Pembahasan Soal Olimpiade Matematika SMP

Babak 1 Persiapan Olimpiade Sains Provinsi dan Nasional

1. Diketahui x dan y merupakan bilangan real positif yang memenuhi sistim persamaan berikut

$$\begin{cases} x - y^2 = 3 \\ x^2 + y^4 = 13 \end{cases}$$

Jika $x = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$, maka nilai $a+b+c =$ ….

A. 20 B. 21 C. 22 D. 23

JAWAB

Kuadratkan persamaan $x - y^2 = 3$ menjadi $x^2 + y^4 - 2x.y^2 = 9$

Lalu eliminasi dengan persamaan (2)

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^4 - 2x.y^2 = 9 & \times 1 \\ x^2 + y^4 = 13 & \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x^2 + 2y^4 = 26 \\ x^2 + y^4 - 2x.y^2 = 9 \\ \hline x^2 + 2.x.y^2 + y^4 = 17 \end{array} -$$

$$(x + y^2)^2 = 17$$

$$x + y^2 = \pm\sqrt{17}$$

Lalu eliminasi dengan persamaan (1)

$$\begin{array}{l} x + y^2 = \pm\sqrt{17} \\ x - y^2 = 3 \\ \hline 2x = 3 \pm \sqrt{17} \end{array} +$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Karena x bilangan real positif, maka $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

Jadi diperoleh a = 3, b = 17 dan c = 2, maka a + b + c = 3 + 17 + 2 = 22 (C)

2. Diketahui fungsi f memenuhi $f(x)+f(2x+y)+5xy=f(3x-y)+20x^2+12$ untuk semua bilangan real x dan y. Nilai $f(10)$ adalah ….
   A. 1572 B. 1642 C. 1762 D. 1952

   JAWAB

   Substitusikan x = 10 dan y = 5 diperoleh

   $f(10)+f(25)+250=f(25)+2000+12$

   Sehingga $f(10)=1762$ (C)

3. Nilai dari $\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}.\frac{5^3-1}{5^3+1}.\frac{6^3-1}{6^3+1}$ adalah ….

   A. $\frac{41}{63}$ B. $\frac{43}{63}$ C. $\frac{47}{63}$ D. $\frac{53}{63}$

   JAWAB

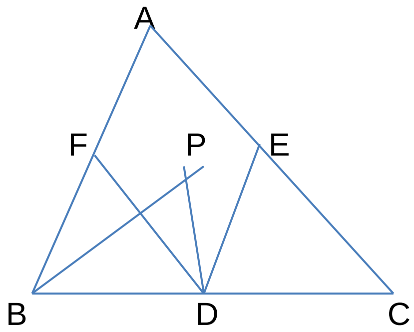
   Ingat identitas
   $$n^3-1=(n-1).(n^2+n+1)$$
   $$n^3+1=(n+1).(n^2-n+1)$$

   Sehingga diperoleh
   $$\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}.\frac{5^3-1}{5^3+1}.\frac{6^3-1}{6^3+1}=\frac{1.7}{3.3}.\frac{2.13}{4.7}.\frac{3.21}{5.13}.\frac{4.31}{6.21}.\frac{5.43}{7.31}$$

   $$=\frac{1.2.43}{3.6.7}=\frac{43}{63}$$ (B)

4. Diketahui segitiga ABC dimana D merupakan titik tengah BC; E merupakan titik tengah CA dan F merupakan titik tengah AB. Garis bagi sudut FDE dan sudut FBD berpotongan di titik P
   Jika sudut BAC = 37º dan sudut CBA = 85º, maka besar sudut BPD adalah ….
   A. 57º B. 59º C. 61º D. 63º

JAWAB



Segitiga ABC sebangun dengan segitiga DEF (karena D, E, F titik tengah)
FD sejajar AC dan DE sejajar AB
Sudut BDF = sudut BCA = 180º – 37º – 85º = 58º
Sudut FDE = sudut BAC = 37º
Sudut BPD = 180º – sudut PBD – sudut PDB =

$$180^o - \frac{85^o}{2} - \left(\frac{37^o}{2} + 58^o\right) = 61^o$$

Jadi besar sudut BPD = 61º (C)

5. Diketahui x dan y bilangan real positif yang memenuhi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \left(3x - 4x^3\right)\left(3y - 4y^3\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nilai dari x + y = ...

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

JAWAB

Dengan menjabarkan persamaan kedua diperoleh

$$9.x.y + 16.x^3.y^3 - 12.x^3.y - 12.x.y^3 = 9.x.y + 16.(x.y)^3 - 12.(x.y)(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}$$

Karena $x^2 + y^2 = 1$, maka $9.x.y + 16.(x.y)^3 - 12.x.y = -\frac{1}{2}$

$$-3(x.y) + 16.(x.y)^3 = -\frac{1}{2}$$

Sehingga diperoleh $x.y = -\frac{1}{2}$ dan $x.y = \frac{1}{4}$

Karena x, y bilangan real positif , maka $x.y = \frac{1}{4}$

$$x + y = \sqrt{x^2 + y^2 + x.y} = \sqrt{1 + 2.\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(C)

6. Sisa pembagian ketika $1+2+3+...+2012$ dibagi 2012 adalah …

A. 1006 B. 1008 C. 1010 D. 1012

JAWAB

Ingat 2013 ketika dibagi 2012 akan bersisa 1

$$1+2+3+...+2012 = \frac{1}{2}.(2012).(2013) = (1006).(2013)$$

Perhatikan bahwa

$$\equiv (1006).1$$
$$\equiv 1006$$

Jadi sisa pembagian $1+2+3+...+2012$ jika dibagi 2012 adalah 1006 (A)

7. Nilai dari $9^2 - 1^2 + 10^2 - 2^2 + 11^2 - 3^2 + ... + 20^2 - 12^2$ adalah ….

A. 2010 B. 2012 C. 2014 D. 2016

JAWAB

$$9^2 - 1^2 + 10^2 - 2^2 + 11^2 - 3^2 + ... + 20^2 - 12^2 =$$
$$\left[(1+8)^2 - 1^2\right] + \left[(2+8)^2 - 2^2\right] + ... + \left[(12+8)^2 - 12^2\right] =$$
$$(16+64) + (32+64) + ... + (192+64) =$$
$$16.(5+6+7+...+16) =$$
$$16.\frac{1}{2}.12.(5+16) = 2016 \quad (D)$$

8. Diketahui x dan y bilangan real dimana $-1 < x < y < 1$

P merupakan jumlah deret geometri dengan suku pertama adalah x dan rasio/pembandingnya adalah y.

T merupakan jumlah deret geometri dengan suku pertama adalah y dan rasio/pembandingnya adalah x.

Jika P = T, maka nilai x + y = ….

A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

JAWAB

Karena merupakan barisan geometri dimana $-1 < x < y < 1$ maka

$P = \dfrac{x}{1-y}$ dan $T = \dfrac{y}{1-x}$

Karena P = T maka $\dfrac{x}{1-y} = \dfrac{y}{1-x}$

$$x - x^2 = y - y^2$$

$$x^2 - y^2 - (x-y) = 0$$

$$(x-y).(x+y) - (x-y) = 0$$
$$(x+y-1).(x-y) = 0$$

$x + y = 1$ sedangkan x = y (tidak mungkin karena x ≠ y

Jadi nilai x + y = 1 (D)

9. Jika $f(x) = 3.x^3 - 2.x^2 + x - 3$ dan $i = \sqrt{-1}$, maka $f(1+i) = ...$
   A. $-8+3.i$ B. $-3+8.i$ C. $8-3.i$ D. $3-8.i$

JAWAB

Perhatikan bahwa $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 2i - 2$

Sehingga diperoleh
$$\begin{aligned} f(1+i) &= 3.(i+1)^3 - 2.(1+i)^2 + (1+i) - 3 \\ &= 3.(2i-2) - 2.(2i) + (1+i) - 3 \\ &= -8 + 3i \end{aligned}$$
(A)

10. Sebuah kotak berisi 11 bola dan bola-bola tersebut dinomori 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Jika 6 buah bola diambil secara acak, peluang jumlah angka-angka dari bola yang diambil tersebut merupakan bilangan ganjil adalah ….
    A. $\dfrac{72}{231}$ B. $\dfrac{97}{231}$ C. $\dfrac{118}{231}$ D. $\dfrac{147}{231}$

Jawab : Kotak berisi 6 bola bernomor ganjil yaitu 1, 3, 5, 7,9, 11 dan
5 bola bernomor genap yaitu 2, 4, 6, 8, 10

Berdasarkan paritas, jumlah angka-angka merupakan bilangan ganjil jika

(i) 1 ganjil dan 5 genap

(ii) 3 ganjil dan 3 genap

(iii) 5 ganjil dan 1 genap

Banyaknya kejadian yang mungkin terjadi adalah

$$_6C_1 \cdot {}_5C_5 + {}_6C_3 \cdot {}_5C_3 + {}_6C_5 \cdot {}_5C_1 = 236$$

Banyaknya semua kejadian adalah $_{11}C_6 = 462$

Jadi peluang jumlah angka-angka dari bola yang diambil merupakan bilangan ganjil adalah $\frac{236}{462} = \frac{118}{231}$ (C)

11. Nilai dari $\frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+2} + \frac{1}{5^2+3} + \frac{1}{6^2+4} + \ldots$ (dan seterusnya sampai tak

berhingga) adalah …

A. $\frac{13}{36}$ B. $\frac{15}{36}$ C. $\frac{17}{36}$ D, $\frac{19}{36}$

JAWAB

Perhatikan bahwa $\frac{1}{n^2+(n-2)} = \frac{1}{(n+2).(n-1)}$

$$\frac{1}{(n+2).(n-1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n-1}$$

$$1 = A.(n-1) + B.(n+2)$$

Untuk n = 1 diperoleh $B = \frac{1}{3}$ dan untuk $n = -2$ diperoleh $A = -\frac{1}{3}$

Dengan mempergunakan prinsip telescoping Sehingga saling menghilangkan dan diperoleh jumlahnya adalah $\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{36}$ (A)

12.. Banyak faktor prima dari $3^{18} - 2^{18}$ adalah ….

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

JAWAB

Dengan memfaktorkan $3^{18} - 2^{18}$ diperoleh

Jawab :

$$\begin{aligned} 3^{18} - 2^{18} &= (3^9 - 2^9).(3^9 + 2^9) \\ &= (3^3 - 2^3).(3^6 + 3^3.2^3 + 2^6).(3^3 + 2^3).(3^6 - 3^3.2^3 + 2^6) \\ &= 19 . 1009 . 35 . 577 \\ &= 5 . 7 . 19 . 577 . 1009 \end{aligned}$$

Jadi faktor prima dari $3^{18} - 2^{18}$ adalah 5, 7, 19, 577, 1009

Banyak factor prima dari $3^{18} - 2^{18}$ adalah 5 (A)

13. Nilai minimum (terkecil) dari $x^2 + 2.x.y + 3y^2 + 2.x + 6.y + 4$ adalah ….

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Jawab : Dengan melengkapkan kuadrat sempurna diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + 2.x.y + 3.y^2 + 2.x + 6.y + 4 &= x^2 + 2x.(y+1) + 3.(y+1)^2 + 1 \\ &= (x + y + 1)^2 + 2.(y+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

Nilai minimum terjadi ketika $x + y + 1 = 0 \ dan \ y + 1 = 0$

$$x = 0 \qquad y = -1$$

Jadi nilai minimumnya adalah 1 (A)

14. Jika $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$, maka jumlah semua nilai x yang memenuhi $f(3x) = 7$

adalah ….

A. 1 B. $\frac{1}{9}$ C. 0 D. $-\frac{1}{9}$

JAWAB

Misal $a = \frac{x}{3}$ maka substitusikan $x = 3a$ ke $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$,

$f(a) = 9.a^2 + 3.a + 1$ berarti $f(x) = 9.x^2 + 3.x + 1$

Sehingga diperoleh $f(3x) = 9.(9x^2) + 3.(3x) + 7$

Karena $f(3x) = 7$ maka $7 = 81x^2 + 9x + 7$

$$81x^2 + 9x = 0$$
$$9x.(9x+1) = 0$$

Berarti x = 0 atau $x = -\frac{1}{9}$

Jumlah semua nilai x yang memenuhi $f(3x) = 7$ adalah $0 + -\frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$ (D)

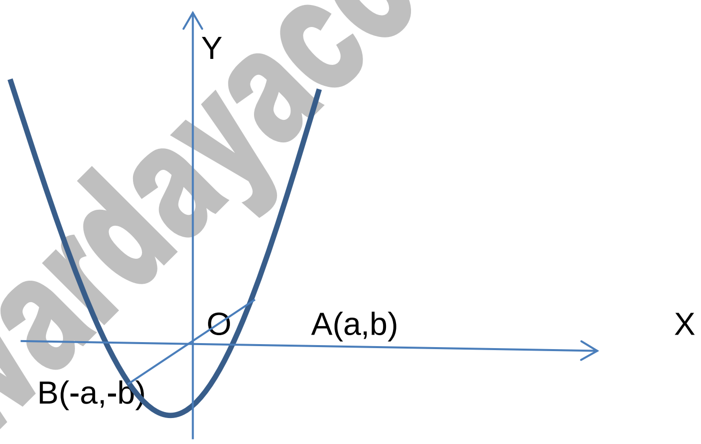
15. Titik A dan B terletak pada parabola $y = 2x^2 + 4x - 2$

Titik (0, 0) merupakan titik tengah garis yang menghubungkan titik A dan B

Jarak titik A dan B adalah ….

A. $\sqrt{13}$ B. $2\sqrt{13}$ C. $\sqrt{17}$ D. $2\sqrt{17}$

JAWAB :



Misalkan titik A (a, b) dan titik B (- a, - b)

Karena titik A dan B terletak pada parabola $y = 2x^2 + 4x - 2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} b &= 2a^2 + 4a - 2 \\ -b &= 2a^2 - 4a - 2 \\ \hline 0 &= 4a^2 - 4 \quad + \end{aligned}$$

$a = \pm 1$

Untuk a = 1, maka b = 4

Untuk a = - 1, maka b = - 4

Jadi jarak titik A dan B adalah $\sqrt{(1+1)^2+(4+4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ (D)

16. Diketahui x bilangan real dengan $2^x = 3$, maka nilai 4^{3x+1} = ….

A. 1724 B. 2916 C. 3852 D. 4664

JAWAB

$$4^{3x+1} = 4^{3x}.4^1 = \left(2^2\right)^{3x}.4 = 2^{6x}.4 = \left(2^x\right)^6.4 = 3^6.4 = 2916$$ (B)

17. Diketahui persegi ABCD

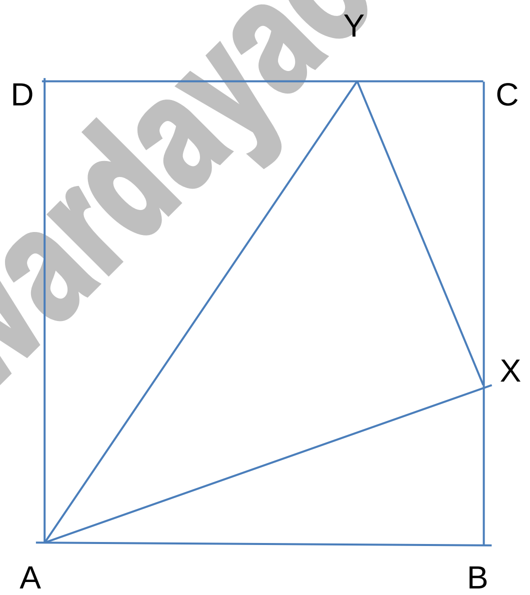
Titik X terletak pada sisi BC dan titik Y terletak pada sisi CD.

Panjang XY = 3 , AX = 4 dan AY = 5

Panjang sisi persegi ABCD adalah ….

A. $\frac{16}{17}\sqrt{17}$ B. $\frac{14}{15}\sqrt{15}$ C. $\frac{12}{13}\sqrt{13}$ D. $\frac{10}{11}\sqrt{11}$

JAWAB



Karena $AX^2 + XY^2 = AY^2$ (memenuhi Phytagoras) maka sudut AXY = 90^o

Akibatnya sudut YXC + sudut AXB = 90^o

Sudut XAB + sudut AXB = 90^o

Sehingga sudut XAB = sudut YXC

Berarti segitiga ABX sebangun dengan segitiga XCY, dan berlaku perbandingan

$$\frac{AB}{4}=\frac{XC}{3}$$
$$XC=\frac{3}{4}.AB$$
$$BX=BC-XC=AB-\frac{3}{4}AB=\frac{1}{4}AB$$

Phytagoras :
$$(AB)^2+\left(\frac{1}{4}AB\right)^2=4^2$$
$$AB=\frac{16}{17}\sqrt{17}$$

Jadi panjang sisi persegi ABCD adalah $\frac{16}{17}\sqrt{17}$ (A)

18. Nilai a yang memenuhi sistim persamaan berikut adalah ….

$$\begin{cases}2a+b+c+d=2011\\ a+2b+c+d=2012\\ a+b+2c+d=2010\\ a+b+c+2d=2012\end{cases}$$

A. 200 B. 201 C. 210 D. 211

JAWAB

Tambahkan semua persamaan sehingga diperoleh
$$5a+5b+5c+5d=8045$$
$$a+b+c+d=1609$$

Eliminasi $2a+b+c+d=2011$ dan $a+b+c+d=1609$

Sehingga diperoleh a = 201 (B)

19. Dua bilangan real positif x dan y memenuhi

$x^2+y^2=1$ dan $x^4+y^4=\frac{7}{8}$ maka nilai $x.y$ adalah ….

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$

JAWAB

$$\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^4+y^4\right)=2.x^2.y^2$$

Perhattikan bahwa $\quad 1 - \frac{7}{8} = 2.x^2.y^2$

$$\frac{1}{16} = x^2.y^2$$

Karena x dan y bilangan real positif , maka $x.y=\frac{1}{4}$ (B)

20. Diketahui segitiga ABC.

AD merupakan garis bagi sudut BAC

BE merupakan garis tinggi dari B terhadap D

Titik F merupakan titik tengah AB.

Jika AB = 28, BC = 33, CA = 37, maka panjang EF adalah ….

A. 7 B. 9 C. 12 D. 14

JAWAB

Segitiga ABE merupakan segitiga siku-siku dengan siku-siku di E

Karena titik F merupakan titik tengah sisi miring segitiga ABE, maka titik A, E dan B

terletak pada lingkaran yang sama dengan pusat F

sehingga AF , EF dan BF merupakan jari-jari lingkaran

berarti EF = BF = AF = 14

Jadi panjang EF = 14 (D)

21. $\lfloor x \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

Contoh : $\lfloor 3 \rfloor = 3$ $\quad \lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$ $\quad \lfloor -3{,}6 \rfloor = -4$

$$n\,! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$$

Contoh : $5! = 5.4.3.2.1$ $\quad 4! = 4.3.2.1$ $\quad 5! = 5.(4!)$

Nilai dari $\left\lfloor \dfrac{2012!+2009!}{2011!+2010!} \right\rfloor$ adalah ….

A. 2009 B. 2010 C. 2011 D. 2012

JAWAB

$$\left\lfloor \frac{2012!+2009!}{2011!+2010!} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left(2012.2011+\dfrac{1}{2010}\right).2010!}{(2011+1).2010\,!} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2012.2011+\dfrac{1}{2010}}{2012} \right\rfloor = \left\lfloor 2011+\frac{1}{2010.2012} \right\rfloor$$

Karena nilai $\dfrac{1}{2010.2012}<1$ maka nilai dari $\left\lfloor \dfrac{2012!+2009!}{2011!+2010!} \right\rfloor$ = 2011 (C)

22. Jumlah semua nilai x yang memenuhi $\left(x^2-3x+1\right)^{x+1}=1$

dimana x bilangan bulat adalah ….

A. 3 B. 5 C. 7 D. 9

JAWAB (I) $x^2-3x+1=1$

$x.(x-1)=0$

$x=0 \quad x=3$

(ii) $\left(x^2-3x+1\right)=-1$

$(x-2).(x-1)=0$

$x=2 \quad x=1$

$Karena\; x+1\; harus bilangan\; genap$

$maka\; yang\; memenuhi\; x=1$

(iii)

$x+1=0$

$x=-1$

X yang memenuhi adalah x = 0, 1, 3, - 1

Jumlah semua nilai x yang memenuhi adalah 0 + 1 + 3 – 1 = 3 (A)

23. Lima orang (termasuk Adi dan Budi), duduk mengelilingi meja bundar.

Banyak cara duduk jika Adi dan Budi tidak pernah duduk bersebelahan adalah ….

A. 10 B. 12 C. 15 D. 18

JAWAB

Cara lima orang duduk mengelilingi meja bundar adalah (5 – 1) ! = 4 ! = 4.3.2.1= 24

Cara Adi dan Budi duduk bersebelahan adalah 3 !. 2 = 12

Cara Adi dan Budi tidak duduk bersebelahan adalah 24 – 12 = 12 (B)

24. Nilai dari $\dfrac{\sqrt{31+\sqrt{31+\sqrt{31+\cdots}}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$ adalah ….

A. $6+\sqrt{5}$ B. $4+\sqrt{5}$ C. $4-\sqrt{5}$ D. $6-\sqrt{5}$

JAWAB3

Misal :
$$x=\sqrt{31+\sqrt{31+\sqrt{31+\ldots}}}$$
$$x^2=31+x$$
$$x^2-x-31+0$$

Dengan rumus abc dan x > 0, diperoleh $x=\dfrac{1+5\sqrt{5}}{2}$

Misal
$$y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$
$$y^2=1+y$$
$$y^2-y-1=0$$

Dengan rumus abc dan y > 0, diperoleh $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Sehingga diperoleh $\dfrac{x}{y}=6-\sqrt{5}$ (D)

25. $f(a,b)$ merupakan penjumlahan bilangan bulat dari a sampai dengan b

Contoh :
$$f(1{,}5)=1+2+3+4+5=15$$
$$f(12{,}16)=12+13+14+15+16=70$$

Jika nilai $f(133333,\,533333)=K$, maka jumlah digit-digit penyusun bilangan K adalah ….

A. 24 B. 32 C. 36 D. 48

JAWAB

Misal : a = 133333

a + (a + 1) + … + (a + 400000) = 400001.a + 200000.(400001)

= 400001. (200000 + 133333)

= 400001. 333333

= 133333533333

K = 133333533333

Jumlah digit-digit penyusun bilangan K adalah 1 + 5 + 10.(3) = 36 (C)

26. Suatu fungsi memenuhi $f\left(2012^{x}\right)+x.f\left(2012^{-x}\right)=2013-x$ untuk semua bilangan real x. Nilai dari $f(2012)$ adalah ….

A. – 1 B. 0 C. 1 D. 2

JAWAB

Dengan mensubstitusikan $x=1$ diperoleh

$f(2012)+f\left(2012^{-1}\right)=2013-1$ … (1)

Dengan mensubstitusikan $x=-1$ diperoleh

$f\left(2012^{-1}\right)-f(2012)=2013+1$ … (2)

Dengan mengeliminasi persamaan (1) dan (2) diperoleh $f(2012)=-1$ (A)

27. Banyak garis yang dapat dibuat dari 6 titik yang tersedia, dimana tidak ada 3 titik yang segaris adalah ….

A. 12 B. 15 C. 18 D. 21

JAWAB

Untuk menggambar sebuah garis, diperlukan 2 buah titik

Banyak garis yang terbentuk adalah ${}_6C_2=\frac{6\,!}{2!.4!}=\frac{6.5}{2}=15$ (B)

28. Titik puncak parabola $y = a.x^2 + b.x + c$ adalah (4, 2)

 Parabola tersebut melalui titik (2, 0). Nilai a.b.c adalah …

 A. - 12 B. - 6 C. 6 D. 12

 JAWAB

 Diperoleh $a = \frac{1}{2}$ $b = -4$ $c = 6$

 $a.b.c = -12 \quad (A)$

29. Angka puluhan dari bilangan 325 adalah 2

 Angka puluhan dari bilangan 3^{64} adalah ….

 A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

 JAWAB : 8 (D)

30. Jika $(2 - 3.x)^{2012} = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{2012}.x^{2012}$, maka nilai dari

 $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2012} = ...$

 A. – 1 B. 0 C. 1 D. 3^{2012}

 JAWAB

 Substitusikan x = 1 sehingga diperoleh $(2 - 3.x)^{2012} = 1$ (C)

31. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi 3 cm, 4 cm dan 5 cm.

 Luas terbesar sebuah persegi yang dapat dimuat dalam segitiga tersebut adalah …

 A. $\frac{81}{64}$ B. $\frac{100}{81}$ C. $\frac{144}{49}$ D. $\frac{169}{36}$

 JAWAB

 Luas terbesar adalah $\frac{144}{49}$ (C)

32. Diketahui kubus ABCD.EFGH.

Titik P merupakan pusat bidang EFGH dan titik O merupakan pusat dari kubus.

Jika AG = 1, maka luas segitiga AOP adalah ….

A. $\frac{\sqrt{2}}{24}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{24}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{12}$

JAWAB : A

33. Titik lattice adalah titik yang koordinatnya merupakan bilangan bulat

Contoh : (2, 3) dan (- 1, 0) merupakan titik lattice

$\left(1\frac{1}{2}, 4\right)$ bukan merupakan titik lattice

Banyak titik lattice yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah ….

A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

JAWAB : 12 (C)

34. Diketahui suatu data dari 50 orang, mempunyai rata-rata 35.

Jika data tersebut masing-masing dikalikan dengan 2, kemudian dikurangi 15, maka nilai rata-rata dari data yang baru adalah ….

A. 40 B. 45 C. 50 D. 55

JAWAB

Rata-rata data yang baru adalah 55 (D)

35. Contoh : $2^3 = 8$ jika dibagi 5 akan bersisa 3

Sisa pembagian $2^{\frac{1.2}{2}} + 2^{\frac{2.3}{2}} + 2^{\frac{3.4}{2}} + ... + 2^{\frac{(2011).(2012)}{2}}$ jika dibagi 7 adalah ….

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

JAWAB

Sisa pembagian adalah 1 (A)

36. Bilangan ‘ PENABUR’ adalah bilangan yang memenuhi kondisi berikut :
(1) Bilangan tersebut merupakan bilangan prima
(2) Jika dibaca terbalik dari belakang ke depan, maka bilangan yang diperoleh
juga merupakan bilangan prima
(3)Hasil kali dari digit-digit penyusunnya merupakan bilangan prima

Bilangan ‘PENABUR’ terbesar yang terdiri dari 3 digit adalah bilangan $\overline{abc}$ maka nilai a + b + c = ….

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

JAWAB

Bilangan “ PENABUR’ yang dimaksud adalah 311

Jumlah digit-digit penyusunnya adalah 3 + 1 +1 = 5 (A)

37. Diketahui p dan q merupakan bilangan prima
Jika $p^2 + p.q + q^2$ merupakan bilangan kuadrat, maka jumlah semua nilai p yang memenuhi adalah ….
A. 8 B. 10 C. 18 D. 24

JAWAB

Bilangan prima yang memenuhi adalah 3 dan 5

Jumlahnya adalah 8 (A)

38. Nilai dari $2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} - \frac{3}{2} - \sqrt{2} = ...$

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$

JAWAB

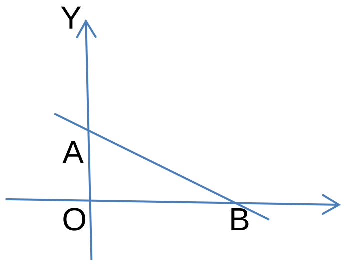
Nilai $2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} - \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ (D)

39. Diketahui x dan y merupakan bilangan bulat
Banyak pasangan (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ adalah ….

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

JAWAB 5 (B)

40. Perhatikan gambar berikut



Garis AB mempunyai gradient $-\frac{1}{k}$ dengan k < 1

Jarak koordinat titik B terhadap sumbu Y adalah k
X
Jarak koordinat titik A terhadap sumbu X adalah ….

A. $\frac{1}{k^2}$ B. $\frac{1}{k}$ C. -1 D. k^2

JAWAB : - 1 (C)

Kunci Jawaban Soal Olimpiade Matematika SMP

Persiapan Olimpiade Sains Provinsi dan Nasional

1. C
2. C
3. B
4. C
5. C
6. A
7. D
8. D
9. A
10. C
11. A
12. A
13. A
14. D
15. D
16. B
17. A
18. B
19. B
20. D
21. C
22. A
23. B
24. D
25. C
26. A
27. B
28. A
29. D
30. C
31. C
32. A
33. C
34. D
35. A
36. A
37. A
38. D
39. B
40. C

Pemabahasan Soal Olimpiade Matematika SMP

Babak 2 Persiapan Olimpiade Sains Provinsi dan Nasional

JAWABLAH DENGAN RAPI, JELAS, SISTIMATIS, TERATUR DAN DETAIL

1. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{1}{4}$$

JAWAB :

Dengan merasionalkan penyebut diperoleh :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)=\frac{1}{4}$$ lalu kalikan dengan 4 sehingga diperoleh :

$$2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-2}=1$$

Jika kita kuadratkan, diperoleh

$$8x-8\sqrt{(x+2).(x-2)}=1$$

$$8x-1=8\sqrt{(x+2).(x-2)}$$

Jika kita kuadratkan lagi, diperoleh

$$64x^2-16x+1=64x^2-256$$

Jadi $x=\frac{257}{16}$

2. Diketahui persegi panjang ABCD dengan AB = 3 dan BC = 7
Titik W terletak pada AB sehingga AW = 1
Titik X terletak pada BC, titik Y terletak pada CD dan titik Z terletak pada DA sehingga WXYZ merupakan sebuah persegi panjang.
Jika panjang BX lebih pendek daripada panjang XC, tentukan panjang BX
JAWAB
Perhatikan bahwa

$$\angle YXC=90^o-\angle WXB=\angle XWB=90^o-\angle AWZ=\angle AZW$$

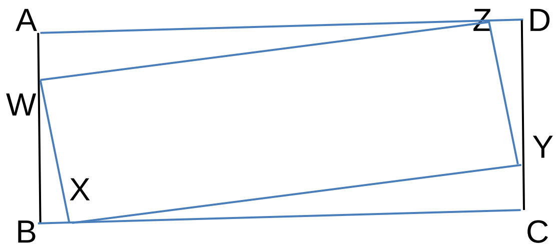
Sehingga diperoleh segitiga XYC kongruen segitiga ZWA dan segitiga XYC sebangun dengan segitiga WXB.
Akibatnya YC = AW = 1
Karena segitiga XYC sebangun dengan segitiga WXB diperoleh

$$\frac{BX}{BW} = \frac{CY}{CX}$$

$$\frac{BX}{2} = \frac{1}{7 - BX}$$

Sehingga diperoleh $BX^2 - 7BX + 2 = 0$

Dengan rumus abc diperoleh $BX = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}$ (karena BX < CX)



3. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi

$$a.b^2.c^4 = 54000$$

JAWAB

Perhatikan bahwa $54000 = 2^4 x 3^3 x 5^3$

Maka nilai a, b, c haruslah $a = 2^{a_1}.3^{a_2}.5^{a_3}$, $b = 2^{b_1}.3^{b_2}.5^{b_3}$ dan $c = 2^{c_1}.3^{c_2}.5^{c_3}$

$a_1 + 2b_1 + 4c_1 = 4$ memberikan 4 solusi (0, 0, 1),(0, 2, 0),(2, 1, 0) dan (4, 0, 0)

$a_2 + 2b_2 + 4c_2 = 3$ memberikan 2 solusi yaitu (1, 1, 0) dan (3, 0, 0)

$a_3 + 2b_3 + 4c_3 = 3$ memberikan 2 solusi yaitu (1, 1, 0) dan (3, 0, 0)

Jadi, diperoleh 4 x 2 x 2 = 16 himpunan penyelesaian

4. Pada ruang perpustakaan SMPK 2 terdapat 14 buah meja dengan 4 jenis tipe yaitu meja berlaci satu, berlaci dua, berlaci tiga dan berlaci empat.
Terdapat 33 buah laci dari semua meja.
Jika banyak meja berlaci satu sama dengan banyaknya meja berlaci dua dengan meja berlaci tiga bersama-sama, tentukan banyaknya meja berlaci satu, meja berlaci dua, meja berlaci tiga dan meja berlaci empat ?
JAWAB
Misal a adalah banyak meja berlaci satu
b adalah banyak meja berlaci dua
c adalah banyak meja berlaci tiga
d adalah banyak meja berlaci empat
sehingga diperoleh

$$\begin{cases} a+b+c+d=14 \;....(1) \\ a+2b+3c+4d=33....(2) \\ a=b+c \;....(3) \end{cases}$$

Dari (1) dan (3), diperoleh 2a + d = 14
d = 14 – 2a
Oleh karena itu a + 2b + 3c + 4d = a + 2(b + c) + c + 4d
= a + 2a + c + 4(14 – 2a)
= 56 + c – 5a
Sehingga diperoleh 56 + c – 5a = 33
c = 5a – 23
Karena c > 0, diperoleh $a \geq 5$
Karena $d > 0$ dan $d = 14 - 2a$, diperoleh $a \leq 6$
Sehingga a = 5 atau a = 6
Jika a = 6, maka d = 14 – 2a = 2
c = 5a – 23 = 7
b = a – c = - 1 (Tidak mungkin)
Jika a = 5, maka d = 14 – 2a = 4
c = 5a – 23 = 2
b = a – c = 3
Jadi banyak meja berlaci satu adalah 5 buah
Banyak meja berlaci dua adalah 3 buah
Banyak meja berlaci tiga adalah 2 buah
Banyak meja berlaci empat adalah 4 buah

5. Buktikan untuk setiap bilangan real positif a, b, c berlaku

$$\left(a^2+3a+1\right).\left(b^2+3b+1\right).\left(c^2+3c+1\right) \geq 125.a.b.c$$

BUKTI

Untuk setiap bilangan real positif a , berlaku

$$(a-1)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$
$$a^2 + 3a + 1 \geq 5a \;......(1)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$b^2 + 3b + 1 \geq 5b ......(2)$$
$$c^2 + 3c + 1 \geq 5c .....(3)$$

Lalu kita kalikan persamaan (1), (2) dan (3) sehingga diperoleh

$$\left(a^2+3a+1\right).\left(b^2+3b+1\right).\left(c^2+3c+1\right) \geq 5a.5b.5c = 125.a.b.c$$

Jadi untuk setiap bilangan real positif a, b, c berlaku

$$\left(a^2+3a+1\right).\left(b^2+3b+1\right).\left(c^2+3c+1\right) \geq 125.a.b.c$$

6. Terdapat 4 buah titik A, B, C, D pada bidang datar.
   Diketahui segitiga ABC dan segitiga ABD dimana kedua-duanya merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi segitiga masing-masing adalah10.
   Titik E terletak di dalam segitiga ABC sehingga EA = 8 dan EB = 3.
   Titik F terletak di dalam segitiga ABD sehingga FD = 8 dan FB = 3.
   Tentukan luas segiempat AEFD
   JAWAB :
   Karena segitiga AEB kongruen dengan segitiga DFB,
   Sehingga diperoleh $\angle EBA = \angle FBD$
   Oleh karena itu $\angle EBF = \angle EBA + \angle ABF = \angle FBD + \angle ABF = \angle ABD = 60^o$
   Karena $EB = BF = 3$, berarti segitiga EBF merupakan segitiga sama sisi dengan panjang 3.

   Kita memperoleh
   $$\begin{aligned}[AEFD] &= [AEBD]-[EBF]-[FBD]\\ &= [AEB]+[ABD]-[EBF]-[FBD]\\ &= [ABD]-[EBF]\end{aligned}$$
   Perhatikan segitiga ABD merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi 10
   $$[ABD] = \frac{1}{2}.alas.tinggi = \frac{1}{2}.10.\left(5\sqrt{3}\right) = 25\sqrt{3}$$
   Perhatikan segitiga EBF merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi 3
   $$[EBF] = \frac{1}{2}.alas.tinggi = \frac{1}{2}.3.\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$
   Berarti
   $$\begin{aligned}[AEFD] &= [ABD]-[EBF]\\ &= 25\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{91\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$
   Jadi luas AEFD = $\frac{91\sqrt{3}}{4}$

7. Tentukan semua bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan
   $$4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0$$
   JAWAB : Dengan memfaktorkan persamaan
   $$4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0$$
   menjadi
   $$\left(2\sqrt{x}\right)^2 + 2.\left(2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}\right) + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0$$
   $$\left(2\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 14\left(2\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) + 48 = 0$$
   $$\left(2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 6\right)\left(2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 8\right) = 0$$
   Sehingga diperoleh
   $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$ ATAU $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$
   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah

$$(0,36);(1,16);(4,4);(9,0);(0,64);(1,36);(4,16);(9,4);(16,0)$$

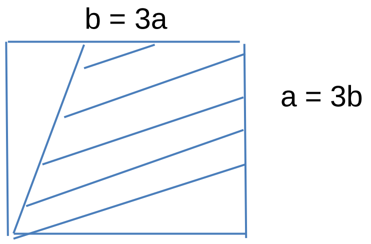
8. Pak Pitus memilih sebuah bilangan real positif a secara acak dimana $0<a\le 1$ dan memilih sebuah bilangan real positif lainnya b secara acak dimana $0<b\le 1$

   Jika $c=\dfrac{a}{a+b}$, tentukan peluang dimana $\dfrac{1}{4}\le c\le \dfrac{3}{4}$

   JAWAB

   Untuk $c\ge \dfrac{1}{4}\ maka\ \dfrac{a}{a+b}\ge \dfrac{1}{4}\ berarti\ b\le 3a$

   Untuk $c\le \dfrac{3}{4} maka \dfrac{a}{a+b}\le \dfrac{3}{4} berarti\ a\le 3b$



   Untuk mencari peluang $b\le 3a\ dan\ a\le 3b$, kita mencari luas daerah arsiran

   Luas tiap segitiga adalah $\dfrac{1}{2}alas.tinggi=\dfrac{1}{2}.1.\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{6}$

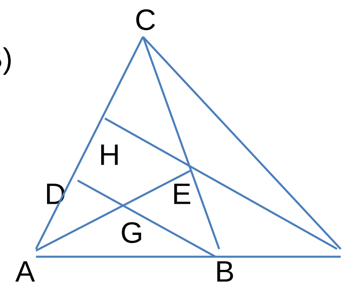
   Luas daerah arsiran = $1-2.\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{2}{3}$

   Jadi peluang dimana $\dfrac{1}{4}\le c\le \dfrac{3}{4}$ adalah $\dfrac{2}{3}$

9. Diketahui segitiga ABC. Titik D terletak pada AC sehingga BD = CD.
   Sebuah garis yang sejajar BD, memotong BC di E dan memotong AB di F.
   Titik G merupakan titik potong antara garis AE dan BD.
   Buktikan sudut BCG sama dengan sudut BCF
   BUKTI
   Misalkan H merupakan titik potong garis AC dan EF
   Maka besar sudut CDG = besar sudut CHF (HF sejajar DB)

   $$\frac{CD}{DG}=\frac{BD}{DG}=\frac{FH}{HE}=\frac{FH}{HC}$$

   Berarti segitiga CDG sebangun dengan segitiga FHC
   Akibatnya besar sudut GCD = besar sudut CFH
   Sehingga diperoleh
   F



$$\angle BCG = \angle BCD - \angle GCD$$
$$= \angle CEH - \angle CFH$$
$$= \angle BCF$$

Terbukti $\angle BCG = \angle BCF$

10. Diketahui a, b, c merupakan bilangan bulat dimana

$$ab + bc + ca = 2012$$

Buktikan $\left(a^2 + 2012\right).\left(b^2 + 2012\right).\left(c^2 + 2012\right)$ merupakan bilangan kuadrat

BUKTI

Dengan menambahkan a^2 pada kedua belah ruas diperoleh

$$a^2 + ab + bc + ca = a^2 + 2012$$
$$(a+b).(a+c) = a^2 + 2012 \ldots (1)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$(a+b).(b+c) = b^2 + 2012 \ldots (2)$$
$$(b+c).(c+a) = c^2 + 2012 \ldots (3)$$

Dengan mengalikan (1), (2) dan (3) diperoleh

$$\left(a^2 + 2012\right).\left(b^2 + 2012\right).\left(c^2 + 2012\right) = \left[(a+b).(b+c).(c+a)\right]^2$$

Jadi $\left(a^2 + 2012\right).\left(b^2 + 2012\right).\left(c^2 + 2012\right)$ merupakan bilangan kuadrat

THE END