\alpha t)$ atau $\sin(\alpha t)$, maka $y_p = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$
- Jika $g(t) = a_n t^n + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$, maka $y_p = A_n t^n + \ldots + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$
- Jika $g(t) = t^2 e^{\alpha t}$, maka $y_p = (A_2 t^2 + A_1 t + A_0)e^{\alpha t}$
- Jika $g(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ atau $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, maka $y_p = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$
- Jika $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, y_p^1 tebakan untuk $g_1(t)$ dan y_p^2 untuk $g_2(t)$, maka $y_p = y_p^1 + y_p^2$

Walaupun metode ini cukup baik, sekarang muncul masalah bagaimana jika fungsi tebakan kita merupakan salah satu dari solusi homogennya, maka fungsi tebakan kita tak pernah akan membangun sebuah suku yang memenuhi ruas kanan tak homogen $g(t)$. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut.

Contoh. Selesaikan persamaan $y'' + 4y = 3\sin(2t)$.

Jawab. Pertama kita selesaikan persamaan homogennya $y'' + 4y = 0$, yang akan memberikan solusi komplemen, yakni

$$y_c = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t).$$

Kita akan menemukan solusi kususnya dengan menggunakan metode menebak yang memuat funsi-fungsi $\sin(2t)$ dan $\cos(2t)$. Tetapi fungsi-fungsi tersebut merupakan solusi-solusi homogennya. Oleh karena itu jika kita menebak solusi kususnya dengan fungsi-fungsi tersebut, kita tak akan pernah memenuhi bagian tak homogennya. Sehingga kita mesti menggunakan fungsi tebakannya sebagai

$$y_p = At\cos(2t) + Bt\sin(2t),$$

yang akan menemukan bentuk sederhana $\sin(2t)$ dan $\cos(2t)$ setelah kita differensialkan. Kita hitung

$$\begin{aligned} y_p' &= A\cos(2t) + B\sin(2t) - 2At\sin(2t) + 2B\cos(2t) \\ y_p'' &= -4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) - 4At\cos(2t) - 4Bt\sin(2t). \end{aligned}$$

Substitusikan ke dalam persamaan, dan kita akan dapatkan

$$\begin{aligned} &-4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) - 4At\cos(2t) - 4Bt\sin(2t) + 4At\cos(2t) \\ &+4Bt\sin(2t) = 3\cos(2t), \end{aligned}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$-4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) = 3\cos(2t) \rightarrow A = 0,\ B = \frac{3}{4}.$$

Jadi solusi umum kita menjadi

$$y(t) = c_1\sin(2t) + c_2\cos(2t) + \frac{3}{4}t\sin(2t),$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang.

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 10 tentukan solusi umum persamaan differensial yang diberikan.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
2. $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$
3. $y'' + 9y = t^2e^{3t} + 6$
4. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\sin t$
5. $u'' + \omega_o^2 u = \cos\omega t$, $\omega^2 \neq \omega_0^2$
6. $u'' + \omega_0^2 u = \cos\omega_0 t$
7. $y'' + y' + 4y = 2\sinh t$
8. $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$
9. $y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2t$
10. $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2t$.

Untuk soal no 11 sampai 15 tentukan solusi masalah nilai awal

11. $y'' + y' - 2y = 2t, y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
12. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
13. $y'' - 2y' + y = te^t + 4, y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
14. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, y(0) = 1,\ y'(1) = 0.$
15. $y'' + 4y = 3\sin 2t, y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$

Tugas Terstruktur

Temukan solusi persamaan differensial yang diberikan.

1. $y'' + 2y' + 5y = 4e^t \cos 2t,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 2t^4 + t^2 e^{-3t} + \sin 3t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t}\cos 2t - 2te^{-2t}\cos t$
4. $y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \sin m\pi t,\ \lambda > 0,\ \lambda \neq m\pi,\ m = 1 \ldots N$
5. $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1)\sin 2t + 3e^{-t}\cos t + 4e^t$
6. $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t}\cos 2t - 2te^{-2t}e^{-2t}\cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
7. $y'' + 4y = t^2 \sin 2t + (6t + 7)\cos 2t$
8. $y'' - 4y' + 4y = 2t^2 + 4te^{2t} + t\sin 2t$

3.2.4 Operator $\mathcal{D}$

Ada metode yang bisa dipertimbangkan dalam penyelesaian persamaan diferensial orde dua, yakni dengan operator $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$. Misalkan dipunyai persamaan diferensial linear orde dua tak homogen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \tag{3.2.9}$$

Misalkan akar-akar karakteristik yang bersesuaian dengan persamaan diferensial homogen adalah r_1 dan r_2, maka persamaan diferensial (3.2.9) dapat dituliskan dalam

$$(\mathcal{D} - r_1)(\mathcal{D} - r_2)y = g(t). \tag{3.2.10}$$

Dengan memisalkan $(\mathcal{D} - r_2)y = u$, maka kita peroleh dua persamaan diferensial orde satu, yakni

$$(\mathcal{D} - r_1)u = g(t) \tag{3.2.11}$$
$$(\mathcal{D} - r_2)y = u. \tag{3.2.12}$$

Kita selesaikan u terlebih dahulu baru kemudian y untuk mendapatkan solusi yang diinginkan dengan menggunakan metoda yang telah kita pelajari pada bab terdahulu (metode Faktor Integral).

Contoh. Selesaikan $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$.
Jawab. Persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$(\mathcal{D}-4)(\mathcal{D}+1)y = 3e^{2t}.$$

Misalkan $(\mathcal{D}+1)y = u$, maka diperoleh

$$(\mathcal{D}-4)u = 3e^{2t} \tag{3.2.13}$$

$$(\mathcal{D}+1)y = u. \tag{3.2.14}$$

Dengan metode Faktor Integral kita peroleh faktor-faktor integralnya adalah e^{-4t} dan e^{t}, dan persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}
& (ue^{-4t})' = 3e^{2t}e^{-4t} = 3e^{-2t} \\
\Leftrightarrow\ & ue^{-4t} = \int (3e^{-2t})dt \\
\Leftrightarrow\ & ue^{-4t} = -\frac{3}{2}e^{-2t} + c_1 \\
\Leftrightarrow\ & u = -\frac{3}{2}e^{2t} + c_1e^{4t}.
\end{aligned}$$

Sehingga kita punyai untuk persamaan ke dua

$$\begin{aligned}
& (ye^{t})' = ue^{t} = -\frac{3}{2}e^{3t} + c_1e^{5t} \\
\Leftrightarrow\ & ye^{t} = \int (-\frac{3}{2}e^{3t} + c_1e^{5t})dt \\
\Leftrightarrow\ & ye^{t} = (-\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{c_1}{5}e^{5t}) + c_2 \\
\Leftrightarrow\ & y = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{c_1}{5}e^{4t} + c_2e^{-t} \\
\Leftrightarrow\ & y = -\frac{1}{2}e^{2t} + c_3e^{4t} + c_2e^{-t}.
\end{aligned}$$

3.2.5 Persamaan Tak Homogen: Vareasi Parameter

Dalam bagian terakhir bab terdahulu kita telah membahas persamaan tak homogen dengan gaya luar $g(t)$ yang berbentuk

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(e^{t}, e^{-t}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), t^{n}).$$

Jadi dalam hal $g(t)$ memuat fungsi-fungsi cos, sin, eksponensial, atau polinom sederhana, kita dapat menemukan solusi kususnya dengan metode koeffisien tak tentu (metoda menebak). Metoda tersebut agak terbatas, karena metoda itu tidak akan bisa digunakan jika kita punyai fungsi $g(t)$ yang lebih rumit dari fungsi-fungsi tersebut di atas. Oleh karena itu kita ingin menemukan suatu metoda yang lebih umum untuk menemukan solusi kusus untuk bentuk umum $g(t)$. Kita perhatikan kembali solusi homogen

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Sekarang kita misalkan sebuah solusi dalam bentuk

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \tag{3.2.15}$$

Motivasi kita menggunakan bentuk tebakan di atas adalah bahwa bentuk di atas sangat mirip dengan solusi homogen kita. Mungkin dengan memisalkan u_1 dan u_2 (yang berkaitan dengan c_1 dan c_2 berturut-turut) berubah sesuai waktu, kita akan dapat menyelesaiakn persamaan tak homogen. Kita catat bahwa

$$y' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'.$$

Jika kita differensialkan sekali lagi persamaan di atas, maka kita akan mendapatkan suku-suku dalam bentuk u_1'' dan u_2'', tetapi ini malah akan menjadi rumit dari persamaan semula karena kita mengubah persamaan orde dua dengan dua persamaan orde dua yang lain. Untuk mengatasi masalah tersebut kita bisa pilih

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0.$$

Tidak ada alasan mengapa kita tak dapat memilih kondisi di atas. Jadi kita punyai

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2',$$

sehingga

$$y'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''.$$

Kemudian kita substitusikan y' dan y'' ke persamaan semula dan kita akan dapatkan

$$u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + p(u_1y_1' + u_2y_2') + q(u_1y_1 + u_2y_2) = g(t),$$

yang dapat kita sederhanakan sebagai

$$u_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + u_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(t).$$

Tetapi dua suku pertama persamaan di atas sama dengan nol karena y_1 dan y_2 adalah solusi-solusi dari persamaan homogen. Jadi kita dapatkan dua syarat yang mesti dipenuhi agar persamaan diferensial dapat dipecahkan dengan menggunakan metode vareasi parameter, yakni dengan pemisalan persamaan (3.2.15)

$$\begin{aligned} u_1'y_1' + u_2'y_2' &= g(t), \\ u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Kita harus menemukan u_1 dan u_2 dari sistem persamaan di atas. Pertama kita tulis dalam bentuk matrik

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Kita dapatkan

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} -y_2g(t) \\ y_1g(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi kita peroleh

$$u_1' = -\frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} \quad \text{dan} \quad u_2' = \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)}.$$

Dengan mengintegralkan kembali kita akan dapatkan

$$u_1 = -\int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt \quad \text{dan} \quad u_2 = \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt.$$

Kita peroleh solusi kususnya, yakni

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -y_1 \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_2 \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt,$$

dan penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p,$$

dimana konstanta c_1 dan c_2 ditentukan dari kondisi-kondisi awalnya. Kita perhatikan bahwa metoda ini memberikan cara umum untuk menemukan solusi umum persamaan tak homogen. Hanya saja kita asumsikan kita dapat mengintegralkan fungsi $g(t)$ di akhir.

Contoh. Selesaikan $y'' + 4y = 3\csc(t)$.

Jawab. Dalam hal ini $g(t) = 3\csc(t)$ yang cukup sulit untuk menggunakan metoda koeffisien tak tentu atau metoda menebak. Kita tahu bahwa solusi homogen atau solusi komplemennya adalah

$$y_c = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t).$$

Untuk menemukan solusi kususnya kita hitung Wronskiannya

$$W(y_1, y_2) = \cos(2t)(\sin(2t))' - \sin(2t)(\cos(2t))' = 2.$$

Jadi solusi partikularnya

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{3}{2}\cos(2t) \int \sin(2t)\csc(t)dt + \frac{3}{2}\sin(2t) \int \cos(2t)\csc(t)dt \\ &= -3\cos(2t) \int \sin(t)\cos(t)\frac{1}{\sin(t)}dt \\ &\quad + \frac{3}{2}\sin(2t) \int (\cos^2(t) - \sin^2(t))\frac{1}{\sin(t)}dt \\ &= -3\cos(2t) \int \cos(t)dt + \frac{3}{2} \int \left(\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} - \sin(t)\right) dt \\ &= -3\cos(2t)\sin(t) + \cos(t)\sin(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t)\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Dan kita dapatkan solusi umumnya adalah

$$\begin{aligned} y &= c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t)\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &\quad -3\cos(2t)\sin(t) + \cos(t)\sin(2t), \end{aligned}$$

dimana c_1 dan c_2 ditentukan dari kondisi awal yang diberikan.

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 10 tentukan solusi umum persamaan differensial yang diberikan.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$
2. $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$
3. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$
4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$
5. $y'' + y = \tan t$, $0 < t < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9\sec^2 3t$, $0 < t < \pi/6$
7. $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}$, $t > 0$
8. $y'' - 2y' + y = e^t/(1 + t^2)$
9. $y'' - 5y' + 6y = g(t)$
10. $y'' + 4y = g(t)$.

Untuk soal no 11 sampai 15 tunjukkan bahwa y_1 dan y_2 memenuhi persamaan homogen dan tentukan solusi kusus persamaan tak homogen yang diberikan

11. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, t > 0$, $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t^{-1}$.
12. $t^2y'' - t(t + 2)y' + (t + 2)y = 2t^3$, $t > 0$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = te^t$.
13. $ty'' - (1 + t)y' + y = t^2e^{2t}, t > 0$, $y_1(t) = 1 + t$, $y_2(t) = e^t$.
14. $(1 - x)y'' + xy' - y = g(x)$, $0 < x < 1$, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x$.
15. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x$, $x > 0$, $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$.

3.2.6 Aplikasi: Forced Osilator dan Resonansi

Dalam bagian ini kita akan membahas beberapa aplikasi persamaan differensial orde dua. Kita ingatkan kembali tentang hukum Newton ke dua

$$\sum F = m.a,$$

dimana $\sum F$ adalah jumlah gaya-gaya, m adalam masa benda, dan a adalah percepatan benda tersebut. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan sebuah pegas yang mempunyai gaya tolak dan gaya gerak secara periodik. Jadi dalam hal ini dapat dinyatakan sebagai

$$my'' = -ky + f_0\cos(\omega t),$$

dimana gaya tolaknya diperoleh menurut hukum Hook. Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$y'' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t),$$

dengan $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dan $F_0 = \frac{f_0}{m}$. Untuk menyelesaikan persamaan diatas kita gunakan metoda yang telah kita pelajari. Pertama kita selesaikan untuk persamaan homogennya. Persamaan karakteristiknya

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega_0.$$

Jadi solusi homogenya dapat ditulis sebagai

$$y_c = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t).$$

Solusi partikularnya dapat ditentukan dengan metoda koeffisien tak tentu, dengan memisalkan

$$y_p = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t),$$

yang setelah kita substitusikan ke persamaan semula akan kita dapatkan

$$-\omega^2 A_1 \cos(\omega t) + \omega_0^2 A_1 \cos(\omega t) - \omega^2 A_2 \sin(\omega t) + \omega_0^2 A_2 \sin(\omega t) = F_0 \cos(\omega t).$$

Dan kita dengan mudah mendapatkan A_1 dan A_2, yakni

$$A_1 = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2},\ A_2 = 0,$$

sehingga solusi umum kita adalah

$$y = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

Perlu kita catat bahwa solusi tersebut di atas valid jika $\omega \neq \omega_0$. Misalkan $\omega \neq \omega_0$ dan misalkan kita berikan kondisi awalnya $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$. Kita substitusikan ke dalam persamaan, dan kita akan dapatkan konstanta $c_2 = 0$ dan $c_1 = -\frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Jadi solusinya menjadi

$$y = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)).$$

Dengan menggunakan identitas trogonometri, solusi tersebut di atas dapat dinyatakan sebagai

$$y = \frac{2F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right).$$

Jadi solusi kita merupakan gabungan dari dua fungsi dengan frekuensi yang berbeda, artinya $\frac{\omega_0 - \omega}{2}$ dan $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$. Amplitude-amplitude dari dua fungsi tersebut membetuk suatu yang disebut irama frekuensi antara keduanya. Perhatikan bahwa frekuensi cepat atau lambat yang membentuk solusinya. Dalam kasus $\omega = \omega_0$, kita telah catat bahwa solusi kita menjadi tak berarti. Hal ini terjadi karena solusi kusus yang kita pilih sebenarnya solusi homogennya. Sekarang perhatikan

$$y'' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega_0 t).$$

Dalam hal ini bentuk fungsi tebakan kita adalah

$$y_p = At\cos(\omega_0 t) + Bt\sin(\omega_0 t).$$

Kita differensialkan, dan kita akan dapatkan

$$\begin{aligned} y_p' &= A\cos(\omega_0 t) - \omega_0 At\sin(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \omega_0 Bt\cos(\omega_0 t), \\ y_p'' &= -2\omega_0 A\sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 At\cos(\omega_0 t) + 2\omega_0 B\cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 Bt\sin(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Substitusikan ke persamaan dan kita peroleh

$$-2\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + 2\omega_0 B\cos(\omega_0 t) = F_0\cos(\omega_0 t).$$

Persamaan di atas, terpenuhi jika

$$A = 0 \text{ dan } B = \frac{F_0}{2\omega_0}.$$

Jadi solusi kita menjadi

$$y = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2\omega_0} t\sin(\omega_0 t),$$

yang dengan mensubstitusikan kondisi-kondisi awal $y(0) = y'(0) = 0$, kita akan peroleh

$$y = \frac{F_0}{2\omega_0} t\sin(\omega_0 t).$$

Jadi kita punyai pertumbuhan yang tak terbatas, artinya sistem yang diberi gaya pada frekuensi asal akan menyebabkan osilator tumbuh seperti waktu. Dalam hal ini solusi tumbuh menuju tak hingga pada resonansi frekuensi, dan ini jauh dari kenyataan, sebab kita tak akan pernah menemukan sesuatu yang tumbuh menuju ketahingga pada kenyataannya. Dalam prakteknya, sebarang sistem phisik mempunyai sejumlah kecil damping karena mungkin gaya gesek, gesekan udara atau sesuatu lain. Sehingga kita benar-benar ingin sebuah sistem

$$my'' + \gamma y' + ky = f_0\cos(\omega t),$$

dimana γ menunjukkan damping kita. Solusi homogen kita diberikan dengan

$$y = e^{\lambda t} \rightarrow \lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \rightarrow \lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Jika $\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$, maka

$$\lambda_\pm = -\beta \pm i\mu,$$

dimana $\mu = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$ dan $\beta = \frac{\gamma}{2m}$. Dan solusi homogen kita adalah

$$y_c = c_1 e^{-\beta t}\cos(\mu t) + c_2 e^{-\beta t}\sin(\mu t),$$

yang berkaitan dengan damping osilator. Ini secara eksak yang kita harapkan karena damping. Solusi kususnya sekali lagi kita gunakan metoda koeffisien tak tentu atau metoda vareasi parameter. Kita misalkan dalam bentuk

$$y_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Setelah sedikit hitungan dan manipulasi aljabar kita akan peroleh (pembaca diharap mengeceknya)

$$\begin{aligned} B &= \frac{\gamma_0 \omega F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_0^2\omega_0^2}, \\ A &= \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_0^2\omega_0^2}, \end{aligned}$$

dimana $\gamma_0 = \frac{\gamma}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, dan $F_0 = \frac{f_0}{m}$. Oleh karena solusi homogennya akan menuju nol jika $t \to \infty$, maka kita akan dapatkan

$$y(t \to \infty) = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_0^2\omega_0^2}((\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + \gamma_0\omega\sin(\omega t)).$$

Perlu dicatat bahwa dalam hal ini suku damping akan menjaga agar solusi tidak menjadi tak terbatas pada saat $\omega = \omega_0$. Sehingga bagaimanapun kecilnya damping itu, tetapi tetap memiliki pengaruh. Beberapa aplikasi lain yang berkaitan dengan frekuensi natural seperti mikrowave ovens (frekuensi naturalnya adalah vibrasi mode dari molekul air), lasers, dribbling bola basket, juga ambruknya Jembatan Tacoma Narrow dimana angin dapat menyebabkannya.

Contoh. Selesaikan persamaan diferensial berikut dan plot solusinya.

1. $y'' + y = 0.5\cos 0.8t, y(0) = 0, y'(0) = 0$
2. $y'' + y = 0.5\cos 0.8t, y(0) = 0, y'(0) = 0$
3. $y'' + y' + y = 0.5\cos 0.8t, y(0) = 1, y'(0) = 0$
4. $y'' - y' + y = 0.5\cos 0.8t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Jawab.

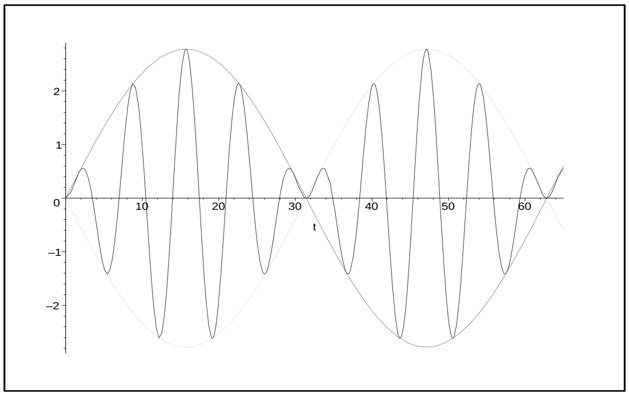
1. Pada soal 1, diketahui $\omega_0 = 1$ dan $\omega = 0.8$. Jadi $\omega_0 \neq \omega$, sehingga solusinya diberikan dengan $y = c_1\cos t + c_2\sin t - \frac{25}{18}\cot\frac{4t}{5}$. Setelah disubstitusikan kondisi awal $y(0) = 0, y'(0) = 0$ diperoleh

   $$y = -\frac{25}{18}\cos t + \frac{25}{18}\cos\frac{4t}{5},$$

   atau

   $$y = \frac{25}{18}\sin(0.1t)\sin(0.9t).$$

   Plot solusi dapat dilihat dalam gambar 3.1



Gambar 3.1: Plot $y'' + y = 0.5 \cos 0.8t$.

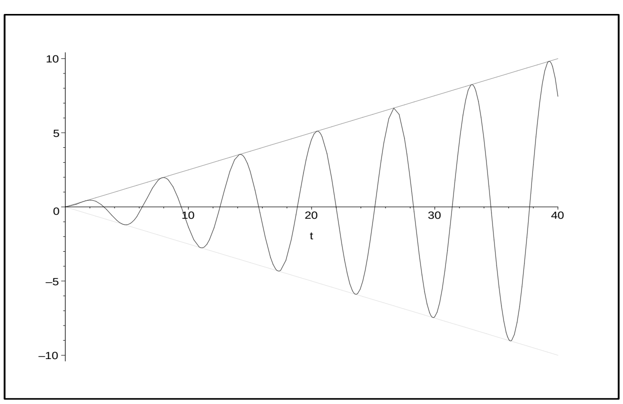
2. Pada soal 2, diketahui $\omega_0 = 1$ dan $\omega = 1$. Jadi $\omega_0 = \omega$, sehingga solusinya diberikan dengan

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{4} \cot 1 + \frac{1}{4} t \sin t.$$

Setelah disubstitusikan kondisi awal $y(0) = 0, y'(0) = 0$ diperoleh

$$y = \frac{1}{4} t \sin t.$$

Plot solusi dapat dilihat dalam gambar 3.2



Gambar 3.2: Plot $y'' + y = 0.5 \cos t$.

3. Pada soal 3, diketahui akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dapat mudah ditemukan solusi umumnya adalah

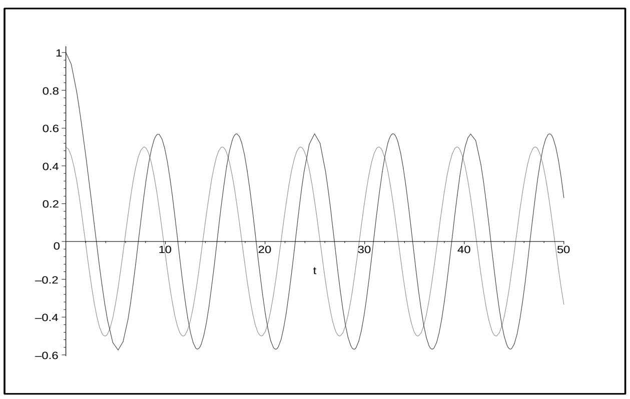
$$y = e^{-t}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right) + \frac{225}{962}\cos\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{250}{481}\sin\left(\frac{4t}{5}\right)$$

Setelah disubstitusikan kondisi awal $y(0) = 1, y'(0) = 0$ diperoleh

$$y = -\tfrac{21}{962}\, e^{-1/2\,t}\sin\left(1/2\,\sqrt{3}t\right)\sqrt{3} + \tfrac{737}{962}\, e^{-1/2\,t}\cos\left(1/2\,\sqrt{3}t\right)$$

$$+\tfrac{225}{962}\,\cos\left(4/5\,t\right) + \tfrac{250}{481}\,\sin\left(4/5\,t\right).$$

Plot solusi dapat dilihat dalam gambar 3.3



Gambar 3.3: Plot $y'' + y' + y = 0.5\cos t$.

4. Pada soal 4, diketahui akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dapat mudah ditemukan solusi umumnya adalah

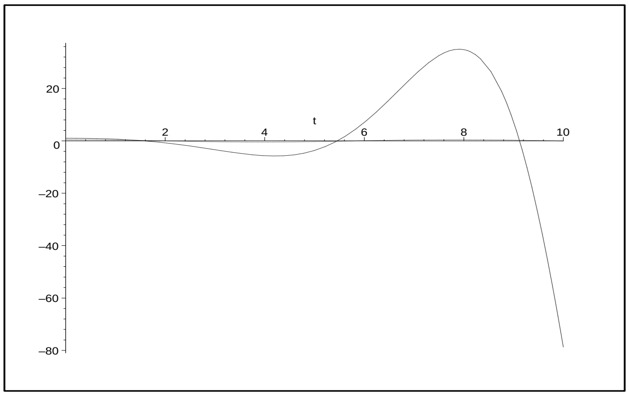
$$y = e^{t}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right) + \frac{225}{962}\cos\left(4/5\,t\right) - \frac{250}{481}\sin\left(4/5\,t\right)$$

Setelah disubstitusikan kondisi awal $y(0) = 1, y'(0) = 0$ diperoleh

$$y = \tfrac{21}{962}\, e^{1/2\,t}\sin\left(1/2\,\sqrt{3}t\right)\sqrt{3} + \tfrac{737}{962}\, e^{1/2\,t}\cos\left(1/2\,\sqrt{3}t\right)$$

$$+\tfrac{225}{962}\,\cos\left(4/5\,t\right) - \tfrac{250}{481}\,\sin\left(4/5\,t\right).$$

Plot solusi dapat dilihat dalam gambar 3.4



Gambar 3.4: Plot $y'' - y' + y = 0.5\cos t$.

Latihan Soal

Selesaikan persamaan diferensial berikut dan plot solusinya (gunakan program Maple).

1. $y'' + y = 0.5\sin 0.6t, y(0) = 0, y'(0) = 0$

2. $y'' + y = 0.5\sin 0.6t, y(0) = 0, y'(0) = 0$

3. $y'' + y' + y = 0.5\sin 0.6t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4. $y'' - y' + y = 0.5\sin 0.6t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

3.2.7 Pemodelan Matematika Sederhana

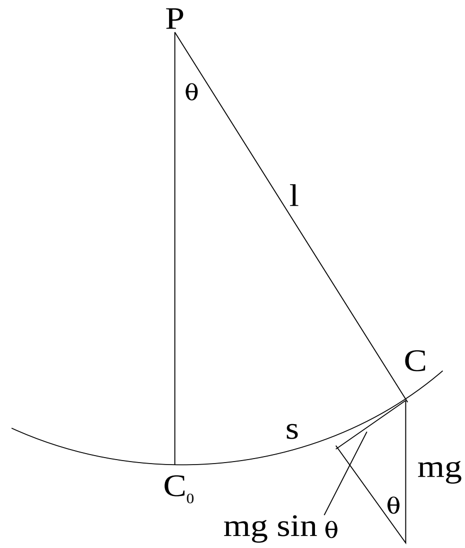
1. Suatu ayunan dengan panjang l dan massa m bergantung di titik P (lihat gambar 3.5). Dengan mengabaikan semua gaya kecuali gaya gravitasi, temukan persamaan geraknya.

   Jawab. Misalkan titik massa C akan bergerak melingkar dengan jari-jari l dan berpusat di P. Misalkan θ adalah sudut dalam arah positif yang dibuat oleh tali dengan garis vertikal pada saat t. Maka komponen sepanjang garis singgung menjadi $mg\sin\theta$. Jika s merupakan panjang busur C_0C, maka akan dipunyai $s = l\theta$ dan percepatan sepanjang busur menjadi

   $$\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

   Sehingga kita akan mempunyai relasi

   $$m\,l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta,$$



Gambar 3.5: Pendulum.

atau

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta.$$

Dengan mengalikan persamaan di atas kita kalikan dengan $2\frac{d\theta}{dt}$ dan kita integrasikan, kita peroleh

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\cos\theta + C_1,$$

atau

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2g\cos\theta + C_1}} = \pm\frac{dt}{\sqrt{l}}.$$

Integral tersebut tidak dapat dinyatakan dalam fungsi sederhana. Dalam hal θ kecil maka kita bisa aproksimasi $\sin\theta \approx \theta$ sehingga persamaan pendulumnya menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

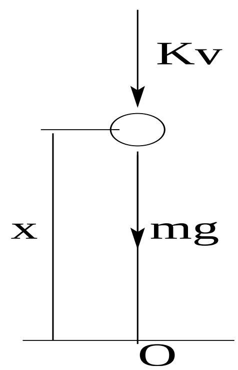
yang dengan mudah diselesaikan, yakni

$$\theta = C_1\cos\sqrt{g}lt + C_2\sin\sqrt{g}lt.$$

Hasil ini merupakan contoh gerak harmonik sederhana dengan amplitudo

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,\text{dan period}\,2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2. Suatu bola dengan massa m dilempar ke atas tegak lurus dari titik O dengan kecepatan awal v_0. Carilah tinggi maksimum yang dicapai, dengan mengandaikan bahwa tekanan udara sebanding dengan kecepatan.
   Jawab. Perhatikan gambar 3.6 Misalkan arak bola ke atas dari titik O adalah



Gambar 3.6: Gerak Lurus.

positif. Dan misalkan x adalah jarak massa dari O pada saat t. Pada massa ada dua gaya yang bekerja, yakni gaya gravitasi yang besarnya mg dan gaya tahan yang besarnya berbanding dengan kecepatan yakni $Kv = K\frac{dx}{dt}$, yang semua gaya mempunyai arah ke bawah karena bola dilempar ke atas. Menurut hukum Newton bahwa $m \times v =$ jumlah gaya, maka

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - k\frac{dx}{dt},$$

atau kita tuliskan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = -g,$$

dimana $K = mk$. Dengan mudah dapat kita dapatkan solusi dari persamaan diferensial orde dua homogen, yakni.

$$x = C_1 + C_2e^{-kt} - \frac{g}{k}t.$$

Dengan kondisi awal $t = 0$, $x(0) = 0$, dan $v(0) = v_0$, kita peroleh $C_1 = C_2 = \frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}$, sehingga kita peroleh

$$x = \frac{1}{k^2}(g + kv_0)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t.$$

Tinggi maksimu dicapai bila $v = 0$, dan diperoleh $t = \frac{1}{k}\ln\frac{g+kv_0}{g}$. Sehingga tinggi maksimumnya

$$x(t) = \frac{1}{k}(v_0 - \frac{g}{k}\ln\frac{g + kv_0}{g}).$$

3. Suatu massa m bergerak bebas sepanjang sumbu x, ditarik menuju titik asal dengan gaya sebanding dengan jaraknya dari titik asal. Temukan persamaan geraknya (a) jika gerakan tersebut mulai dari diam di $x = x_0$ dan (b) bila gerakan tersebut mulai di $x = x_0$ dengan kecepatan awal v_0 yang bergerak dari titik asal.
   Jawab. Misalkan x adalah jarak dari massa dan titik asal pada saat t. Maka
   $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx,$$
   atau
   $$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$
   dengan $K = mk^2$. Kita selesaikan persamaan diferensial tersebut dan mendapatkan
   $$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt.$$
   Bila kita turunkan terhadap t, kita dapatkan
   $$v = \frac{dx}{dt} = -kc_1 \sin kt - kc_2 \sin kt.$$
   (a) Bila $t = 0, x = x_0$ dan $v = 0$, maka didapat $c_1 = 0$ dan $c_2 = x_0$. Solusinya menjadi $x = x_0 \cos kt$. Ini merupakan gerakan harmonik dengan aplitudo x_0 dan period $2\pi/k$.
   (b) Bila $t = 0, x = x_0$ dan $v = v_0$, maka $c_2 = x_0$, $c_1 = v_0/k$. Jadi solusinya menjadi
   $$x = \frac{v_0}{k} \sin kt + x_0 \cos kt.$$
   Ini merupakan gerakan harmonik juga dengan amplitudo
   $$\frac{\sqrt{v_0^2 + k^2x_0^2}}{k},$$
   dan periodenya $2\pi/k$.

3.2.8 Latihan Pemodelan

1. Sketsa fungsi $x = 2\sin(3t - \pi/2)$
2. Jika $x = -\cos t + 3\sin t$, berapakan amplitudo dan phasenya. Gambarkan grafiknya.
3. Sama dengan soal diatas untuk $x = -\cos t + 3\sin(t - \pi/6)$

4. dengan menggunakan deret Taylor

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\end{aligned}$$

   Tunjukkan bahwa untuk ω real

   (a) $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$

   (b) $e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$

5. Tunjukkan bahwa $x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$ adalah solusi umum dari $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. Berapakan nilai ω. Nyatakan solusi terse but dalam bentuk $x = B\cos(\omega t + \theta_0)$.

6. Sebuah massa digantungkan pada pegas sehingga pegas merenggang sebesar $2.5cm$. Berapakah frekuensi alamai (natural) dari osilasi sistem massa pegas?

7. Dalam persamaan diferensial sistem massa pegas $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$. Jika friksi cukup kecil ($c^2 < 4mk$). Tunjukkan bahwa $x = Ae^{-ct/2m}\sin(\omega t + \phi_0)$. Dan tunjukkan bahwa $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{4m^2}}$.

8. Pada soal di atas tentukan amplitudo jika untuk $t = o$, $x = 0$, $v = v_0$.

9. Sebuah pegas dengan konstanta pegas $k = 700Nm^{-1}$ tergantung vertikal dengan ujung ats tetap. Suatu massa seberat $7\,kg$ digantungkan di ujung bawah. Setelah diam, masssa ditarik ke bawah sepanjang $0.05m$ kemudian dilepaskan. Jika gaya gesek dengan udara diabaikan temukan persamaan gerakan massa tersebut. Gambarkan grafik solusinya.

10. Selesaikan soal di atas jika terdapat gaya gesek udara sebesar (a) $v/4$, (b) $980v$.

11. Selesaikan juga kasus (a) dan (b) di atas jika dalam sistem diberikan gaya luar sebesar $0.3\cos 4t$.

12. Suatu pegas diberi beban massa $9\,kg$, kemudian dibiarkan sampai diam. Jika konstanta pegas $729Nm^{-1}$ dan diberikan gaya luar sebesar $0.3\sin 9t$, temukan persamaan gerakan massa tersebut.

Bab 4

Persamaan Diferensial Order Tinggi

4.1 Pendahuluan

Secara teori, struktur dan metoda-metoda dalam menemukan solusi yang telah dikembangkan pada bagian terdahulu yakni persamaan linear orde dua dapat diperluas secara langsung untuk menemukan solusi persamaan linear orde tiga dan yang lebih tinggi. Dalam bab ini kita akan mempelajari bagaimana perluasannya tersebut.

4.1.1 Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari pokok bahasan IV ini, diharapkan anda mampu memahami persamaan linear orde tinggi.

4.1.2 Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari pokok bahasan IV ini anda dapat

1. memahami persamaan linear order ke n

2. menyelesaikan persamaan linear dengan koeffisien konstan

3. menyelesaikan persamaan diferensial dengan metoda koeffisien tak tentu

4. menyelesaikan persamaan diferensial dengan metoda vareasi parameter

4.2 Penyajian Materi

4.2.1 Persamaan Linear Order ke n

Sebuah persamaan diferensial orde ke n mempunyai bentuk umum

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t). \tag{4.2.1}$$

Kita asumsikan fungsi-fungsi $P_0, P_1, \ldots, P_n$ dan G adalah fungsi-fungsi kontinu bernilai real pada interval $I : \alpha < t < \beta$ dan $P_0 \neq 0$ dalam interval ini. Kita bagi persamaan (4.2.1) dengan $P_0(t)$ dan kita peroleh

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t). \tag{4.2.2}$$

Operator persamaan diferensial linear L dengan order n dalam persamaan (4.2.2) adalah sama dengan operator order dua yang telah dikenal pada bab terdahulu. Karena persamaan (4.2.2) mempunyai n buah turunan dari y maka diperlukan n buah integrasi untuk menyelesaikan (4.2.2) dan setiap integralnya akan memuat sebuah konstanta sebarang. Oleh karena itu kita dapat mengharap ada sebuah solusi tunggal dari persamaan dengan n buah kondisi, yakni

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{4.2.3}$$

dimana t_0 sebarang titik pada interval I dan $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ adalah nilai-nilai konstan. Maka akan terdapat sebuah solusi yang tunggal seperti yang dijamin oleh teorema keberadaan dan ketunggalan berikut:

Teorema 4.1.1. *Jika fungsi-fungsi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dan g adalah kontinu pada interval buka I maka terdapat tepat sebuah solusi $y + \phi(t)$ dari persamaan diferensial (4.2.2) yang memenuhi kondisi awal (4.2.3)yang terdapat pada interval I.*

Bukti. Bukti ditinggalkan untuk pembaca (Lihat buku persamaan diferensial pada referensi).

Persamaan Homogen. Seperti dalam persamaan orde dua, kita mulai dengan persamaan homogen

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0. \tag{4.2.4}$$

Jika fungsi-fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah solusi-solusi persamaan (4.2.4) maka kombinasi linear

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \ldots + c_ny_n(t), \tag{4.2.5}$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah sebarang konstanta juga merupakan solusi (4.2.4). Pertanyaan mendasar apakah setiap solusi persamaan (4.2.4) selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $y_1, y_2, \ldots, y_n$?Ini akan menjadi benar jika dengan menggunakan kondisi awal (4.2.3). Adalah sangat mungkin dengan memilih konstanta-kontanta $c_1, \ldots, c_n$ sehingga kombinasi linear (4.2.5) memenuhi kondisi awal. Kususnya untuk sebarang t_0 dalam I, dan untuk sebarang $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, kita dapat menentukan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sehingga persamaan

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + \ldots + c_n y_n(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + \ldots + c_n y_n'(t_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

terpenuhi. Persamaan (4.2.6) mempunyai penyelesaian tunggal jika determinan dari koefisiennya tidak nol. Dilain pihak jika determinan dari koefisien sama dengan nol, maka sangat mungkin untuk memilih nilai $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ sehingga persamaan (4.2.6) tidak mempunyai sebuah solusi. Oleh karena itu syarat cukup dan perlu untuk keberadaan solusi persamaan (4.2.6) untuk sebarang nilai $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ adalah Wronskian

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.2.7}$$

tidak sama dengan nol pada $t = t_0$. Karena t_0 sebarang titik pada I, maka perlu dan cukup bahwa $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tidak nol pada setiap titik pada interval. Seperti dalam persamaan linear orde dua, dapat ditunjukkan bahwa jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ solusi-solusi persamaan (4.2.4), maka $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ adalah nol untuk setiap t dalam interval I atau tidak pernah nol.

Teorema 4.1.2. *Jika fungsi-fungsi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dan g adalah kontinu pada interval buka I, jika fungsi-fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ solusi dari persamaan (4.2.4) dan jika $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ untuk paling tidak sebuah titik dalam I, maka setiap solusi (4.2.4)dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari solusi-solusi $y_1, y_2, \ldots, y_n$.*
Bukti. Lihat referensi.

Himpunan solusi-solusi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dari persamaan (4.2.4) yang Wronskiannya tidak nol disebut sebagai himpunan fundamental dari solusi-solusi. Keberadaan dari himpunan fundamental dari solusi-solusi dapat dinyatakan dengan cara yang sama seperti persamaan linear orde dua. Karena semua solusi persamaan (4.2.4) dalam bentuk (4.2.5), kita menggunakan pengertian solusi umum untuk menyatakan sebuah sebarang kombinasi linear dari sebarang himpunan fundamental solusi persamaan (4.2.4).

Persamaan tak homogen. Sekarang perhatikan persamaan tak homogen (4.2.2)

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t).$$

Jika Y_1 dan Y_2 adalah sebarang solusi persamaan (4.2.2), maka dari kelinieran operator L,

$$L[Y_1 - Y_2](t) = L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0.$$

Oleh karena itu selisih dua solusi dari persamaan tak homogen (4.2.2) merupakan solusi dari persamaan homogen (4.2.4). Karena setiap solusi dari persamaan homogen dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari himpunan fundamental dari solusi $y_1, \ldots, y_n$, maka sebarang solusi dari persamaan (4.2.2) dapat ditulis sebagai

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t) + Y(t), \tag{4.2.8}$$

dimana Y adalah suatu solusi kusus dari persamaan tak homogen (4.2.2). Kombinasi linear (4.2.8) disebut solusi umum persamaan tak homogen (4.2.2).

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 5 tentukan interval dimana solusi-solusinya ada.

1. $y^{iv} + 4y''' + 3y = t$
2. $ty''' + (\sin t)y'' + 3y = \cos t$
3. $t(t-1)y^{iv} + e^t y'' + 4t^2 y = 0$
4. $y''' + ty'' + t^2 y' + t^3 y = \ln t$
5. $(x^2 - 4)y^{vi} + x^2 y''' + 9y = 0$

Untuk soal no 6 sampai 8 tentukan apakan himpunan dari fungsi-fungsi bebas atau bergantung linear. JIka bergantung linear tentukan sebuah relasi linear diantaranya.

6. $f_1(t) = 2t - 3,\ f_2(t) = t^2 + 1,\ f_3(t) = 2t^2 - t$
7. $f_1(t) = 2t - 3,\ f_2(t) = 2t^2 + 2,\ f_3(t) = 3t^2 + t$
8. $f_1(t) = 2t - 3, f_2(t) = t^2 + 1,\ f_3(t) = 2t^2 - t,\ f_4(t) = t^2 + t + 1$

Untuk soal no 9 dan 12 tunjukkan bahwa fungsi-fungsi yang diberikan merupakan solusi dari persamaan diferensial dan tentukan Wronskiannya.

9. $y''' + y' = 0; 1\ \cos t,\ \sin t$
10. $y^{iv} + y'';\ 1, t\,, \cos t,\ \sin t$
11. $xy''' - y'' = 0; 1\,x,\ x^3$
12. $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0;\ x,\ x^2,\ 1/x$

4.2.2 Persamaan Linear dengan Koeffisien Konstan

Perhatikan persamaan diferensial linear orde ke n

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{4.2.9}$$

dimana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah konstanta real. Dari pengalaman kita dalam persamaan linear orde dua dengan koefisien konstan, bahwa $y = e^{rt}$ merupakan solusi (4.2.9) untuk suatu nilai r. Perhatikan bahwa

$$L[e^{rt}] = e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n) = e^{rt} Z(r) \tag{4.2.10}$$

untuk semua r dengan

$$Z(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n. \tag{4.2.11}$$

Untuk nilai r dimana $Z(r) = 0$ maka $L[e^{rt}] = 0$ dan $y = e^{rt}$ merupakan solusi persamaan (4.2.9). Polinomial $Z(r)$ disebut polinomial karakteristik dan persamaan $Z(r) = 0$ disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial (4.2.9). Sebuah polinomial berderajat n mempunyai n akar, katakan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ beberapa mungkin sama sehingga kita bisa nyatakan polinom karakteristik sebagai

$$Z(r) = a_0 (r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n). \tag{4.2.12}$$

Akar-akar real dan tak sama. Jika akar-akar persamaan karakteristik adalah real tidak ada yang sama maka kita mempunyai n solusi berbeda $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$, $\ldots, e^{r_n t}$ dari persamaan (4.2.9). Jika fungsi-fungsi ini bebas linear maka solusi umum persamaan (4.2.9) adalah

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \ldots + c_n e^{r_n t}. \tag{4.2.13}$$

Contoh 1. Temukan solusi umum dari

$$y'''' + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0. \tag{4.2.14}$$

Dan juga temukan solusi yang memenuhi kondisi awal

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2,\ y'''(0) = -1. \tag{4.2.15}$$

Jawab. Misalkan solusinya dalam bentuk $y = e^{rt}$, kita harus menemukan r dengan menyelesaikan persamaan polinom

$$r^4 + r^3 - 7r^2 - r - 6 = 0. \tag{4.2.16}$$

Akar-akar persamaan diatas ialah $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$, dan $r_4 = -3$. Oleh karena itu solusi umumnya ialah

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}. \tag{4.2.17}$$

Kondisi awal (4.2.15) mensyaratkan $c_1, \ldots, c_n$ harus memenuhi 4 persamaan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1, \\ c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 &= 0, \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 &= -2, \\ c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 &= -1. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Dengan menyelesaikan sistem empat persamaan linear kita peroleh

$$c_1 = 11/8,\ c_2 = 5/12,\ c_3 = -2/3,\ c_4 = -1/8.$$

Oleh karena solusi dari masalah nilai awal adalah

$$y = \frac{11}{8}e^t + \frac{5}{12}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-3t}. \tag{4.2.19}$$

Akar-akar komplek. Jika akar-akar persamaan karakteristik mempunyai akar-akar komplek, maka harus terjadi juga pada pasangan konjugatenya. $\lambda \pm i\mu$ karena koeffisien-koeffisien $a_0, \ldots, a_n$ adalah bilangan real. Dalam masalah ini solusi umum dari persamaan (4.2.9) masih dalam bentuk (4.2.12). Akan tetapi seperti dalam persamaan linear orde dua kita bisa mengganti solusi-solusi bernilai komplek $e^{(\lambda+i\mu)t}$ dan $e^{(\lambda-i\mu)t}$ dengan solusi-solusi bernilai real

$$e^{\lambda t}\cos\mu t,\ e^{\lambda t}\sin\mu t \tag{4.2.20}$$

yang diperoleh dari bagian real dan imajiner dari $e^{(\lambda+i\mu)t}$. Jadi meskipun sebagian dari akar-akar persamaan karakteristik bernilai komplek, masih memungkinkan untuk menyatakan solusi umum persamaan (4.2.9) sebagai kombinasi linear dari solusi-solusi bernilai real.

Contoh 2. Temukan solusi umum persamaan

$$y^{iv} - y = 0. \tag{4.2.21}$$

Temukan juga solusi yang memenuhi kondisi awal

$$y(0) = 7/2,\ y'(0) = -4,\ y''(0) = 5/2,\ y'''(0) = -2. \tag{4.2.22}$$

Jawab. Substitusikan e^{rt} untuk y kita peroleh persamaan karakteristik

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Oleh karena itu akar-akarnya $r = 1, -1, i, -i$, dan solusi umum dari persamaan (4.2.21) adalah

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t.$$

Dengan kondisi awal (4.2.22) kita peroleh

$$c_1 = 0,\ c_2 = 3,\ c_3 = 1/2,\ c_4 = -1.$$

Dan solusi dengan kondisi awal yang diberikan adalah

$$y = 3e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \sin t. \tag{4.2.23}$$

Akar-akar berulang. Jika akar-akar persamaan karakteristik tidak berbeda, yakni mempunyai beberapa akar yang berulang, maka persamaan (4.2.13) jelas bukan merupakan solusi umum persamaan (4.2.9). Ingat kembali jika r_1 adalah akar yang berulang untuk persamaan linear orde dua $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ maka dua solusi yang bebas adalah e^{r_1t} dan te^{r_1t}. Untuk sebuah persamaan order n, jika sebuah akar dari $Z(r) = 0$, katakan $r = r_1$ mempunyai s buah $(s \leq n)$ maka

$$e^{r_1t},\ te^{r_1t},\ t^2e^{r_1t}, \ldots, t^{s-1}e^{r_1t} \tag{4.2.24}$$

adalah solusi yang bersesuaian dengan persamaan (4.2.9). Jika akar komplek $\lambda + i\mu$ berulang s kali, maka komplek konjugatenya $\lambda - i\mu$ juga akan berulang s kali. Oleh karena itu dari $2s$ solusi komplek kita temukan $2s$ solusi bernilai real dengan catatan bagian real dan imajiner dari $e^{(\lambda+i\mu)t},\ te^{r_1t}, t^2e^{r_1t}, \ldots, t^{s-1}e^{r_1t}$ juga solusi yang bebas linear, yakni

$$e^{\lambda t}\cos\mu t,\ e^{\lambda t}\sin\mu t,\ te^{\lambda t}\cos\mu t,\ te^{\lambda t}\sin\mu t, \ldots t^{s-1}e^{\lambda t}\cos\mu t,\ t^{s-1}e^{\lambda t}\sin\mu t.$$

Contoh 3. Temukan solusi umum dari

$$y^{iv} + 2y'' + y = 0. \tag{4.2.25}$$

Jawab. Persamaan karakteristiknya yakni

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Akar-akar karakteristiknya menjadi $r = i, i, -i, -i$ dan solusi umumnya adalah

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t.$$

Contoh 4. Temukan solusi umum persamaan

$$y^{iv} + y = 0. \tag{4.2.26}$$

Jawab. Persamaan karakteristiknya yakni

$$r^4 + 1 = 0.$$

Untuk menyelesaikan kita harus menghitung akar pangkat 4 dari -1. Dalam bentuk komplek dapat ditulis sebagai $-1 + 0i$. Akar ini mempunyai magnitude 1 dan sudut polar π. Jadi

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}.$$

Akan tetapi sudutnya hanya ditentukan sampai dengan perkalian dari 2π. Jadi

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i\sin(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi+2m\pi)},$$

dimana m adalah nol atau bilangan bulat. Jadi

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4+m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

Keempat akar dari -1 diperoleh dengan memilih $m = 0, 1, 2$ dan 3, yaitu

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Adalah mudah untuk menunjukkan bahwa untuk sebarang nilai m kita peroleh salah satu dari akar tersebut. Misalnya untuk $m = 4$ kita akan peroleh $(1+i)/\sqrt{2}$. Solusi umum dari persamaan (4.2.26) adalah

$$y = e^{t/\sqrt{2}}\left(c_1\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + e^{-t/\sqrt{2}}\left(c_3\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_4\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.2.27)$$

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 5 nyatakan bilangan komplek yang diberikan dalam bentuk $R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta}$.

1. $1 + i$
2. -3
3. $\sqrt{3} - i$
4. $-1 + \sqrt{3}i$
5. $-1 - i$

Untuk soal no 6 sampai 15 tentukan solusi umumnya

6. $y''' - y'' - y' + y = 0$
7. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
8. $y^{vi} + y = 0$
9. $y^{vi} - 3y^{iv} + 3y'' - y = 0$
10. $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$
11. $y''' - 5y'' + 3y' + y = 0$
12. $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$
13. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
14. $y^{iv} - 8y' = 0$
15. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

4.2.3 Metoda Koeffisien Tak Tentu

Sebuah solusi Y dari persamaan linear tak homogen orde ke n dengan koeffisien konstan

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = g(t) \tag{4.2.28}$$

dapat diperoleh dengan metode koeffisien tak tentu bila $g(t)$ dalam bentuk tertentu.Akan tetapi metode ini tidak umum seperti metode vareasi parameter yang akan kita bahas pada bab mendatang. Seperti dalam persamaan linear orde dua, jika konstanta koeffisien operator diferensial L diterapkan pada sebuah polinomial $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m$, sebuah fungsi eksponensial $e^{\alpha t}$, fungsi sinus $\sin \beta t$ atau fungsi cosinus $\cos \beta t$, maka hasilnya berturut-turut juga sebuah polinomial, sebuah fungsi eksponensial, sebuah kombinasi linear sinus dan cosinus. Oleh karena itu jika $g(t)$ merupakan sebuah jumlahan dari polinomial, eksponensial, sinus dan cosinus atau hasil kali fungsi-fungsi tersebut kita mengharap bahwa mungkin menemukan $Y(t)$ dengan memilih sebuah polinomial, eksponensial, yang bersesuaian sehingga keempatnya dikalikan dengan sebuah konstanta yang tidak diketahui.Kontanta-konstanta ditentukan sehingga persamaan (4.2.28) terpenuhi. Misalkan $g(t)$ sebuah polinomial berderajat m,

$$g(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m, \tag{4.2.29}$$

dimana $b_0, b_1, \ldots, b_m$ adalah konstanta-kontanta yang diberikan. Adalah masuk akal untuk mencari solusi kusus dalam bentuk

$$Y(t) = A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m. \tag{4.2.30}$$

Substitusikan untuk y ke dalam persamaan (4.2.28) dan samakan koeffisien-koeffisien sejenis dalam t, kita temukan bahwa koeffisien dari t^m adalah $a_n A_0 = b_0$. Pastikan bahwa $a_n \neq 0$ sehingga kita punyai $A_0 = b_0/a_n$. Konstanta-konstanta $A_1, \ldots, A_m$ ditentukan dari koeffisien-koeffisien dari suku-suku $t^{m-1}, t^{m-2}, \ldots, t^0$. Jika $a_0 = 0$ yakni jika konstanta dari persamaan homogen, kita tidak dapat memecahkan A_0, dalam kasus ini perlu untuk mengasumsikan $Y(t)$ adalah polinomial berderajat $m+1$ untuk memperolah suku-suku dalam $L[Y](t)$ untuk menyamakan dengan $b_0 t^m$. Akan tetapi tidak perlu mengasumsikan konstanta untuk $Y(t)$. Untuk lebih umumnya mudah membuktikan bahwa jika nol akar ke s dari polinom karakteristik dimana $1, t, t^2, \ldots, t^{s-1}$ solusi dari persamaan homogen, maka bentuk yang bersesuaian dengan $Y(t)$ adalah

$$Y(t) = t^s (A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m). \tag{4.2.31}$$

Masalah yang kedua misalkan $g(t)$ dalam bentuk

$$g(t) = e^{\alpha t} (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m), \tag{4.2.32}$$

maka kita berharap $Y(t)$ dalam bentuk

$$Y(t) = e^{\alpha t} (A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m), \tag{4.2.33}$$

$g(t)$	$Y(t)$
$P_m(t) = b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_m$	$t^s(A_0t^m + \ldots + A_m)$
$P_m(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0t^m + \ldots + A_m)e^{\alpha t}$
$P_m(t)e^{\alpha t}\{\begin{matrix}\sin\beta t,\\ \cos\beta t\end{matrix}$	$t^s[(A_0t^m + \ldots + A_m)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $+(B_0t^m + B_1t^{m-1} + \ldots + B_m)e^{\alpha t}\sin\beta t]$

Tabel 4.1: Solusi khusus dari $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = g(t)$

perhatikan bahwa $e^{\alpha t}$ bukanlah solusi dari persamaan homogen. Jika α adalah sebuah akar ke s dari persamaan karakteristik, maka bentuk $Y(t)$ yang bersesuaian adalah

$$Y(t) = t^se^{\alpha t}(A_0t^m + A_1t^{m-1} + \ldots + A_m). \tag{4.2.34}$$

Hasil ini dapat ditunjukkan seperti dalam persamaan tak homogen orde dua, dengan mereduksi masalah ini dengan mensubstitusikan $y = e^{\alpha t}u(t)$. Fungsi u akan memenuhi persamaan linear tak homogen orde ke n dengan koeffisien konstan. Suku tak homogen persis seperti persamaan (4.2.29). Dengan cara yang sama jika $g(t)$ dalam bentuk

$$g(t) = e^{\alpha t}(b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_m)\{\ \sin\beta t,\quad \cos\beta t, \tag{4.2.35}$$

maka bentuk yang bersesuaian untuk $Y(t)$ dimana $\alpha + i\beta$ bukan akan persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{\alpha t}(A_0t^m + A_1t^{m-1} + \ldots + A_m)\cos\beta t \\ &+ e^{\alpha t}(B_0t^m + B_1t^{m-1} + \ldots + B_m)\sin\beta t. \end{aligned} \tag{4.2.36}$$

Jika $\alpha + i\beta$ adalah sebuah akar ke s dari persamaan karakteristik maka perlu untuk mengalikan ruas kiri persamaan (4.2.36) dengan t^s. Hasilnya dapat dilihat dalam Tabel 4.1

Contoh 1. Temukan solusi kusus dari

$$y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}. \tag{4.2.37}$$

Jawab . Pertama kita selesaikan persamaan homogen. Persamaan karakteristiknya adalah $r^3 - 4r = 0$, dan akar-akarnya adalah $0, \pm 2$, sehingga

$$y_c = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}.$$

Dengan menggunakan prinsip superposisi, kita dapat tuliskan solusi kusus dari persamaan (4.2.37) sebagai jumlah dari solusi-solusi yang bersesuaian denga persamaan diferensial

$$y''' - 4y' = t,\ y''' - 4y' = 3\cos t,\ y''' - 4y' = e^{2t}.$$

Pilihan pertama kita untuk solusi kusus $Y_1(t)$ dari persamaan pertama adalah A_0t+A_1, tetapi karena konstan adalah solusi persamaan homogen maka kita kalikan t, sehingga

$$Y_1(t) = t(A_0t + A_1)$$

. Untuk persamaan yang ke dua kita pilih

$$Y_2(t) = B\cos t + C\sin t,$$

kita tidak perlu memodifikasi karena sinus dan cosinus bukanlah solusi persamaan homogen. Akhirnya untuk persamaan ke tiga karena e^{-2t} solusi persamaan homogen maka kita asumsikan

$$Y_3(t) = Ete^{-2t}.$$

Dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan maka dapatlah kita peroleh koeffisien-koeffisiennya $A_0 = -1/8,\ A_1 = 0, B = 0, C = -3/5$ dan $E = 1/8$. Sehingga solusi kusus persamaan (4.2.37) adalah

$$Y(t) = -\frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{5}\sin t + \frac{1}{8}te^{-2t}.$$

Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 6 temukan solusi umum persamaan diferensial yang diberikan

1. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$
2. $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$
3. $y^{iv} - 4y'' = t^2 + e^t$
4. $y^{vi} + y''' = t$
5. $y^{iv} - y = 3t + \cos t$
6. $y''' - y' = 2\sin t$

Untuk soal no 7 sampai 10 tentukan solusi masalah nilai awal

7. $y''' + 4y' = t,\ y(0) = y'(0), y''(0) = 1$
8. $y^{iv} + 2y'' + y = 3t + 4,\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1$
9. $y''' - 3y'' + 2y' = t + e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1/4,\ y''(0) = -3/2$
10. $y^{iv} + 2y''' + y'' + 8y' - 12 = 12\sin t - e^{-t}, y(0) = 3, y'(0) = 0, y''(0) = -1,\ y'''(0) = 2.$

Untuk soal no 11 sampai 15 tentukan solusi umumnya dengan metode koeffisien tak tentu

11. $y''' - 2y'' + y' = t^3 + 2e^t$

12. $y''' - y' = te^{-t} + 2\cos t$

13. $y^{iv} + 4y'' = \sin 2t + te^t + 4$

14. $y^{iv} - 2y'' + y = e^t + \sin t$

15. $y^{iv} + 4y'' = \sin 2t + te^t + 4$

4.2.4 Metoda Vareasi Parameter

Metoda vareasi parameter digunakan untuk menentukan solusi kusus dari persamaan diferensial linear tak homogen orde ke n

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t) \tag{4.2.38}$$

yang merupakan perluasan langsung dari persamaan differensial orde dua. Seperti sebelumnya perlu untuk menyelesaikan persamaan diferensial homogen yang bersesuaian. Umumnya ini sulit kecuali koeffisiennya konstan. Akan tetapi metode ini masih lebih umum dari pada metode koeffisien tak tentu yakni menggunakan ekspresi untuk solusi kususnya untuk sebarang fungsi kontinu g, sebaliknya metode koeffisien tak tentu hanya terbatas pada sebagian fungsi dari g. Misalkan kita ketahui himpunan fundamental solusi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dari persamaan homogen. Solusi umum dari persamaan homogen adalah

$$y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \ldots + c_ny_n(t). \tag{4.2.39}$$

Metode vareasi parameter untuk menentukan solusi kusus dari persamaan (4.2.38) yakni menentukan n buah fungsi-fungsi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sehingga $Y(t)$ dalam bentuk

$$Y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \ldots + u_n(t)y_n(t). \tag{4.2.40}$$

Karena kita miliki n buah fungsi yang harus ditentukan kita harus memberikan n buah kondisi. Salah satunya jelas bahwa Y memenuhi persamaan (4.2.38). Ke $n-1$ buah kondisi dipilih sehingga membuat solusi sesederhana mungkin. Karena sulit menyederhanakan dalam menentukan Y jika kita mesti menyelesaikan persamaan diferensial berderajat tinggi untuk $u_1, \ldots, u_n$. Dari persamaan (4.2.40) kita peroleh

$$Y'' = (u_1y_1'(t) + u_2y_2' + \ldots + u_ny_m') + (u_1''y_1 + u_2'y_1 + \ldots + u_n'y_n), \tag{4.2.41}$$

dimana kita mengabaikan vareabel bebas t dimana setiap fungsi dalam (4.2.41) bergantung. Jadi kondisi awal pada u_i, yakni

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n' = 0 \tag{4.2.42}$$

Lanjutkan proses ini dengan cara yang sama dengan $n-1$ turunan dari Y memberikan

$$Y^{(m)} = u_1y_1^{(m)} + u_2y_2^{(m)} + \ldots + u_ny^{(m)}, m = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4.2.43}$$

dan n-1 kondisi dari fungsi-fungsi $u_1, \ldots, n-1$ memberikan

$$u_1'y_1^{(m-1)} + u_2'y_2^{(m-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(m-1)} = 0, m = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.2.44}$$

Turunan ke n dari Y adalah

$$Y^n = (u_1 y_1^n) + \ldots + u_n y_n^{(n)} + (u_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-1)}. \tag{4.2.45}$$

Akhirnya kondisi dari Y haruslah solusi persamaan (4.2.38). Dalam mensubstitusikan turunan-turunan Y dari persamaan (4.2.43) dan (4.2.45), kumpulkan suku sejenis dan gunakan fakta bahwa $L[y_i] = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ kita peroleh

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-1)} = g. \tag{4.2.46}$$

Persamaan (4.2.46) berdua dengan persamaan (4.2.44) memberikan n persamaan linear tak homogen simultan untuk $u_1', u_2', \ldots, u_n'$

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_n u_n' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \ldots + y_n' u_n' &= 0, \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \ldots + y_n'' u_n' &= 0, \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + \ldots + y_n^{(n-1)} u_n' &= g. \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

Kondisi yang cukup untuk keberadaan dari sebuah solusi sistem persamaan (4.2.47) adalah determinan dari koeffisien tidak nol untuk setiap nilai t. Akan tetapi determinan dari koeffisien tidak lain adalah $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dan ini tidak nol dimana-mana karena $y_1, \ldots, y_n$ solusi bebas linear dari persamaan homogen. Oleh karena itu adalah mungkin untuk menentukan $u_1', \ldots, u_n'$. Dengan menggunakan metoda Cramer kita temukan solusi dari sistem persamaan (4.2.47) adalah

$$u_m'(t) = \frac{g(t) W_m(t)}{W(t)}, \; m = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2.48}$$

Disini $W(t) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t)$ dan W_m adalah determinan diperoleh dari W dengan mengganti kolom ke m dengan kolom $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Dengan notasi ini sebuah solusi kusus dari persamaan (4.2.38) diberikan dengan

$$Y(t) = \Sigma_{m=1}^{n} y_m(t) \int_{t_0}^{t} \frac{g(s) W_m(s)}{W(s)} ds, \tag{4.2.49}$$

dimana t_0 sebarang. Sementara prosedur adalah mudah, penghitungan aljabar dalam menentukan $Y(t)$ dari persamaan (4.2.49) menjadi lebih sulit jika n membesar. Dalam kasus tertentu mungkin penghitungannya sederhana dengan menggunakan identitas Abel

$$W(t) = W(y_1, \ldots, y_n)(t) = c \exp\left[- \int p_1(t) dt \right].$$

Contoh 1. Diketahui bahwa $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$ dan $y_3(t) = e^{-t}$ solusi persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan

$$y''' - y'' - y' + y = g(t), \tag{4.2.50}$$

tentukan solusi kusus persamaan (4.2.50) dalam bentuk intergal.
Jawab. Kita gunakan persamaan (4.2.49), kita peroleh

$$W(t) = W(e^t, te^t, e^{-t})(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

Kita faktorkan e^t dari setiap suku kolom pertama dan e^{-t} dari suku yang ke tiga, kita peroleh

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & (t+1) & -1 \\ 1 & (t+2) & 1 \end{vmatrix}.$$

Kita kurangkan baris pertama dari baris ke dua dan ke tiga, kita peroleh

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Akhirnya kita selesaikan determinan dengan minor yang bersesuaian dengan kolom pertama dan kita peroleh

$$W(t) = 4e^t.$$

Kemudian

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

Dengan menggunakan minor pada kolom pertama kita peroleh

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} te^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2t - 1.$$

Dengan cara yang sama kita peroleh

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 2,$$

dan

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}.$$

Kita substitusikan hasil-hasil ini ke dalam persamaan (4.2.49), kita peroleh

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^t \int_{t_0}^t \frac{g(s)(-1-2s)}{4e^s} ds + te^t \frac{g(s)(2)}{4e^s} ds + e^{-t} \frac{g(s)(e^{2s})}{4e^s} ds \\ &= \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left(e^{t-s}[-1 + 2(t-s)] + e^{-(t-s)} \right) g(s) ds. \end{aligned}$$

4.2.5 Latihan Soal

Untuk soal no 1 sampai 6 gunakan metode vareasi parameter untuk menentukan solusi umum persamaan differensial yang diberikan.

1. $y''' + y = \tan t,\ 0 < t < \pi$
2. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$
3. $y''' - y'' + y' - y = e^{-t}\sin t$
4. $y''' - y' = t$
5. $y''' + y' = \sec t,\ -\pi/2 < t < \pi/2$
6. $y^{iv} + 2y'' + y = \sin t$

Untuk soal no 7 sampai 10 tentukan solusi masalah nilai awal

7. $y''' + y' = \sec t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1, y''(0) = -2$
8. $y^{iv} + 2y'' + y = \sin t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0, y''(0) = -1,\ y'''(0) = 1$
9. $y''' - y'' + y' - y = \sec t,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$
10. $y''' - y' = \csc t, y(\pi/2) = 2,\ y'(\pi/2) = 1, y''(\pi/2) = -1.$

Daftar Pustaka

1. Boyce, W.E, Diprima, R.C. 1997. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons,Inc. Canada

2. Farlow, S.J. 1994. *Introduction to Differential Equations and Their Applications. McGraw-Hill*, Inc. New York

3. Kreyszig, E. 1999. *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition. John Wiley & Sons, Inc. New York

4. Nagle, R.E, Saff, E.B. 1996. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company. New York

5. Williamson, R.E. 1996. *Introduction to Differential Equations and Dynamical Systems*. The McGraw-Hill Company, Inc. New York