

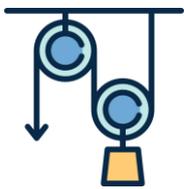
Pembahasan Soal OSN Fisika SMA Tingkat Nasional tahun 2018

Dibuat oleh Al Fakir Ahmad Basyir Najwan

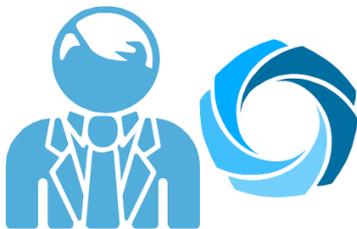
Peraih Medali Emas (3)

Dari SMAN 3 Banjarbaru

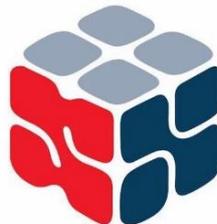
Asal Kalimantan Selatan



FISIKA



Olimpiade Fisika



Olimpiade
Sains
Nasional

Koreksi dapat dikirimkan melalui email

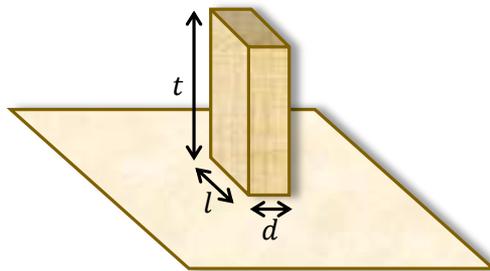
xanderbasyir99@gmail.com

jangan lupa mengunjungi ☺☺☺

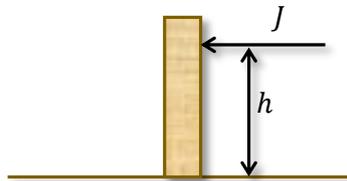
www.basyiralbanjari.wordpress.com

1. Terdapat sebuah kartu “domino” yang memiliki massa m , lebar l , tinggi t dan ketebalan d . Asumsikan domino memiliki distribusi massa yang homogen. Domino tersebut diletakkan di atas lantai yang sangat kasar seperti gambar di bawah. diketahui percepatan gravitasi g . Momen inersia domino terhadap sumbu yang sejajar lebarnya dan melewati titik sudutnya adalah :

$$I = \frac{1}{3}m(d^2 + t^2)$$



Seseorang memberikan impuls J pada domino. Berikut adalah tampak dua peristiwa tersebut dari samping. Tentukan :



- Ketinggian h dari lantai impuls tersebut harus diberikan agar domino dapat “terguling” dengan impuls sekecil mungkin!
 - Nilai minimum impuls J_{\min} yang mungkin diberikan agar domino dapat terguling!
- Sekarang terdapat domino lain yang identik diletakkan dengan jarak antar kedua sisi domino yang berdekatan sebesar s seperti gambar di bawah. Ketika domino pertama digulingkan ke arah domino kedua, ia akan menumbuk domino kedua secara tidak elastik sama sekali. Asumsikan tidak ada gesekan antar permukaan domino. Tentukan
- Perbandingan kecepatan sudut domino pertama dan kedua tepat setelah tumbukan! Tentukan pula perbandingan energi kinetik sistem tepat sebelum dan sesudah tumbukan!

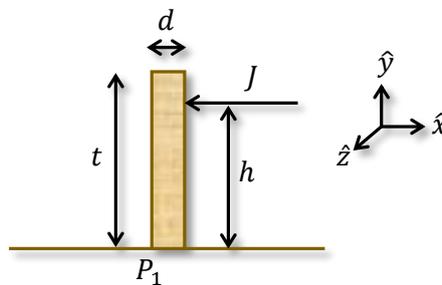
d. Sudut $\theta_{2\max}$ yang dibentuk oleh domino kedua (terhadap posisi awalnya) yang menyebabkan energi potensial sistem kedua domino tersebut maksimum!

Petunjuk : Untuk menyederhanakan perhitungan anggap bentuk domino cukup tipis sehingga $d \ll t$, serta asumsikan pula $s \ll t$ (berlaku juga untuk soal selanjutnya).

e. Jarak minimum antar sisi domino s_{\min} agar domino kedua juga dapat terguling!

Pembahasan :

a. Perhatikan gambar di bawah!



Misal vektor kecepatan sudut domino setelah diberi impuls adalah $\vec{\omega}_0$ maka

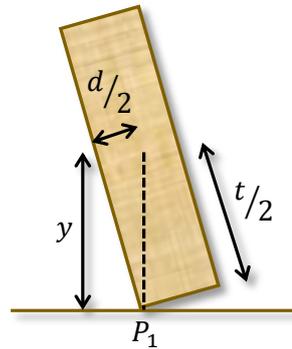
$$Jh\hat{z} = I_{P_1}\vec{\omega}_0 \Rightarrow \vec{\omega}_0 = \frac{Jh}{I_{P_1}}\hat{z}$$

Domino akan terguling jika memenuhi syarat minimum yang nanti akan kita bahas di bagian (b). Karena impuls J dibuat sekecil mungkin, maka agar kecepatan sudut minimum ini tetap tercapai, nilai h harus dibuat sebesar mungkin. Maka agar domino tetap dapat terguling sama impuls harus di berikan di ujung atas domino (nilai h paling besar yang mungkin) sehingga

$$h = t$$

b. Besar kecepatan sudut domino tepat setelah impuls diberikan adalah

$$|\vec{\omega}_0| = \omega_0 = \frac{3Jt}{m(d^2 + t^2)}$$



Agar domino dapat terguling, dengan kecepatan sudut awal ini, domino harus bisa mencapai posisi di mana energi potensialnya maksimum dan energi kinetiknya minimum yaitu saat pusat massa domino tepat berada di atas poros rotasinya (titik P_1) sehingga dengan konservasi energi akan kita peroleh (jadikan lantai sebagai acuan energi potensial sama dengan nol)

$$E_i = E_f$$

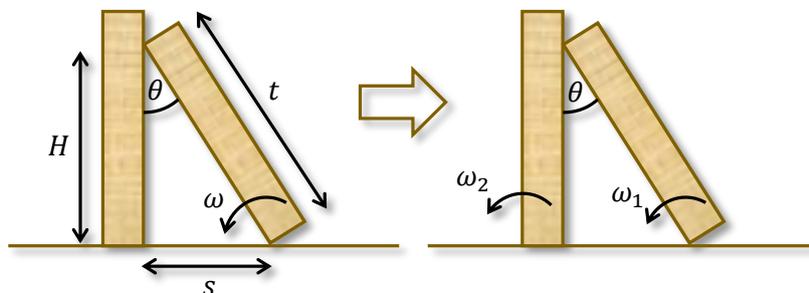
$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mgt = mgy$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}m(d^2 + t^2) \right) \left(\frac{3Jt}{m(d^2 + t^2)} \right)^2 + \frac{1}{2}mgt = \frac{1}{2}mg\sqrt{d^2 + t^2}$$

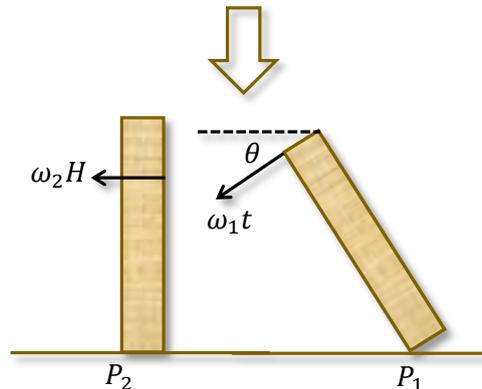
$$\frac{3J^2t^2}{m(d^2 + t^2)} = mg(\sqrt{d^2 + t^2} - t)$$

$$J_{\min} = \frac{m}{\sqrt{3}t} \sqrt{g(d^2 + t^2)(\sqrt{d^2 + t^2} - t)}$$

- c. Misal sebelum menumbuk domino kedua, kecepatan sudut domino pertama adalah ω .



dari trigonometri kita tahu bahwa $\cos \theta = \frac{H}{t}$ dan $\sin \theta = \frac{s}{t}$



Pada titik tumbukan antara kedua domino terjadi impuls aksi reaksi yang besarnya sama tapi berlawanan arah. Misal besar impuls ini Δp maka

$$\text{Domino pertama} \Rightarrow \Delta p H = I(\omega - \omega_1)$$

$$\text{Domino kedua} \Rightarrow \Delta p H = I\omega_2$$

Maka kita dapatkan $\omega_2 = \omega - \omega_1 \dots (1)$

Karena tumbukan tidak elastis sama sekali kecepatan saling menjauh titik yang bertumbukan akan bernilai pada arah tumbukan. Maksudnya adalah kecepatan titik tumbukan pada domino pertama dan domino kedua pada arah tumbukan atau horizontal akan sama besarnya.

$$\omega_2 H = \omega_1 t \cos \theta = \omega_1 t \frac{H}{t} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \dots (2)$$

Maka

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$$

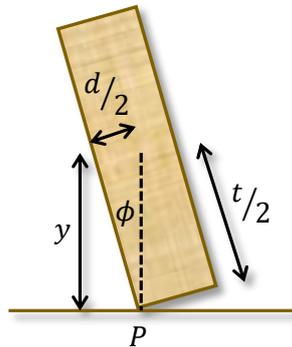
Dari persamaan (1) dan (2) kita dapatkan

$$\omega_2 = \omega_1 = \frac{1}{2} \omega$$

Perbandingan energi kinetik sebelum dan sesudah tumbukan menjadi

$$\frac{Ek_i}{EK_f} = \frac{\frac{1}{2} I \omega^2}{\frac{1}{2} I \omega_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{Ek_i}{EK_f} = 2$$

d. Misalkan sudut yang dibentuk domino terhadap posisi awalnya saat pusat massanya tepat di atas poros rotasinya adalah ϕ maka

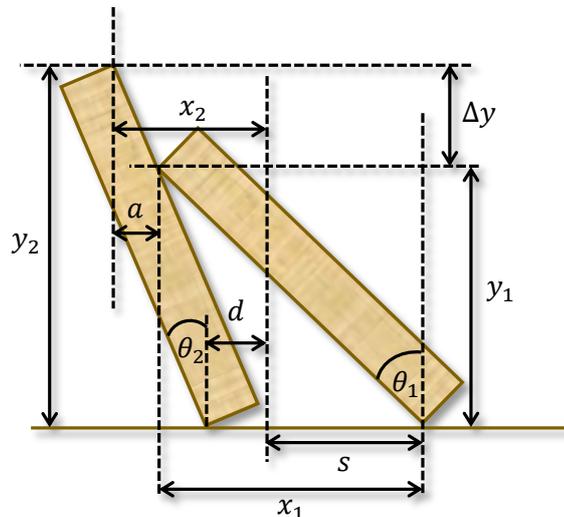


$$\tan \phi = \frac{d}{t}$$

Untuk aproksimasi $d \ll t$ bisa kita lakukan pendekatan $\tan \phi \approx \sin \phi \approx \phi$ sehingga

$$\phi = \frac{d}{t}$$

Sekarang perhatikan gambar di bawah



Sekarang kita misalkan sudut yang dibentuk oleh domino terhadap posisi dimana pusat massa tepat di atas poros adalah α untuk domino pertama dan β untuk domino kedua sehingga

$$\theta_1 = \phi + \alpha \text{ dan } \theta_2 = \phi + \beta$$

Dari geometri kita dapatkan

$$x_1 = t \sin \theta_1 \text{ dan } x_2 = t \sin \theta_2 + d(1 - \cos \theta_2)$$

$$y_1 = t \cos \theta_1 \text{ dan } y_2 = t \cos \theta_2 + d \sin \theta_2$$

untuk aproksimasi $d \ll t$ dan $s \ll t$ maka sudut θ_1 dan θ_2 akan bernilai kecil sehingga kita bisa lakukan pendekatan $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, $\cos \theta_1 \approx 1$, $\sin \theta_2 \approx \theta_2$ dan $\cos \theta_2 \approx 1$

$$x_1 = t(\phi + \alpha) \text{ dan } x_2 = t(\phi + \beta)$$

$$y_1 = t \text{ dan } y_2 = t + d(\phi + \beta)$$

Dari gambar sebelumnya kita peroleh bahwa

$$\Delta y = y_2 - y_1 = d(\phi + \beta)$$

$$\tan \theta_2 \approx \sin \theta_2 \approx \theta_2 = \frac{a}{\Delta y} \Rightarrow a = d(\phi + \beta)^2$$

Karena ϕ dan β cukup kecil maka $(\phi + \beta)^2 \approx 0$ karena nilainya sangat kecil sehingga $a \approx 0$

Dari gambar sebelumnya kita peroleh pula

$$x_1 + a = x_2 + s$$

Substitusi hasil yang diperoleh dari sebelumnya

$$t(\phi + \alpha) + 0 = t(\phi + \beta) + s$$

$$\alpha = \frac{s}{t} + \beta \dots (3)$$

Sekarang kita jadikan energi potensial sama dengan nol saat domino dalam keadaan tegak. Energi potensial domino saat pusat massanya tepat di atas poros rotasinya adalah

$$U_0 = \frac{1}{2} mg (\sqrt{d^2 + t^2} - t) = \frac{1}{2} mgt \left(\sqrt{1 + \frac{d^2}{t^2}} - 1 \right)$$

Untuk aproksimasi $d \ll t$ kita bisa lakukan pendekatan binomial newton

$$\left(1 + \frac{d^2}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{d^2}{2t^2}$$

Sehingga akan kita peroleh

$$U_0 = \frac{1}{4} mg \frac{d^2}{t}$$

Sekarang kita tinjau energi potensial domino pertama dan kedua sebagai fungsi α dan β dengan acuan energi potensial sama dengan nol saat domino tegak

Untuk domino pertama

$$U_1(\alpha) = \frac{1}{2}mg\sqrt{d^2 + t^2}(\cos \alpha - \cos \phi)$$

Saat di posisi tegak, ketinggian pusat massa domino bisa hubungan dengan ϕ

$$\frac{t}{2} = \sqrt{d^2 + t^2} \cos \phi$$

Untuk aproksimasi $d \ll t$ dan $s \ll t$ kita bisa lakukan pendekatan

$$\sqrt{d^2 + t^2} \approx t$$

Untuk pendekatan nilai cosinus kita gunakan deret meclaurin sampai orde kedua agar nilai α dan β tetap ada

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \text{ dan } \cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2}$$

Sehingga energi potensial domino pertama menjadi

$$U_1(\alpha) = \frac{1}{2}mgt \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} - 1 + \frac{\phi^2}{2} \right) = \frac{1}{4}mgt\phi^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\phi^2} \right)$$

Gunakan $\phi = \frac{d}{t}$ akan kita peroleh

$$U_1(\alpha) = \frac{1}{4}mg \frac{d^2}{t} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\phi^2} \right) \Rightarrow U_1(\alpha) = U_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\phi^2} \right)$$

Dengan cara yang sama untuk domino kedua akan kita peroleh pula

$$U_2(\beta) = U_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{\phi^2} \right)$$

Sehingga energi potensial sistem kedua domino ini adalah

$$U(\alpha, \beta) = U_0 \left[2 - \frac{1}{\phi^2} (\alpha^2 + \beta^2) \right]$$

Subtitusi persamaan (3)

$$U(\beta) = U_0 \left[2 - \frac{1}{\phi^2} \left(\left(\frac{s}{t} + \beta \right)^2 + \beta^2 \right) \right]$$

$$U(\beta) = 2U_0 \left[1 - \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} \right)^2 + \beta^2 + \frac{s}{t} \beta \right) \right]$$

Energi potensial sistem maksimum jika

$$\frac{dU(\beta)}{d\beta} = 0 \text{ dan } \frac{d^2U(\beta)}{d\beta^2} < 0$$

Maka

$$\frac{dU(\beta)}{d\beta} = 2U_0 \left[-\frac{1}{\phi^2} \left(2\beta + \frac{s}{t} \right) \right] = 0 \Rightarrow 2\beta_{\max} + \frac{s}{t} = 0 \Rightarrow \beta_{\max} = -\frac{s}{2t}$$

Dan terbukti bahwa energi potensial ini maksimum saat $\beta = \beta_{\max}$ karena

$$\left. \frac{d^2U(\beta)}{d\beta^2} \right|_{\beta_{\max}} = 2U_0 \left[-\frac{1}{\phi^2} (2) \right] = -\frac{4U_0}{\phi^2} < 0$$

Sehingga sudut yang dibentuk domino kedua terhadap posisi awalnya adalah

$$\begin{aligned} \theta_{2\max} &= \phi + \beta_{\max} \\ \theta_{2\max} &= \frac{d}{t} - \frac{s}{2t} \Rightarrow \theta_{2\max} = \frac{2d - s}{2t} \end{aligned}$$

Dengan energi potensial maksimum sistem adalah

$$\begin{aligned} U_{\max} &= 2U_0 \left[1 - \frac{1}{(d/t)^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} \right)^2 + \left(-\frac{s}{2t} \right)^2 + \frac{s}{t} \left(-\frac{s}{2t} \right) \right) \right] \\ U_{\max} &= 2U_0 \left[1 - \frac{s^2}{4d^2} \right] \end{aligned}$$

- e. Energi potensial domino pertama saat tumbukan adalah (nilainya tetap sesaat sebelum dan sesudah tumbukan, sebut saja U_{col} , acuan energi potensial sama dengan nol masih saat domino tegak)

$$U_{\text{col}} = \frac{1}{2} mg \sqrt{d^2 + t^2} (\cos(\theta - \phi) - \cos \phi)$$

Untuk aproksimasi $d \ll t$ dan $s \ll t$ kita bisa lakukan pendekatan

$$\sqrt{d^2 + t^2} \approx t$$

Untuk cosinus seperti sebelumnya kita gunakan deret meclaurin dan mengambil sampai orde kedua

$$\begin{aligned} U_{\text{col}} &= \frac{1}{2} mgt \left(1 - \frac{(\theta - \phi)^2}{2} - 1 + \frac{\phi^2}{2} \right) \\ U_{\text{col}} &= \frac{1}{4} mgt (\phi^2 - (\theta - \phi)^2) = \frac{1}{4} mgt (2\phi\theta - \theta^2) \end{aligned}$$

Dari geometri dan menggunakan aproksimasi kita peroleh

$$\frac{s}{t} = \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \text{ dan ingat bahwa } \phi = \frac{d}{t} \text{ maka}$$

$$U_{\text{col}} = \frac{1}{4} mgt \left(\frac{2ds}{t^2} - \frac{s^2}{t^2} \right)$$

Karena $U_0 = \frac{1}{4}mg \frac{d^2}{t}$ maka $\frac{1}{4}mgt = \frac{t^2}{d^2}U_0$ sehingga

$$U_{\text{col}} = \frac{t^2}{d^2}U_0 \left(\frac{2ds}{t^2} - \frac{s^2}{t^2} \right) \Rightarrow U_{\text{col}} = U_0 \left(\frac{2s}{d} - \frac{s^2}{d^2} \right)$$

Konservasi energi dari saat pusat massa domino pertama tepat berada di atas pusat massanya sampai sesaat sebelum tumbukan, kita peroleh

$$U_0 = U_{\text{col}} + Ek_i \Rightarrow Ek_i = U_0 - U_{\text{col}}$$

Energi kinetik sistem setelah tumbukan adalah

$$Ek_f = \frac{1}{2}Ek_i = \frac{1}{2}(U_0 - U_{\text{col}})$$

Agar domino kedua juga dapat terguling, dengan energi kinetik ini, sistem dua domino harus bisa mencapai posisi dimana energi potensialnya bernilai maksimum. Dengan konservasi energi kita peroleh

$$U_{\text{col}} + Ek_f = U_{\text{max}}$$

$$U_{\text{col}} + \frac{1}{2}(U_0 - U_{\text{col}}) = U_{\text{max}}$$

$$\frac{1}{2}U_{\text{col}} + \frac{1}{2}U_0 = U_{\text{max}}$$

Substitusi U_{col} dan U_{max} dan pada saat ini $s = s_{\text{min}}$

$$\frac{1}{2}U_0 \left(\frac{2s_{\text{min}}}{d} - \frac{s_{\text{min}}^2}{d^2} \right) + \frac{1}{2}U_0 = 2U_0 \left[1 - \frac{s_{\text{min}}^2}{4d^2} \right]$$

$$\frac{2s_{\text{min}}}{d} - \frac{s_{\text{min}}^2}{d^2} + 1 = 4 - \frac{s_{\text{min}}^2}{d^2}$$

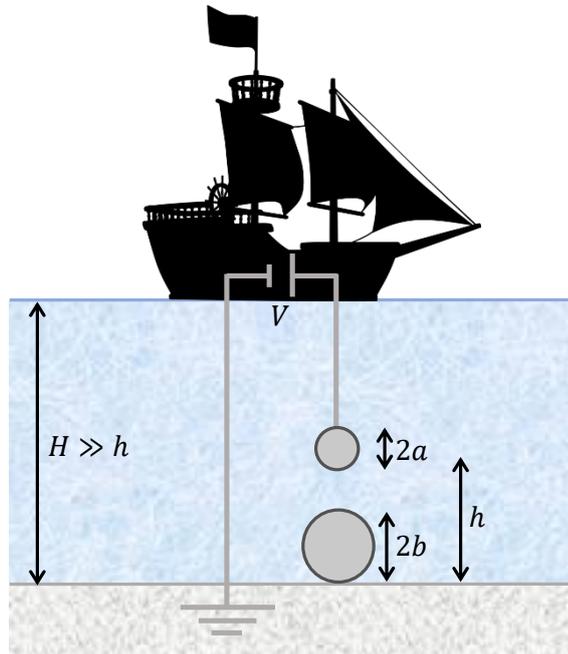
$$\frac{2s_{\text{min}}}{d} = 3 \Rightarrow s_{\text{min}} = \frac{3}{2}d$$

2. Seorang awak kapal mencoba untuk mencari harta karun dengan cara mendeteksi objek bawah laut yang bersifat konduktif. Ia melakukannya dengan cara menurunkan 2 buah kabel. Kabel pertama ia turunkan sampai menyentuh dasar laut dan kabel satunya lagi ia hubungkan ke bola konduktor pejal (berperan sebagai sensor) berjari-jari a yang ia turunkan sampai ketinggian h dari dasar laut dimana $h \gg a$ (lihat gambar di bawah). Kemudian, kedua kabel ia sambungkan ke kutub-kutub baterai dengan gaya gerak listrik sebesar V . Susunan ini dibuat dengan harapan dapat memberikan muatan pada sensor sehingga dapat mendeteksi keberadaan konduktor lain di dasar laut melalui interaksi gaya coulomb. Diasumsikan dasar laut rata sempurna dan berperan sebagai konduktor dengan potensial tetap, yakni $V = 0$ (*ground*). Permittivitas listrik air laut adalah ϵ . Jarak dasar laut ke permukaan air adalah H dengan $H \gg h$.

- Sebelum mencoba untuk menemukan harta karun, awak kapal tersebut mencoba untuk memperhitungkan besar muatan pada bola konduktor sensor. Dalam limit $h \rightarrow \infty$, tentukan muatan pada sensor yaitu Q_0 !
- Tanpa limit $h \rightarrow \infty$, tunjukkan bahwa muatan sensor dapat dituliskan sebagai $Q = Q_0 f(a, h)$ di mana $f(a, h)$ merupakan suatu deret polinom tak hingga yang bergantung pada a dan h . Tuliskan $f(a, h)$ sampai suku yang mengandung a^2 !
Petunjuk : Sistem bola konduktor dan konduktor dapat diganti dengan sistem muatan-muatan titik yang memnuhi syarat batas yang sama.
- Perkirakan besar gaya elektrostatis yang dirasakan, cukup sampai suku pertama. Apakah sensor tertarik ke dasar laut atau terdorong ke permukaan?

Baterai yang menghubungkan sensor dengan dasar laut sekarang di lepas. Dari hasil perhitungan pada bagian (b), terlihat bahwa berlaku $Q \approx Q_0$ untuk $h \gg a$, sehingga dapat digunakan Q_0 sebagai muatan sensor pada perhitungan-perhitungan selanjutnya. Sekarang, akan dipelajari reaksi sensor terhadap adanya konduktor lain.

- Misalkan terdapat konduktor berbentuk bola berjari-jari b tepat di bawah sensor yang terletak di atas dasar laut. Hitung besar gaya elektrostatis antara sensor dengan bola tersebut. Anggap $b \gg a$ sehingga sensor dapat diasumsikan sebagai muatan titik.

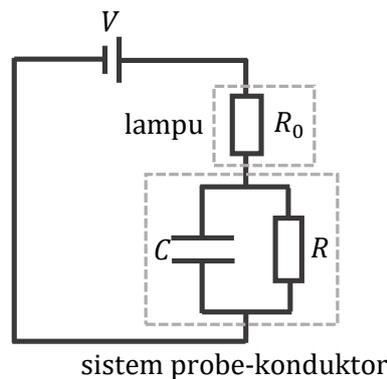


Ternyata, sang awak kapal mengalami kesulitan untuk mengukur gaya elektrostatis yang muncul karena kondisi air tidak tenang. Untuk itu, ia memikirkan cara lain untuk mendeteksi keberadaan harta karun. Ia menganggap bahwa sistem sensor, air laut, dan harta karun dapat dianggap sebagai suatu komponen rangkaian listrik, yakni resistor (resistansi R) yang terhubung dengan kapasitor (kapasitansi C) secara paralel.

e. Jika resistivitas air laut adalah ρ , hitung hasil perkalian R dan C !

Petunjuk : Nilai ini akan selalu sama untuk semua konfigurasi di mana sistem berada dalam medium dengan resistivitas ρ dan permitivitas ϵ . Jika tidak berhasil menemukan besaran ini, gunakan $RC = K$ untuk perhitungan-perhitungan selanjutnya.

Sang awak kapal memasang lampu pada rangkaian (*set up*) sebelumnya dengan harapan akan menemukan perubahan nyala lampu ketika sensor (*probe*) bergerak mendekati harta karun. Akan diselidiki pengaruh perubahan kapasitansi terhadap nyala lampu.



- f. Perubahan kapasitansi dimodelkan berubah secara linear terhadap waktu dengan gradien $\pm\delta$, yakni $+\delta$ ketika meningkat dan $-\delta$ ketika menurun. Misalkan perahu mula-mula bergerak menuju harta karun (saat $t = 0$ nilai $C = 0$) dan mencapai titik dimana jarak sensor paling dekat dengan harta karun saat $t = t_0$. Gambarkan grafik kapasitansi rangkaian terhadap waktu, $C(t)$ serta resistansi sebagai fungsi waktu, $R(t)$. Tandai bagian-bagian penting dalam grafik.
- g. Tentukan arus yang mengalir pada lampu yang memiliki resistansi R_0 sebagai fungsi waktu dalam selang $0 \leq t \leq t_0$. Gunakan kasus khusus $R_0 = 1/\delta$.

Petunjuk : Gunakan penyelesaian persamaan diferensial berikut

$$\text{jika } \frac{dy}{dx} + \left(\alpha + \frac{1}{x}\right)y = \beta$$

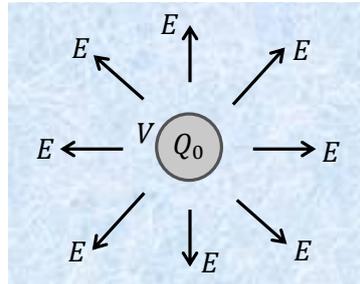
Penyelesaian untuk y adalah

$$y = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{x} \left(-\frac{\beta}{\alpha^2} + k e^{-\alpha x} \right)$$

dengan k adalah konstanta berdimensi

Pembahasan :

- a. Untuk limit $h \rightarrow \infty$, sensor dapat dianggap jauh dari efek dasar laut (konduktor datar) dan karena $H \gg h$ sensor dapat dianggap berada di tengah medium yang ukurannya sangat besar dengan permitivitas ϵ . Medan listrik sebagai fungsi jarak dari pusat sensor adalah $E(r)$.



Dengan Hukum Gauss untuk $r > a$ kita peroleh

$$\oint \vec{E}(r) \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

Beda potensial antara permukaan sensor dan permukaan bola yang sepusat dengan jari-jari yang sangat besar ($r \rightarrow \infty$) adalah sama dengan negatif dari usaha yang dilakukan oleh medan listrik untuk memindahkan suatu muatan dari permukaan bola yang sangat besar tadi (dari posisi tak hingga, $r = \infty$) ke permukaan sensor ($r = a$). Besar beda potensial ini dengan acuan posisi tak hingga ($V(\infty) = 0$) adalah

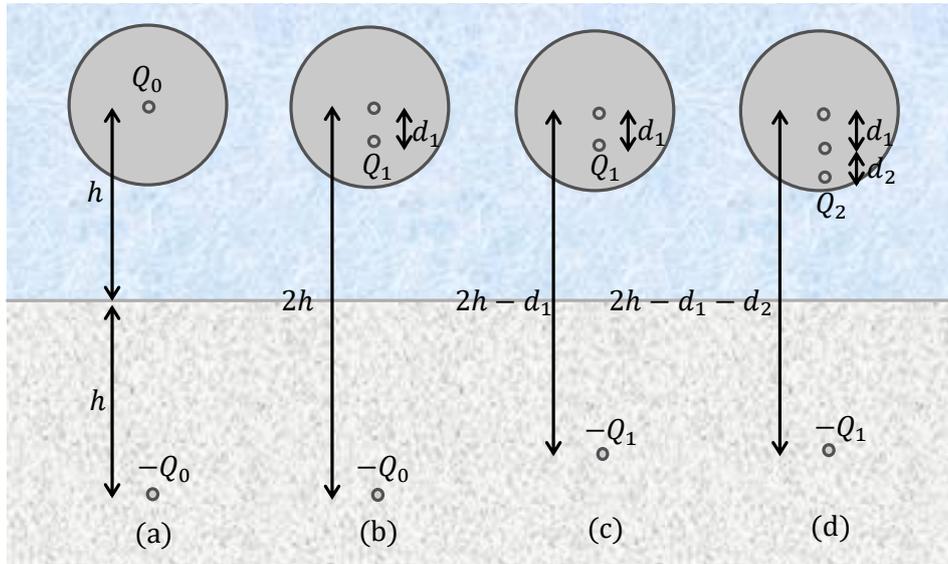
$$\int_{V(\infty)}^{V(a)} dV = - \int_{\infty}^a \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = V(a) - V(\infty) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon a}$$

beda potensial ini akan sama dengan gaya gerak listrik yang diberikan awak kapal sehingga

$$V = \Delta V = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon a} \Rightarrow Q_0 = 4\pi\epsilon a V$$

- b. Tanpa limit $h \rightarrow \infty$, permukaan dasar laut (konduktor datar) akan menyebabkan muatan baik pada sensor bola dan dasar laut sendiri tidak tersebar merata. Sistem ini kita bisa gantikan dengan sistem muatan titik yang tak berhingga. Perhatikan gambar berikut



Pertama perhatikan gambar (a), karena sensor berbentuk bola, muatan sensor Q_0 bisa diletakkan di pusatnya. Konduktor datar bisa digantikan dengan muatan bayangan $-Q_0$ yang terletak pada jarak yang sama dari dari dasar laut pada sisi yang berlawanan.

Berikutnya perhatikan gambar (b), muatan bayangan $-Q_0$ akan membuat sisi bola sensor yang dekat ke dasar laut memiliki penyebaran muatan yang lebih banyak di banding sisi sensor lainnya. Dengan konsep muatan tambahan, menggantikan efek ini dengan muatan Q_1 . Untuk menghitung Q_1 kita hilangkan dulu Q_0 sehingga potensial di permukaan bola harus sama dengan nol. Dari sini akan kita peroleh

Di titik puncak sensor ($V_p = 0$)

$$\frac{-Q_0}{4\pi\epsilon(2h+a)} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon(a+d_1)} = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{a+d_1}{2h+a} Q_0$$

Di titik dasar sensor ($V_d = 0$)

$$\frac{-Q_0}{4\pi\epsilon(2h-a)} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon(a-d_1)} = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{a-d_1}{2h-a} Q_0$$

Dari keduanya akan kita peroleh

$$d_1 = \frac{a^2}{2h} \text{ dan } Q_1 = \frac{a}{2h} Q_0$$

Berikutnya perhatikan gambar (c), karena sekarang ada muatan tambahan Q_1 pada sensor, kita perlu menambahkan muatan bayangan $-Q_1$ sebagai pengganti konduktor datar dengan alasan yang sama seperti pada gambar (a).

Pada gambar (d), proses pada gambar (b) akan terulang kembali

$$d_2 = \frac{a^2}{2h - d_1} = \frac{a^2}{2h - \frac{a^2}{2h}} \text{ dan } Q_2 = \frac{a}{2h - d_1} Q_1 = \frac{a^2}{4h^2 - a^2} Q_0$$

Proses ini akan terus berulang sampai tak hingga pengulangan. Maka muatan bola sensor dapat ditotalkan menjadi

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$$

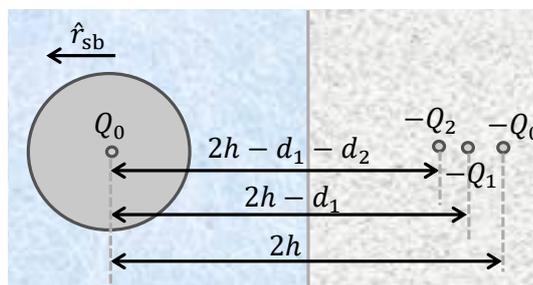
$$Q = Q_0 + \frac{a}{2h} Q_0 + \frac{a^2}{4h^2 - a^2} Q_0 + \dots$$

Kita diminta sampai suku yang mengandung a^2 dan dengan pendekatan $h \gg a$ akan kita peroleh

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{a}{2h} + \frac{a^2}{4h^2} \right)$$

Dengan Q_0 seperti hasil yang didapat pada bagian (a).

- c. Sekarang $Q \approx Q_0$. Gaya yang bekerja pada sensor akibat dasar laut dapat digantikan dengan muatan bayangan Q_0 , Q_1 , Q_2 , dan seterusnya. Perhatikan gambar berikut



Gaya pada sensor akibat muatan bayangan $-Q_0$

$$\vec{F}_0 = \frac{Q_0(-Q_0)}{4\pi\epsilon(2h)^2} \hat{r}_{sb} \Rightarrow \vec{F}_0 = -\frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon h^2} \hat{r}_{sb}$$

Kita gunakan pendekatan $h \gg a$

Gaya pada sensor akibat muatan bayangan $-Q_1$

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_0(-Q_1)}{4\pi\epsilon(2h-d_1)^2}\hat{r}_{sb} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\frac{a}{2h}\frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon h^2}\hat{r}_{sb}$$

Gaya pada sensor akibat muatan bayangan $-Q_2$

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_0(-Q_2)}{4\pi\epsilon(2h-d_1)^2}\hat{r}_{sb} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\frac{a^2}{4h^2}\frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon h^2}\hat{r}_{sb}$$

Dan seterusnya dengan bentuk yang sama. Sehingga gaya total yang bekerja pada bola sensor adalah

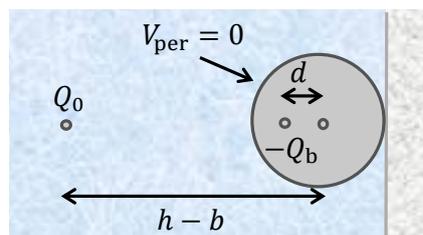
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \\ \vec{F} &= -\frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon h^2}\hat{r}_{sb} + -\frac{a}{2h}\frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon h^2}\hat{r}_{sb} + -\frac{a^2}{4h^2}\frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon h^2}\hat{r}_{sb} + \dots \\ \vec{F} &= \frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon h^2}\left(1 + \frac{a}{2h} + \frac{a^2}{4h^2} + \dots\right)(-\hat{r}_{sb})\end{aligned}$$

Karena hanya diminta sampai orde pertama dan substitusi $Q_0 = 4\pi\epsilon aV$ akan kita peroleh

$$\vec{F} = \frac{\pi\epsilon a^2 V^2}{h^2}(-\hat{r}_{sb}) \Rightarrow |\vec{F}| = \frac{\pi\epsilon a^2 V^2}{h^2}$$

Arah gaya ini adalah $-\hat{r}_{sb}$ atau menuju dasar laut sehingga sensor cenderung tertarik menuju dasar laut.

- d. Untuk $b \gg a$ sensor dapat dianggap sebagai muatan titik. Harta karun yang berbentuk bola akan memiliki potensial yang sama dengan nol di seluruh permukaannya karena dia terhubung langsung dengan dasar laut. Akibat adanya sensor, harta karun akan terinduksi dan bermuatan namun penyebaran muatannya tidak homogen. Muatan total dari harta karun ini dapat kita gantikan menggunakan metode bayangan dengan muatan bayangan $-Q_b$. Perhatikan gambar di bawah



Dari metode bayangan akan kita peroleh (mirip seperti cara pada bagian (b) untuk gambar (b))

$$d = \frac{b^2}{h-b} \text{ dan } Q_b = \frac{b}{h-b} Q_0$$

Maka besar gaya elektrostatis antara harta karun dan sensor adalah

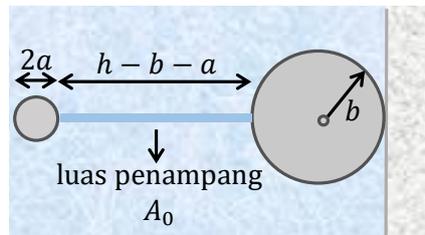
$$|\vec{F}_{sb}| = \frac{Q_0 | -Q_b |}{4\pi\epsilon(h-b-d)^2} |\hat{r}_{sb}|$$

$$|\vec{F}_{sb}| = \frac{Q_0 \left(\frac{b}{h-b} Q_0 \right)}{4\pi\epsilon \left(h-b-\frac{b^2}{h-b} \right)^2} |\hat{r}_{sb}| = \frac{bQ_0^2(h-b)}{4\pi\epsilon h^2(h-2b)^2}$$

Substitusi $Q_0 = 4\pi\epsilon aV$ akan kita peroleh

$$|\vec{F}_{sb}| = \frac{4\pi\epsilon a^2 V^2 b(h-b)}{h^2(h-2b)^2}$$

- e. Secara alami muatan akan mengkondisikan dirinya untuk berada dalam potensial yang minimum. Aliran muatan antara sensor dan harta karun sedemikian hingga akan melalui suatu “kawat” air laut yang memiliki luas penampang yang sangat kecil, misalkan A_0 . Perhatikan gambar di bawah



Resistansi dan kapasitansi (dapat dianggap sebagai kapasitor keping sejajar dengan luas keping A_0) “kawat” air laut ini adalah

$$R = \rho \frac{h-b-a}{A_0} \text{ dan } C = \epsilon \frac{A_0}{h-b-a}$$

Sehingga perkalian R dan C adalah

$$RC = \rho \frac{h-b-a}{A_0} \times \epsilon \frac{A_0}{h-b-a} \Rightarrow RC = \rho\epsilon$$

- f. Untuk $0 < t < t_0$

$$\frac{dC}{dt} = \delta \Rightarrow \int_0^C dC = \delta \int_0^t dt \Rightarrow C(t) = \delta t$$

$$RC = \rho\varepsilon \Rightarrow R(t) = \frac{\rho\varepsilon}{\delta t}$$

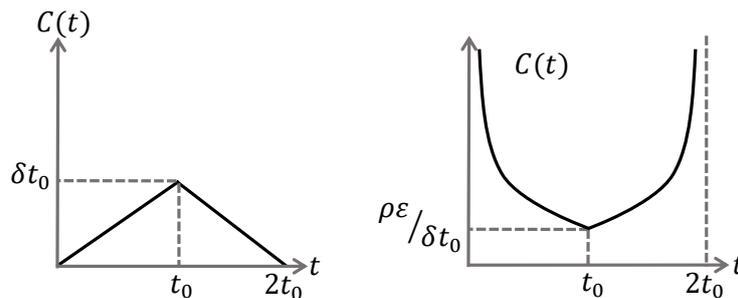
Untuk $t = t_0$ besar kapasitansi adalah $C_0 = \delta t_0$ dan $R_0 = \frac{\rho\varepsilon}{\delta t_0}$

Untuk $t > t_0$

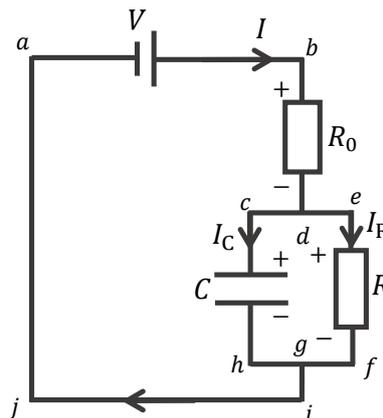
$$\frac{dC}{dt} = -\delta \Rightarrow \int_{C_0}^C dC = \delta \int_{t_0}^t dt \Rightarrow C(t) = 2\delta t_0 - \delta t$$

$$RC = \rho\varepsilon \Rightarrow R(t) = \frac{\rho\varepsilon}{2\delta t_0 - \delta t}$$

Sehingga grafik $C(t)$ dan $R(t)$ akan berbentuk



g. Kondisi untuk $0 < t < t_0$. Perhatikan loop berikut



Untuk loop cdefghc : Hukum II Kirchoff

$$\frac{Q}{C} - I_R R = 0 \Rightarrow I_R = \frac{Q}{RC} \dots (1)$$

Untuk simpal d : Hukum I Kirchoff

$$I = I_R + I_C$$

Karena $I_C = \frac{dQ}{dt}$ akan kita peroleh

$$I = I_R + \frac{dQ}{dt} \dots (2)$$

Untuk loop abdefgija : Hukum II Kirchoff

$$-V + IR_0 + I_R R = 0$$

Substitusi persamaan (2)

$$-V + \left(I_R + \frac{dQ}{dt} \right) R_0 + I_R R = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} R_0 + I_R (R_0 + R) = V$$

Substitusi persamaan (1)

$$\frac{dQ}{dt} R_0 + \frac{Q}{RC} (R_0 + R) = V \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_0 C} \right) Q = \frac{V}{R_0}$$

Selanjutnya substitusi R dan C serta kasus khusus yang memberikan $R_0 = 1/\delta$

$$\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{1}{\rho \varepsilon} + \frac{1}{t} \right) Q = V \delta$$

Persamaan diferensial ini analog dengan bentuk yang diberikan oleh soal yaitu

$$\frac{dy}{dx} + \left(\alpha + \frac{1}{x} \right) y = \beta \Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{x} \left(-\frac{\beta}{\alpha^2} + k e^{-\alpha x} \right)$$

Sehingga muatan Q sebagai fungsi waktu adalah

$$Q = V \delta \rho \varepsilon + \frac{1}{t} \left(-V \delta \rho^2 \varepsilon^2 + k e^{-\frac{t}{\rho \varepsilon}} \right)$$

Kalikan semuanya dengan t

$$Qt = V \delta \rho \varepsilon t - V \delta \rho^2 \varepsilon^2 + k e^{-\frac{t}{\rho \varepsilon}}$$

Saat $t = 0$, $Q = Q_0$ sehingga

$$0 = 0 - V \delta \rho^2 \varepsilon^2 + k \Rightarrow k = V \delta \rho^2 \varepsilon^2$$

Alhasil kita peroleh

$$Q = V \delta \rho \varepsilon - \frac{1}{t} V \delta \rho^2 \varepsilon^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho \varepsilon}} \right)$$

Arus pada kapasitor dan resistor adalah

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = V\delta - \left(\frac{1}{\rho\varepsilon} + \frac{1}{t}\right) \left[V\delta\rho\varepsilon - \frac{1}{t}V\delta\rho^2\varepsilon^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}\right) \right]$$

$$I_R = \frac{1}{\rho\varepsilon} \left[V\delta\rho\varepsilon - \frac{1}{t}V\delta\rho^2\varepsilon^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}\right) \right]$$

Keduanya dapat disederhanakan menjadi

$$I_C = V\delta \left[\left(\frac{1}{\rho\varepsilon} + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} \rho^2 \varepsilon^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}\right) - \frac{1}{t} \rho\varepsilon \right]$$

$$I_R = V\delta \left[1 - \frac{1}{t} \rho\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}\right) \right]$$

Sehingga arus yang mengalir pada lampu sebagai fungsi waktu adalah

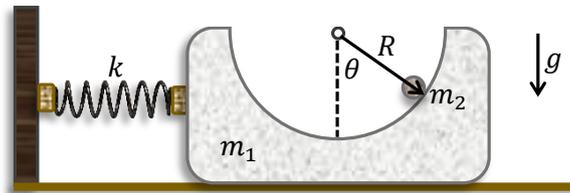
$$I = I_R + I_C$$

$$I = V\delta \left[1 - \frac{1}{t} \rho\varepsilon \left(2 - e^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}\right) + \left(\frac{1}{\rho\varepsilon} + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} \rho^2 \varepsilon^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}\right) \right]$$

Dengan menyederhanakan bentuknya akan kita peroleh

$$I = V\delta \left[1 - \frac{1}{t} \rho\varepsilon + \frac{1}{t^2} \rho^2 \varepsilon^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}\right) \right]$$

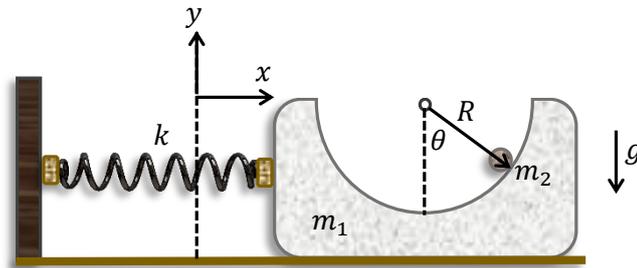
3. Sebuah mangkuk bermassa m_1 memiliki permukaan setengah bola dengan jari-jari R . mangkuk tersebut berada di atas lantai licin serta terhubung dengan pegas tak bermassa (dengan tetapan pegas k) yang tersambung ke dinding hitam yang kokoh (lihat gambar di bawah). di atas permukaan setengah bola tersebut terdapat partikel bermassa m_2 yang dapat bergerak bebas tanpa gesekan. Sudut antara garis penghubung pusat bola mangkuk ke partikel m_2 dengan garis vertikal yang melalui pusat bola adalah θ . Anggap bahwa gerakan m_1 hanya pada arah horizontal x (positif ke kanan, negatif ke kiri), serta gerakan m_2 (dua dimensi) menyusuri lintasan setengah lingkaran seperti pada gambar. Percepatan gravitasi g ke bawah.



- Dengan mengasumsikan sudut θ tidak kecil, tuliskan dua persamaan gerak yang melibatkan besaran x dan θ !
- Dari dua persamaan di atas, dengan mengasumsikan bahwa sudut θ kecil, tentukan kecepatan sudut osilasi untuk mode normal sistem tersebut!
- Selanjutnya tentukan kecepatan sudut osilasi untuk kasus khusus berikut ini serta berikan interpretasi fisisnya.
 - Tetapan pegas $k = 0$
 - Tetapan pegas $k \rightarrow \infty$
 - Massa $m_2 = 0$
 - Jari-jari $R \rightarrow 0$

Pembahasan :

- Tinjau ketika mangkuk disimpangkan sejauh x ke kanan (posisi kesetimbangan ketika pegas relaks) dan partikel m_2 disimpangkan dengan sudut θ terhadap posisi setimbangnya (posisi ketika di dasar mangkuk).



Vektor posisi m_1 dan m_2 adalah

$$\vec{r}_1 = x\hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = (x + R \sin \theta)\hat{i} - R \cos \theta \hat{j}$$

Vektor kecepatan dan percepatan keduanya akan kita dapatkan pula

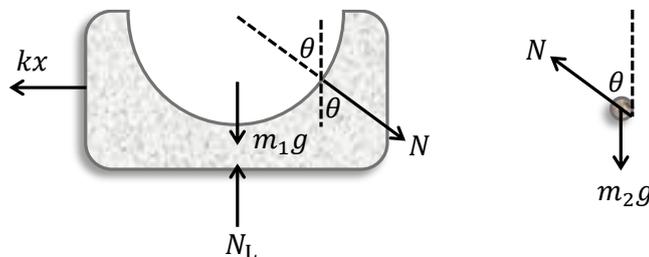
$$\vec{v}_1 = \dot{x}\hat{i}$$

$$\vec{v}_2 = (\dot{x} + R\dot{\theta} \cos \theta)\hat{i} + R\dot{\theta} \sin \theta \hat{j}$$

$$\vec{a}_1 = \ddot{x}\hat{i}$$

$$\vec{a}_2 = (\ddot{x} + R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta)\hat{i} + (R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta)\hat{j}$$

Tinjau gaya-gaya yang bekerja pada mangkuk m_1 dan partikel m_2



Dari gambar di atas kita peroleh

$$\sum \vec{F}_1 = (N \sin \theta - kx)\hat{i} + (N_L - m_1g - N \cos \theta)\hat{j}$$

$$\sum \vec{F}_2 = -N \sin \theta \hat{i} + (N \cos \theta - m_2g)\hat{j}$$

Menggunakan Hukum II Newton kita peroleh

$$\sum \vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1$$

$$(N \sin \theta - kx)\hat{i} + (N_L - m_1g - N \cos \theta)\hat{j} = m_1\ddot{x}\hat{i}$$

Dan

$$\sum \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

$$-N \sin \theta \hat{i} + (N \cos \theta - m_2 g) \hat{j} \\ = m_2 (\ddot{x} + R \ddot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}^2 \sin \theta) \hat{i} + m_2 (R \ddot{\theta} \sin \theta + R \dot{\theta}^2 \cos \theta) \hat{j}$$

Dari arah \hat{i} dan \hat{j} kita peroleh

$$N \sin \theta - kx = m_1 \ddot{x} \Rightarrow N \sin \theta = m_1 \ddot{x} + kx \dots (1)$$

$$N_L - m_1 g - N \cos \theta = 0 \Rightarrow N_L = m_1 g + N \cos \theta \dots (2)$$

$$-N \sin \theta = m_2 \ddot{x} + m_2 R \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 R \dot{\theta}^2 \sin \theta \Rightarrow N \sin \theta \\ = -m_2 \ddot{x} - m_2 R \ddot{\theta} \cos \theta + m_2 R \dot{\theta}^2 \sin \theta \dots (3)$$

$$N \cos \theta - m_2 g = m_2 R \ddot{\theta} \sin \theta + m_2 R \dot{\theta}^2 \cos \theta \Rightarrow N \cos \theta \\ = m_2 g + m_2 R \ddot{\theta} \sin \theta + m_2 R \dot{\theta}^2 \cos \theta \dots (4)$$

Dari persamaan (1) dan (3) kita dapatkan

$$m_1 \ddot{x} + kx = -m_2 \ddot{x} - m_2 R \ddot{\theta} \cos \theta + m_2 R \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + kx + m_2 R \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 R \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \dots (6)$$

Dari persamaaan (3) dan (4) kita peroleh

$$(4) \times \sin \theta$$

$$(3) \times \cos \theta$$

$$\frac{N \sin \theta \cos \theta = m_2 g \sin \theta + m_2 R \ddot{\theta} \sin^2 \theta + m_2 R \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \\ N \sin \theta \cos \theta = -m_2 \ddot{x} \cos \theta - m_2 R \ddot{\theta} \cos^2 \theta + m_2 R \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta}{0 = m_2 g \sin \theta + m_2 \ddot{x} \cos \theta + m_2 R \ddot{\theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}$$

Atau

$$g \sin \theta + \ddot{x} \cos \theta + R \ddot{\theta} = 0 \dots (7)$$

Persamaan (6) dan (7) adalah dua persamaan gerak yang melibatkan x dan θ .

- b. Untuk sudut θ yang kecil, kita bisa lakukan pendekatan $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$, maka persamaan (6) dan (7) dapat kita tulis ulang menjadi

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + kx + m_2 R \ddot{\theta} = 0$$

$$g\theta + \ddot{x} + R \ddot{\theta} = 0$$

Untuk gerak osilasi, berlaku $\ddot{x} = -\omega^2 x$ dan $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$ sehingga

$$[k - (m_1 + m_2) \omega^2] x - m_2 R \omega^2 \theta = 0$$

$$-\omega^2 x + (g - R \omega^2) \theta = 0$$

Dalam bentuk matriks bisa kita tuliskan ulang menjadi

$$\begin{pmatrix} k - (m_1 + m_2)\omega^2 & -m_2R\omega^2 \\ -\omega^2 & g - R\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = 0$$

Agar solusinya tidak bernilai nol, matriks sebelah kiri haruslah berupa matriks singular yang memiliki nilai determinan sama dengan nol

$$\begin{vmatrix} k - (m_1 + m_2)\omega^2 & -m_2R\omega^2 \\ -\omega^2 & g - R\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[k - (m_1 + m_2)\omega^2](g - R\omega^2) - (-m_2R\omega^2)(-\omega^2) = 0$$

$$m_1R\omega^4 - [kR + (m_1 + m_2)g]\omega^2 + kg = 0$$

Dengan rumus kuadrat kita akan dapatkan nilai ω^2 yaitu

$$\omega^2 = \frac{kR + (m_1 + m_2)g \pm \sqrt{[kR + (m_1 + m_2)g]^2 - 4m_1gkR}}{2m_1R}$$

$$\omega^2 = \frac{kR + (m_1 + m_2)g \pm \sqrt{k^2R^2 + (m_1 + m_2)^2g^2 + 2kR(m_2 - m_1)g}}{2m_1R}$$

c. Untuk kasus khusus

(i) Tetapan pegas $k = 0$, maka

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)g \pm (m_1 + m_2)g}{2m_1R}$$

$$\omega_1 = 0 \text{ atau } \omega_2 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1R}}$$

ω_1 menyatakan bahwa sistem tidak berosilasi melainkan hanya mengalami gerak translasi, hal ini benar jika pegas tidak ada ($k = 0$)

ω_2 menyatakan bahwa sistem mangkuk dan partikel berosilasi, gerakan partikel dan mangkuk berlawanan arah seperti gerak osilasi mangkuk dan partikel tanpa pegas.

(ii) Tetapan pegas $k \rightarrow \infty$, maka

$$\omega^2 = \frac{kR + (m_1 + m_2)g \pm kR\sqrt{1 + \frac{(m_1 + m_2)^2g^2}{k^2R^2} + \frac{2(m_2 - m_1)g}{kR}}}{2m_1R}$$

$$\omega^2 \approx \frac{kR + (m_1 + m_2)g \pm kR\sqrt{1 + \frac{2(m_2 - m_1)g}{kR}}}{2m_1R}$$

Dengan hampiran binomial newton kita peroleh

$$\sqrt{1 + \frac{2(m_2 - m_1)g}{kR}} = \left(1 + \frac{2(m_2 - m_1)g}{kR}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{(m_2 - m_1)g}{kR}$$

Sehingga

$$\omega^2 \approx \frac{kR + (m_1 + m_2)g \pm (kR + (m_2 - m_1)g)}{2m_1R}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{m_2g}{m_1R}} \rightarrow \infty \text{ atau } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

ω_1 menyatakan menyatakan bahwa beresilasi dengan sangat cepat namun amplitudonya sangat kecil sehingga kita tidak bisa melihat gerakannya ini. Secara langsung, jika kita lihat mangkuk dan pegas akan diam karena pegas sangat kaku.

ω_2 menyatakan bahwa partikel beresilasi di sekitar dasar mangkuk. Hal ini terjadi karena pegas dan mangkuk diam akibat pegas yang sangat kaku.

(iii) Massa $m_2 = 0$, maka

$$\omega^2 = \frac{kR + m_1g \pm \sqrt{k^2R^2 + m_1^2g^2 - 2m_1gkR}}{2m_1R}$$

$$\omega^2 = \frac{kR + m_1g \pm |kR - m_1g|}{2m_1R}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \text{ atau } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

ω_1 menyatakan bahwa jika partikel tidak ada, pegas dan mangkuk akan beresilasi seperti sistem massa pegas biasa.

ω_2 menyatakan bahwa untuk massa partikel yang sangat kecil atau mendekati nol, efek gerakan mangkok tidak terlalu mempengaruhinya sehingga dia akan beresilasi sederhana di sekitar dasar mangkuk.

(iv) Jari-jari $R \rightarrow 0$, maka

$$\omega^2 = \frac{kR + (m_1 + m_2)g \pm (m_1 + m_2)g \sqrt{\frac{k^2R^2}{(m_1 + m_2)^2g^2} + 1 + \frac{2kR(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)^2g^2}}}{2m_1R}$$

$$\omega^2 \approx \frac{k}{2m_1} + \frac{(m_1 + m_2)g}{2m_1R} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kR(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)^2 g^2}} \right]$$

Dengan hampiran binomial newton kita dapatkan

$$\sqrt{1 + \frac{2kR(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)^2 g^2}} = \left(1 + \frac{2kR(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)^2 g^2} \right)^{1/2} \approx 1 + \frac{kR(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)^2 g^2}$$

Maka

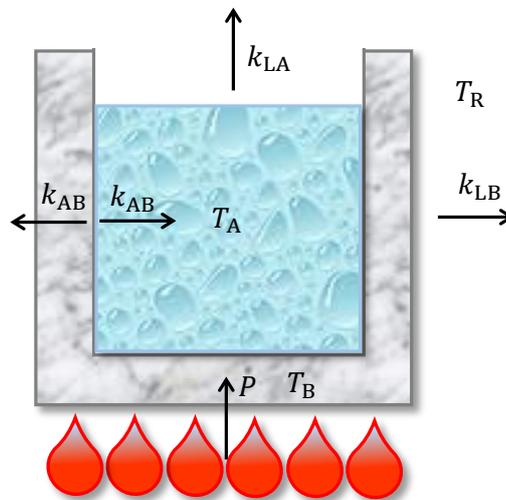
$$\omega^2 \approx \frac{k}{2m_1} + \frac{(m_1 + m_2)g}{2m_1R} \left[1 \pm \left(1 + \frac{kR(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)^2 g^2} \right) \right]$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{km_2}{m_1(m_1 + m_2)} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1R}} \rightarrow \infty \text{ atau } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{(m_1 + m_2)}}$$

ω_1 menyatakan bahwa sistem beresilasi sangat cepat namun dengan amplitudo yang sangat kecil sehingga gerakan ini tidak teramati oleh kita secara langsung.

ω_2 menyatakan bahwa untuk jari-jari yang sangat kecil, partikel dan mangkuk akan cenderung menjadi satu benda dan bergerak bersama sehingga sistem akan seperti sistem massa pegas biasa.

4. Dalam kehidupan sehari-hari, ada banyak hal yang bisa dipelajari dari proses fisika yang sederhana. Pada soal ini, kita meninjau dinamika perubahan temperatur pada proses pemanasan air. Dalam pemodelan sederhana ini, kita asumsikan bahwa energi panas berupa yang berasal dari kompor api di transfer ke bejana pemanas (berkapasitas kalor C_B) bertemperatur T_B dengan daya P . Bejana ini menampung air (berkapasitas kalor C_A) dengan temperatur T_A (lihat gambar di bawah).



Apabila temperatur bejana tidak sama dengan air, maka terdapat perpindahan kalor dengan laju yang dapat digambarkan oleh persamaan

$$\frac{dQ}{dt} = k_{AB}(T_B - T_A)$$

Dengan dQ/dt adalah laju perpindahan kalor dari bejana ke air, k_{AB} adalah koefisien transfer termal antar bejana dan air.

Apabila temperatur bejana dan air lebih tinggi daripada temperatur ruangan T_R , maka terjadi perpindahan kalor dari bejana dan air ke ruangan, dengan koefisien transfer termal masing-masing k_{LB} dan k_{LA} . Untuk soal-soal berikut, asumsikan $k_{AB} \gg k_{LB}, k_{LA}$ sehingga laju perpindahan kalor (konduktif) antara air dan bejana jauh lebih cepat daripada hilangnya kalor dari bejana dan air ke udara (konveksi).

- a. Fungsi temperatur air dan bejana dalam proses pemanasan air.

Pada keadaan awal, $T_A = T_B = T_R$. Kemudian pada $t = 0$, kompor api dinyalakan, sehingga daya panas sebesar P mengalir dari kompor api ke bejana. Kita bisa menghubungkan nilai P dengan koefisien transfer termal k_{AB} melalui persamaan

$P = k_{AB}T_s$ dimana T_s adalah suatu parameter temperatur yang sampai pada bagian ini belum memiliki makna apapun. Sebagai petunjuk sementara, kalian boleh menganggap bahwa T_s adalah sebesar $1 - 10$ K. Untuk soal (a) dan (b), asumsikan $P/T_s = k_{AB} \gg k_{LB}, k_{LA}$ sehingga kita bisa mengabaikan proses hilangnya kalor dari bejana dan air ke udara.

Carilah fungsi temperatur air $T_A(t)$ dan bejana $T_B(t)$ terhadap waktu! Nyatakan jawaban kalian dalam parameter T_R, k_{AB}, C_A, C_B , dan P .

Petunjuk : Dengan mempelajari proses fisika ini dan melihat bentuk persamaan diferensialnya, bentuk umum hasil persamaannya (*ansatz*) dapat kita tebak dan akan memenuhi formula

$$T_A(t) = A_0 + A_1t + A_2(1 - e^{-\lambda t})$$

$$T_B(t) = B_0 + B_1t + B_2(1 - e^{-\lambda t})$$

b. Perbedaan temperatur air dan bejana.

Tentukan perbedaan temperatur antara air dan bejana $\Delta T = T_B - T_A$ setelah waktu pemanasan yang cukup lama $t \gg 1/\lambda$! Nyatakan jawaban kalian dalam parameter C_A, C_B , dan T_s . Hitung juga nilai numeriknya apabila diketahui $P = 1$ kW, $k_{AB} = 200$ W/K, $C_A = 10$ kJ/K, dan $C_B = 1$ kJ/K.

c. Fungsi temperatur air dan bejana setelah kompor dipadamkan.

Kompor api dipadamkan dan anda menunggu sesaat ($t_{tunggu} \gg 1/\lambda$) sehingga temperatur air kurang lebih sama dengan temperatur bejana $T_A \approx T_B \approx T_H$. Tentukan fungsi perubahan temperatur air $T_A(t)$ dan bejana $T_B(t)$ selama proses kalor hilang ke udara! Nyatakan jawaban kalian dalam parameter $T_H, T_R, k_{LA}, k_{LB}, k_{AB}, C_A$, dan C_B .

Dengan $k_{AB} = 200$ W/K, $k_{LA} = 10$ W/K, $k_{LB} = 20$ W/K, $C_A = 10$ kJ/K, $C_B = 1$ kJ/K, $T_H = 80^\circ\text{C}$, dan $T_R = 25^\circ\text{C}$, hitung waktu yang dibutuhkan supaya air dan bejana mencapai suhu $T_f = 30^\circ\text{C}$!

d. Eksperimen fisika dan temperatur air.

Anda adalah seorang ilmuwan yang ingin melakukan suatu eksperimen, dimana terdapat parameter-parameter (misalnya laju reaksi, efek pemuain, dan

sebagainya) yang berkaitan dengan temperatur air. Namun, kalian hanya dapat mengukur temperatur bejana dengan teliti, dan Anda mengambil asumsi bahwa temperatur air adalah sama dengan temperatur bejana.

Berikut adalah beberapa cara pengambilan data. Diantara 3 pilihan berikut, manakah cara yang menurut kalian paling akurat? Berikan alasan (matematis) yang tepat untuk jawaban anda.

- (i) Mengambil data dalam proses *heating* (kompor menyala)
- (ii) Memanaskan air terlebih dahulu, dan kemudian mengambil data dalam proses *cooling* (kompor padam)
- (iii) Melakukan proses (i) dan (ii) dan mengambil rata-rata dari kedua set data.

Pembahasan :

a. Tinjau suatu saat setelah selang waktu t kompor dinyalakan. Kita amati aliran kalor pada selang waktu dt . Kalor yang masuk ke bejana dari kompor akan digunakan untuk memanaskan bejana dan dialirkan pula pada air, maka kita peroleh

$$Pdt = C_B dT_B + k_{AB}(T_B - T_A)dt \dots (1)$$

Kalor yang diberikan oleh bejana pada air akan digunakan untuk menaikkan suhu air, dari sini kita peroleh pula

$$k_{AB}(T_B - T_A)dt = C_A dT_A \dots (2)$$

Substitusi (2) ke (1)

$$Pdt = C_B dT_B + C_A dT_A$$

Integralkan persamaan di atas dengan kondisi pada saat $t = 0, T_B = T_A = T_R$ sehingga akan didapat

$$\int_0^t Pdt = C_B \int_{T_R}^{T_B} dT_B + C_A \int_{T_R}^{T_A} dT_A$$

$$Pt = C_B(T_B - T_R) + C_A(T_A - T_R)$$

$$Pt = C_B T_B + C_A T_A - (C_B + C_A)T_R$$

$$C_B T_B + C_A T_A = (C_B + C_A)T_R + Pt \dots (3)$$

Dari persamaan (2) akan kita peroleh

$$k_{AB}(T_B - T_A) = C_A \frac{dT_A}{dt} \Rightarrow T_B = T_A + \frac{C_A}{k_{AB}} \frac{dT_A}{dt} \dots (4)$$

Substitusi persamaan (4) ke (3)

$$C_B \left(T_A + \frac{C_A}{k_{AB}} \frac{dT_A}{dt} \right) + C_A T_A = (C_B + C_A) T_R + Pt$$

$$\frac{C_B C_A}{k_{AB}} \frac{dT_A}{dt} + (C_B + C_A) T_A = (C_B + C_A) T_R + Pt$$

$$\frac{dT_A}{dt} + \frac{k_{AB}(C_B + C_A)}{C_B C_A} T_A = \frac{k_{AB}(C_B + C_A)}{C_B C_A} T_R + \frac{k_{AB} P}{C_B C_A} t$$

Misalkan $\lambda = \frac{k_{AB}(C_B + C_A)}{C_B C_A}$ dan $\alpha = \frac{k_{AB} P}{C_B C_A}$ maka

$$\frac{dT_A}{dt} + \lambda T_A = \lambda T_R + \alpha t \dots (5)$$

Persamaan (5) adalah persamaan diferensial orde pertama bentuk umum. Solusinya bisa kita temukan menggunakan metode penyelesaian umumnya ataupun dengan mensubstitusi bentuk penyelesaian yang diberikan soal yaitu

$$T_A = A_0 + A_1 t + A_2 (1 - e^{-\lambda t})$$

$$T_B = B_0 + B_1 t + B_2 (1 - e^{-\lambda t})$$

Supaya lebih singkat kita substitusi solusi di atas ke persamaan (5)

$$\frac{d}{dt} (A_0 + A_1 t + A_2 (1 - e^{-\lambda t})) + \lambda (A_0 + A_1 t + A_2 (1 - e^{-\lambda t})) = \lambda T_R + \alpha t$$

$$A_1 + A_2 \lambda e^{-\lambda t} + \lambda A_0 + \lambda A_1 t + \lambda A_2 (1 - e^{-\lambda t}) = \lambda T_R + \alpha t$$

$$\lambda A_0 + A_1 + \lambda A_2 + \lambda A_1 t = \lambda T_R + \alpha t$$

Dengan menyamakan suku kiri dan kanan kita peroleh

$$\lambda A_1 t = \alpha t \Rightarrow A_1 = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Dengan sedikit gambling saya pilih

$$\lambda A_0 = \lambda T_R \Rightarrow A_0 = T_R$$

dan juga

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{A_1}{\lambda} \Rightarrow A_2 = -\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Maka kita peroleh

$$T_A = T_R + \frac{\alpha}{\lambda} t - \frac{\alpha}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})$$

Turunkan T_A terhadap waktu

$$\frac{dT_A}{dt} = \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{dT_A}{dt} = \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \dots (6)$$

maka T_B akan kita dapatkan dengan mensubstitusi T_A serta persamaan (6) ke (4)

$$T_B = T_R + \frac{\alpha}{\lambda} t - \frac{\alpha}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{C_A}{k_{AB}} \left[\frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right]$$

$$T_B = T_R + \frac{\alpha}{\lambda} t + \left(\frac{C_A}{k_{AB}} - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

Dengan mensubstitusi α serta λ ke T_A dan T_B akan kita dapatkan

$$T_A = T_R + \frac{P}{(C_B + C_A)} t - \frac{P C_B C_A}{k_{AB} (C_B + C_A)^2} \left(1 - e^{-\frac{k_{AB} (C_B + C_A)}{C_B C_A} t} \right)$$

$$T_B = T_R + \frac{P}{(C_B + C_A)} t + \frac{P C_A^2}{k_{AB} (C_B + C_A)^2} \left(1 - e^{-\frac{k_{AB} (C_B + C_A)}{C_B C_A} t} \right)$$

b. Perbedaan temperatur air dan bejana adalah

$$\Delta T = T_B - T_A = \frac{P C_A}{k_{AB} (C_B + C_A)} (1 - e^{-\lambda t})$$

Setelah selang waktu yang cukup lama atau $t \gg 1/\lambda$ maka $e^{-\lambda t} \approx 0$ maka

$$\Delta T = \frac{P C_A}{k_{AB} (C_B + C_A)}$$

Dengan $P = k_{AB} T_S$ hasil di atas akan menjadi

$$\Delta T = \frac{C_A}{C_B + C_A} T_S$$

Dari nilai numerik kita peroleh $T_S = 5$ K. Dengan mensubstitusi nilai numerik lainnya kita peroleh

$$\Delta T = \frac{10000}{1000 + 10000} 5 \Rightarrow \Delta T = 4,545 \text{ K}$$

c. Sekarang pertanyaannya adalah kalor mengalir dari mana, apakah dari air ke bejana atau sebaliknya. Pada saat awal tidak ada aliran kalor antara air dan bejana karena suhu keduanya sama. Namun, setelah selang beberapa waktu, akan terdapat perbedaan suhu antara air dan bejana sehingga akan ada aliran kalor diantara air dan bejana. Dari segi aliran kalor kita tahu bahwa kalor pada bejana

akan lebih cepat mengalir ke udara karena proses internalnya berupa konduksi sedangkan pada air berupa konveksi (konveksi lebih lambat dari konduksi) sehingga setelah selang beberapa waktu air akan lebih panas dari bejana dan aliran kalor di antara air dan bejana adalah dari air ke bejana. Kalau tidak percaya mari kita buktikan. Kita tinjau bejana dan air secara terpisah dengan kondisi awal yang sama.

Bejana

$$dQ_B = -C_B dT_B = k_{LB}(T_B - T_R)dt$$

$$\frac{dT_B}{T_B - T_R} = -\frac{k_{LB}}{C_B} dt$$

$$\int_{T_H}^{T_B} \frac{d(T_B - T_R)}{T_B - T_R} = -\frac{k_{LB}}{C_B} \int_0^t dt$$

$$\ln \left| \frac{T_B - T_R}{T_H - T_R} \right| = -\frac{k_{LB}}{C_B} t$$

$$T_B = T_R + (T_H - T_R)e^{-\frac{k_{LB}}{C_B} t}$$

Dengan cara yang sama untuk air kita peroleh

$$T_A = T_R + (T_H - T_R)e^{-\frac{k_{LA}}{C_A} t}$$

Dari nilai numerik k_{LB} , k_{LA} , C_B , dan C_A kita tahu bahwa

$$\frac{k_{LB}}{C_B} = 0,02 > \frac{k_{LA}}{C_A} = 0,001$$

Maka benar bahwa kalor akan mengalir dari air ke bejana karena bejana lebih cepat dingin dibandingkan air. Untuk mencapai suhu akhir $T_A = T_B = 30^\circ$ bejana perlu waktu

$$T_B - T_R = (T_H - T_R)e^{-\frac{k_{LB}}{C_B} t}$$

$$5 = 55e^{-0,02t}$$

$$e^{0,02t} = 11$$

$$0,02t = \ln 11 \Rightarrow t = 50 \ln 11 \approx 120 \text{ s} = 2 \text{ menit}$$

Dan air memerlukan waktu

$$T_A - T_R = (T_H - T_R)e^{-\frac{k_{LA}}{C_A} t}$$

$$5 = 55e^{-0,001t}$$

$$e^{0,001t} = 11$$

$$0,001t = \ln 11 \Rightarrow t = 1000 \ln 11 \approx 2400 \text{ s} = 40 \text{ menit}$$

Hasil di atas memang tidak berhubungan dengan jawaban yang diminta pada bagian ini, saya hanya ingin menunjukkan waktu penurunan suhu air dan bejana secara real. Baik kita kembali ke soal yang sebenarnya. Kita tinjau air terlebih dahulu, kalor yang lepas dari air adalah dQ_A maka

$$\begin{aligned} dQ_A &= -C_A dT_A = k_{AB}(T_A - T_B)dt + k_{LA}(T_A - T_R)dt \\ -C_A \frac{dT_A}{dt} &= (k_{AB} + k_{LA})T_A - k_{AB}T_B - k_{LA}T_R \dots (7) \end{aligned}$$

Berikutnya tinjau bejana, kalor yang lepas dari bejana adalah dQ_B maka

$$\begin{aligned} dQ_B &= -C_B dT_B = -k_{AB}(T_A - T_B)dt + k_{LB}(T_B - T_R)dt \\ -C_B \frac{dT_B}{dt} &= (k_{AB} + k_{LB})T_B - k_{AB}T_A - k_{LB}T_R \dots (8) \end{aligned}$$

Jumlahkan persamaan (7) dan (8) kita peroleh

$$C_A \frac{dT_A}{dt} + C_B \frac{dT_B}{dt} = -k_{LA}T_A - k_{LB}T_B + (k_{LA} + k_{LB})T_R \dots (9)$$

Namun, kita kan tahu bahwa aliran kalor dari air dan bejana ke udara jauh lebih kecil dibandingkan dari air ke bejana, padahal pada saat awal suhu keduanya juga relatif sama, maka perbedaan suhu antara air dan bejana sepanjang waktu relatif kecil atau bisa dikatakan suhu air akan relatif sama dengan suhu bejana sepanjang waktu. Secara matematis bisa kita tuliskan $T_A \approx T_B \approx T$ sehingga persamaan (9) menjadi

$$(C_A + C_B) \frac{dT}{dt} = -(k_{LA} + k_{LB})(T - T_R)$$

$$\int_{T_H}^T \frac{d(T - T_R)}{(T - T_R)} = -\frac{k_{LA} + k_{LB}}{C_A + C_B} \int_0^t dt$$

$$\ln \left| \frac{T - T_R}{T_H - T_R} \right| = -\frac{k_{LA} + k_{LB}}{C_A + C_B} t$$

$$T = T_R + (T_H - T_R)e^{-\frac{k_{LA} + k_{LB}}{C_A + C_B} t}$$

Saat temperatur air dan bejana mencapai $T_f = 30^{\circ}\text{C}$, selang waktu dari saat menunggu setelah kompor dimatikan sampai mencapai suhu akhir ini adalah

$$T_f = T_R + (T_H - T_R)e^{-\frac{k_{LA} + k_{LB}}{C_A + C_B}t}$$

Substitusi nilai numeriknya

$$5 = 55e^{-\frac{3}{1100}t}$$

$$e^{\frac{3}{1100}t} = 11 \Rightarrow t = \frac{1100}{3} \ln 11 \approx 880 \text{ s}$$

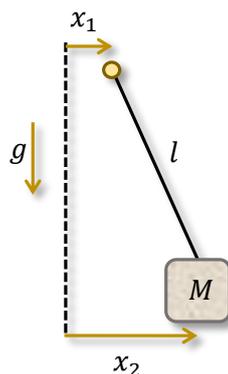
- d. Pada proses *heating* perbedaan suhu antara air dan bejana bahkan setelah waktu yang sangat lama hanya sekitar 4,5 K. Namun hasil ini didapat dengan mengabaikan proses konveksi. Pada proses *cooling* perbedaan suhu antara air dan bejana tidak terlalu signifikan sehingga baik pada proses *heating* dan *cooling* hasil yang kita dapatkan tidak terlalu akurat. Maka agar hasilnya cukup akurat kita ambil rata-rata dari kedua set data tersebut.

5. Pada tahun 2016, dunia Fisika dikejutkan dengan berita tentang observasi gelombang gravitasi (*gravitational wave*). Diprediksi sejak tahun 1916 oleh Einstein, gelombang gravitasi merupakan gelombang gangguan dalam kurvatur ruang waktu (*spacetime curvature*) dari akselerasi super-massa (misalnya *blackhole* yang bergabung). Karena letak sumber gangguan yang biasanya sangat jauh dari bumi, efek gelombang gravitasi tersebut sangat kecil, sehingga diperlukan alat yang sangat sensitif untuk mengukurnya.

Detektor gelombang gravitasi berupa interferometer cahaya, di mana posisi cermin-cermin disabilitas sampai lebih kecil daripada diameter atom ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Salah satu metode utama yang digunakan oleh para ilmuwan dalam proses stabilisasi posisi cermin adalah prinsip isolasi yang terdapat pada kasus *multiple* pendulum.

- a. Sistem isolasi satu pendulum.

Sebuah pendulum bermassa M digantung dengan tali sepanjang l seperti yang ditunjukkan pada gambar. Ujung atas tali tergantung pada suatu poros yang memiliki simpangan horizontal $x_1(t)$ terhadap posisi diam (garis titik-titik). Karena getaran dan gangguan $x_1(t)$, (yang mungkin disebabkan oleh vibrasi mekanik atau getaran seismik) massa M akan terpengaruh dan bergerak dengan simpangan $x_2(t)$.

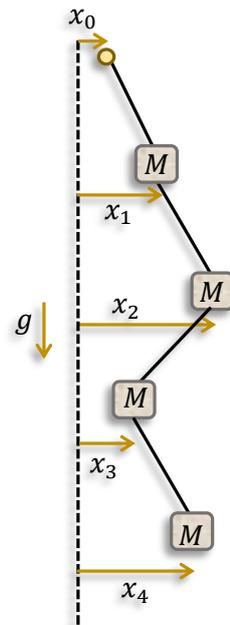


Apabila posisi horizontal poros bergetar dengan simpangan $x_1(t) = A_1 \sin \omega t$, massa M akan bergetar dengan simpangan $x_2(t) = A_2 \sin \omega t$. Anggap frekuensi getaran jauh lebih besar dari pada frekuensi natural pendulum $\omega \gg \omega_0 = \sqrt{g/l}$, dan gunakan aproksimasi sudut kecil atau $x_1, x_2 \ll l$. Tentukan nilai perbandingan

antara amplitudo getaran massa dan poros, A_2/A_1 ! Nyatakan jawaban kalian dalam parameter $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, ω dan M .

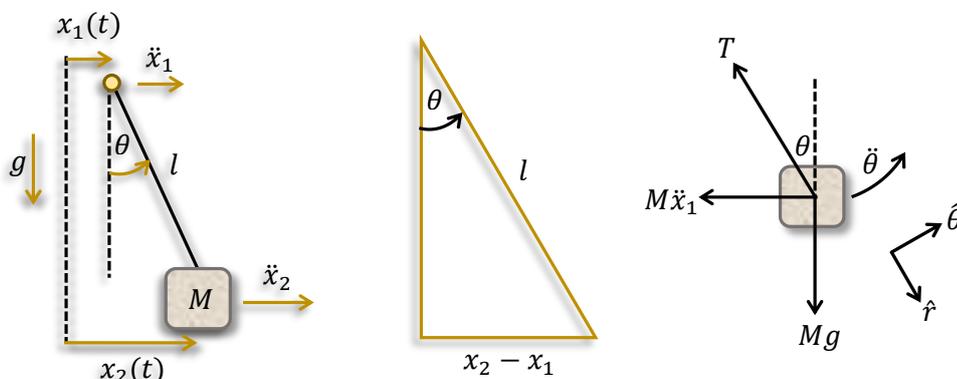
b. Sistem isolasi empat pendulum.

Alat eksperimen yang digunakan oleh LIGO untuk mendeteksi gelombang gravitasi adalah sistem isolasi 4 pendulum seperti pada gambar. Gangguan pada poros $x_0(t) = A_0 \sin \omega t$ menyebabkan getaran $x_4(t) = A_4 \sin \omega t$ pada massa ke empat (cermin). Dengan menggunakan asumsi yang sama dengan bagian sebelumnya, tentukanlah perbandingan amplitudo massa ke empat dengan amplitudo poros, A_4/A_0 ! Apabila gelombang gravitasi yang ingin diamati memiliki frekuensi sebesar $\omega = 2\pi \times 100$ Hz, dan poros (yang sebenarnya sudah sangat stabil) memiliki amplitudo getaran sebesar $A_0 = 0,1 \mu\text{m}$ pada frekuensi ω , hitung amplitudo getaran massa ke empat, A_4 ! Anggap percepatan gravitasi $g = 10 \text{ m/s}^2$, panjang masing-masing tali $l = 1 \text{ m}$, dan massa masing-masing pendulum adalah $M = 50 \text{ kg}$.



Pembahasan :

- a. Relatif terhadap poros, percepatan pendulum hanyalah pada arah tangensial dan radial. Karena poros dipercepat, maka pendulum M akan mendapatkan gaya fiktif $M\ddot{x}_1$ yang arahnya berlawanan dengan percepatan poros.



Relatif terhadap poros, percepatan pendulum M adalah

$$\vec{a}_p = -l\dot{\theta}^2 \hat{r} + l\ddot{\theta} \hat{\theta}$$

Gaya-gaya yang bekerja pada pendulum untuk arah radial dan tangensial adalah

$$\sum \vec{F}_p = (Mg \cos \theta - T - M\ddot{x}_1 \sin \theta) \hat{r} - (M\ddot{x}_1 \cos \theta + Mg \sin \theta) \hat{\theta}$$

Hukum II Newton

$$\sum \vec{F}_p = M\vec{a}_p$$

$$(Mg \cos \theta - T - M\ddot{x}_1 \sin \theta) \hat{r} - (M\ddot{x}_1 \cos \theta + Mg \sin \theta) \hat{\theta} = -Ml\dot{\theta}^2 \hat{r} + Ml\ddot{\theta} \hat{\theta}$$

Dari arah tangensial kita peroleh

$$-M\ddot{x}_1 \cos \theta - Mg \sin \theta = Ml\ddot{\theta}$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta + g \sin \theta = 0 \dots (1)$$

Dari segitiga di atas kita akan peroleh

$$l \sin \theta = x_2 - x_1 \dots (2)$$

Turunkan dua kali terhadap waktu akan kita peroleh

$$l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dots (3)$$

Untuk osilasi yang kecil atau $x_2, x_1 \ll l$ bisa dilakukan pendekatan $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, dan $\dot{\theta}^2 \approx 0$ maka persamaan (1), (2) dan (3) bisa ditulis ulang menjadi

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 + g\theta = 0 \dots (4)$$

$$l\theta = x_2 - x_1 \Rightarrow \theta = \frac{x_2 - x_1}{l} \dots (5)$$

$$l\ddot{\theta} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dots (6)$$

Substitusi persamaan (5) dan (6) ke (4)

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + \ddot{x}_1 + g \left(\frac{x_2 - x_1}{l} \right) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{g}{l} (x_2 - x_1) = 0 \dots (7)$$

Menggunakan $x_1 = A_1 \sin \omega t$ dan $x_2 = A_2 \sin \omega t$ yang menyebabkan $\ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin \omega t$ dan juga $\omega_0^2 = g/l$ akan kita peroleh

$$-\omega^2 A_2 \sin \omega t + \omega_0^2 (A_2 \sin \omega t - A_1 \sin \omega t) = 0$$

$$-\omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 - \omega_0^2 A_1 = 0$$

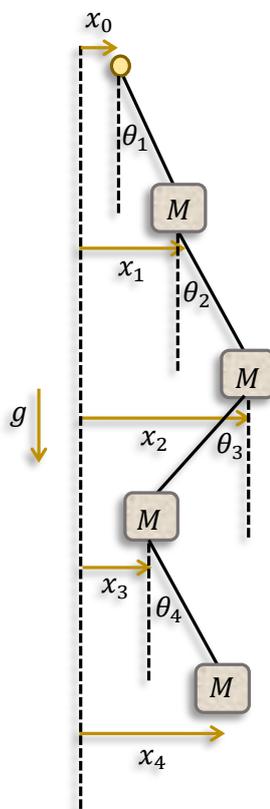
$$A_2 (\omega^2 - \omega_0^2) = -\omega_0^2 A_1$$

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Ini menandakan arah simpangan pendulum dan poros berlawanan. Untuk $\omega^2 \gg \omega_0^2$ akan kita peroleh

$$\frac{A_2}{A_1} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

b. Perhatikan gambar berikut



Kita dapatkan bahwa

$$l\theta_1 = x_1 - x_0$$

$$l\theta_2 = x_2 - x_1$$

$$l\theta_3 = x_3 - x_2$$

$$l\theta_4 = x_4 - x_3$$

Turunkan dua kali terhadap waktu dan dengan aproksimasi akan kita peroleh

$$l\ddot{\theta}_1 = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_0$$

$$l\ddot{\theta}_2 = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

$$l\ddot{\theta}_3 = \ddot{x}_3 - \ddot{x}_2$$

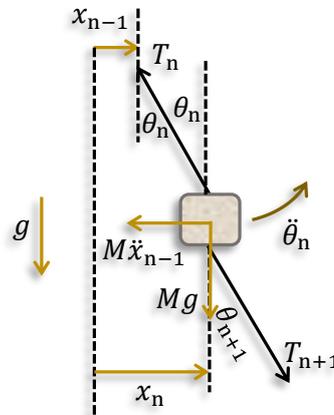
$$l\ddot{\theta}_4 = \ddot{x}_4 - \ddot{x}_3$$

Sehingga secara umum kita peroleh (ambil bentuk umum)

$$l\theta_n = x_n - x_{n-1}$$

$$l\ddot{\theta}_n = \ddot{x}_n - \ddot{x}_{n-1}$$

Misalkan terdapat N pendulum. Kita tinjau pendulum ke n



Pada arah vertikal (dengan aproksimasi)

$$T_n = T_{n+1} + Mg$$

Untuk pendulum ke N

$$T_N = Mg$$

Sehingga

$$T_n = (N - n + 1)Mg$$

Maka

$$T_{n+1} = T_n - Mg = (N - n)Mg$$

Pada arah $\hat{\theta}_n$ (dengan aproksimasi)

$$\begin{aligned} -M\ddot{x}_{n-1} - Mg\theta_n - T_{n+1}(\theta_n + \theta_{n+1}) &= Ml\ddot{\theta}_n \\ -M\ddot{x}_{n-1} - Mg\theta_n - (N - n)Mg(\theta_n + \theta_{n+1}) &= Ml\ddot{\theta}_n \\ -\ddot{x}_{n-1} - \left(\frac{g}{l}\right)l\theta_n - (N - n)\left(\frac{g}{l}\right)l(\theta_n + \theta_{n+1}) &= l\ddot{\theta}_n \end{aligned}$$

Substitusi $\theta_n, \theta_{n+1}, l\ddot{\theta}_n$ serta gunakan $\omega_0^2 = g/l$ akan kita peroleh

$$\begin{aligned} -\ddot{x}_{n-1} - \omega_0^2(x_n - x_{n-1}) - (N - n)\omega_0^2l(x_{n+1} - x_{n-1}) &= \ddot{x}_n - \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_n + \omega_0^2x_n - \omega_0^2(N - n + 1)x_{n-1} + \omega_0^2(N - n)x_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Tinjau pendulum ke N

$$\ddot{x}_N + \omega_0^2x_N - \omega_0^2x_{N-1} = 0$$

Substitusi $x_N = A_N \sin(\omega t)$, $x_{N-1} = A_{N-1} \sin(\omega t)$, dan $\ddot{x}_N = -\omega^2 A_N \sin(\omega t)$ akan kita peroleh

$$-\omega^2 A_N + \omega_0^2 A_N = \omega_0^2 A_{N-1}$$

$$\frac{A_N}{A_{N-1}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Untuk $\omega^2 \gg \omega_0^2$ bisa kita lakukan pendekatan

$$\frac{A_N}{A_{N-1}} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

Tinjau pendulum ke $N - 1$

$$\ddot{x}_{N-1} + \omega_0^2 x_{N-1} - 2\omega_0^2 x_{N-2} + \omega_0^2 x_N = 0$$

Substitusi $x_{N-1} = A_{N-1} \sin(\omega t)$, $x_N = A_N \sin(\omega t)$, $\ddot{x}_{N-1} = -\omega^2 A_{N-1} \sin(\omega t)$, dan $A_N = -(\omega_0/\omega)^2 A_{N-1}$ akan kita peroleh

$$-\omega^2 A_{N-1} + \omega_0^2 A_{N-1} + \frac{\omega_0^4}{\omega^2} A_{N-1} = 2\omega_0^2 A_{N-2}$$

$$\frac{A_{N-1}}{A_{N-2}} = -\frac{2\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2}}$$

Untuk $\omega^2 \gg \omega_0^2$ bisa kita lakukan pendekatan

$$\frac{A_{N-1}}{A_{N-2}} = -2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

Maka secara umum akan kita peroleh

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = -(N - n + 1) \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

Kita dapat tuliskan

$$A_1 = -N \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 A_0$$

$$A_2 = -(N - 1) \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 A_1$$

...

$$A_n = -(N - n + 1) \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 A_{n-1}$$

$$A_{n-1} = -(N - n + 2) \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 A_{n-2}$$

...

$$A_{N-1} = -2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 A_{N-2}$$

$$A_N = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 A_{N-1}$$

Kita dapat tuliskan pula

$$A_N = (-1)^N N! \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2N} A_0$$

Maka untuk $N = 4$ akan kita peroleh

$$A_4 = 24 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^8 A_0$$

Dengan $\omega = 2\pi \times 100$ Hz, $g = 10$ m/s², $l = 1$ sehingga $\omega_0 = \sqrt{10}$ rad/s dan $A_0 = 0,1$ μ m akan kita dapatkan

$$A_4 = 24 \left(\frac{\sqrt{10}}{2\pi \times 100}\right)^8 \times 10^{-7} \text{ m} \approx 6 \times 10^{-23} \text{ m}$$