ORIGEN Y DESARROLLO HISTÓRICO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

M.C. Muñoz-Lecanda [1] , N. Román-Roy [2]
Departamento de de Matemática Aplicada y Telemática
C/ Jordi Girona 1; Edificio C-3, Campus Norte UPC
E-08034 BARCELONA

[1]MATMCML@MAT.UPC.ES
[2]MATNRR@MAT.UPC.ES

Contents

Chapter 1

Introducción

Es tradicional decir que *Newton* y *Leibnitz* inventaron el *cálculo infinitesimal*. Normalmente se atribuye a personas concretas las invenciones concretas, pero no los métodos generales, que suelen ser resultado de la evolución histórica de los problemas y de las soluciones particulares que se han ido dando a cada uno. Sin embargo, el cálculo infinitesimal se atribuye en concreto a los mencionados investigadores, habiendo sido el método que ha posibilitado la resolución de un mayor número de problemas dispares desde su descubrimiento.

Desde este punto de vista, el trabajo de Newton y Leibnitz es extraordinario pero no es el único. La situación es semejante a la atribución a *Einstein* de la *teoría de la Relatividad*. Evidentemente su trabajo es enorme; pero su labor, como la de los anteriores, tiene el mérito de haber sido de una síntesis y de una imaginación inmensa para conseguir unir todos los problemas en uno y dar una sola solución a todos ellos.

Este es el punto de vista que se va a seguir en este corto repaso del desarrollo histórico del cálculo. Hay unos nombres concretos, pero, sobre todo, está el trabajo de muchas personas que hacen evolucionar el conocimiento humano.

Inicialmente se van a analizar los problemas que dieron origen al cálculo y otros problemas de la época que, aunque no eran exactamente de cálculo, posibilitaron las soluciones, que se describirán brevemente. Seguidamente se expondrá sucintamente parte de los trabajos de Newton y Leibnitz y se hará una comparación de los mismos. A continuación se efectuará una corta relación de los desarrollos que se hicieron a lo largo de los siglos XVIII y XIX y de los nuevos problemas que se abordaron en ellos.

Debe señalarse que no se pretende aquí hacer un estudio del desarrollo histórico del *análisis matemático*, que tiene muchas ramas hoy claramente diferenciadas, sino solamente de lo concerniente al llamado cálculo infinitesimal. De ahí que, aunque se haga alguna referencia a otras cuestiones (por la influencia que tuvieron en el cálculo), realmente la exposición se va a centrar, en principio, en los problemas de derivación e integración de funciones, y después en los de continuidad de funciones y convergencia de series.

Chapter 2

Origen histórico: los problemas

La situación de los problemas matemáticos a mediados del siglo XVII era aproximadamente la siguiente: además de tener readquiridos los resultados y métodos de la matemática griega, el desarrollo de la *geometría analítica* (el método de las coordenadas) había permitido plantear y resolver algunos problemas relacionados con curvas, de las cuales se conocían muchos tipos. Por otra parte, la física proporcionaba un punto de vista cinemático: una curva podía interpretarse como la trayectoria de un punto material móvil.

Varios tipos de problemas se planteaban sobre las curvas. Aunque la clasificación existente en aquel momento era más amplia (pues se utilizaba un método apropiado para cada problema), se va a simplificar utilizando el punto de vista, e incluso el lenguaje, actuales.

2.1 El problema de las tangentes

Es el problema de hallar la ecuación de la tangente a una curva dada, en un punto. Su origen es geométrico y técnico. Geométricamente, proviene del tiempo de los antiguos griegos, que obtuvieron las tangentes de algunas curvas. Por otra parte, era necesario resolver este problema para el diseño de lentes ópticas (una cuestión importante en la época de la que hablamos, el siglo XVII). También desde un punto de vista físico tenía su relevancia, por cuanto era importante conocer la *dirección instantánea* de un movimiento curvo.

Apolonio (190 a.C.) construyó las tangentes a las cónicas. *Arquímedes* (287-212 a.C.) hizo lo propio para las espirales. Sin embargo, el punto de vista griego era "estático": la tangente era la recta que cortaba a la curva en un sólo punto, "dejándola a un lado". No había, pues, proceso de paso al límite.

Fermat (1601-1665) obtuvo un método para hallar la tangente a una curva definida por un polinomio: $y = f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, método que, en realidad, no hacía ninguna referencia al paso al límite, sino que se apoyaba en el siguiente razonamiento: si $f(x)$ es un polinomio, entonces $f(x+h) - f(x)$ es un polinomio en h divisible por h, de modo que se hace la división y se eliminan los términos en h, y se obtiene así la ecuación de la recta tangente. (Obsérvese que este sistema es el utilizado, hoy en día, para calcular derivadas por los estudiantes de bachillerato, que no manejan con soltura el concepto de límite.) El punto de vista de Fermat no es, por tanto infinitesimal, aunque está realmente cercano, ya que al final acaba haciéndose $h = 0$ al eliminarse los términos en h.

Descartes (1596-1650) afirma que el problema geométrico que más desea solucionar es el de las tangentes. Su procedimiento es todavía menos infinitesimal que el de Fermat y consiste en trazar la circunferencia con centro en el corte de la normal a la curva (en el punto que se considere) con el eje de abscisas y que pase por el punto en cuestión. Se impone la condición de que la circunferencia no corte a la curva en ningún otro punto y de esta manera se tiene como tangente la de la circunferencia en este punto. Este método es útil para curvas $y = f(x)$ tales que $(f(x))^2$ sea un polinomio sencillo. Con él se retorna a la situación griega, completamente "estática". Tanto este método como el anterior fueron mejorados con posterioridad.

Barrow (1630-1677) parece que utiliza la idea de que la tangente es el límite de las secantes para aplicar el método de Fermat a curvas dadas en forma implícita: $f(x, y) = 0$. Ya se verá más adelante que, no obstante, Barrow seguía con la idea griega de que la tangente era la recta que cortaba a la curva en un solo punto.

Por otro lado, en esos mismos años (hacia 1650), se consiguió determinar la tangente a algunas curvas por métodos "cinemáticos". Para ello se daba la curva en forma paramétrica (con parámetro el tiempo) y se interpretaba la velocidad como la suma (vectorial) de las velocidades según los ejes. Era, pues, necesario que los dos movimientos tuvieran "buenas" velocidades. De este modo se determinó la tangente a la cicloide, a la parábola y a la elipse.

2.2 Problemas de máximos y mínimos

Como el título indica, se trata de hallar el máximo y el mínimo de una función dada. Como ejemplos prácticos podríamos tener los siguientes: el alcance de un proyectil depende del ángulo de inclinación del tubo del cañón. ¿Cuál es el ángulo que maximiza dicho alcance? En el movimiento planetario, ¿cuáles son las distancias máxima y mínima de un planeta al Sol?

El primer trabajo sobre este problema es de *Kepler* (1571-1630), quien tuvo que diseñar cubas de vino de manera que tuvieran la máxima capacidad, lo cual motivó su estudio sobre la cuestión. Encontró que el paralelepípedo de base cuadrada y volumen máximo inscrito en una esfera es el cubo (lo obtuvo midiendo muchas formas distintas). Lo esencialmente importante es su comentario de que, al acercarse al valor máximo, para un cambio fijo en las dimensiones, el volumen crece cada vez más lentamente. La lectura actual de este hecho es que la derivada se anula en un máximo relativo.

Fermat parece que da un método de hallar extremos por medio de lo que el denomina "pseudoigualdades". Afirma que en un punto se alcanza un máximo si para un incremento infinitesimal de la variable la función no varía. La esencia es semejante a la ya comentada sobre el problema de la tangente.

2.3 Problemas de integración

Son los problemas de determinar longitudes de curvas, áreas encerradas por curvas, centroides, etc. Y también problemas dinámicos, como hallar el espacio recorrido por un móvil conocida la expresión de su velocidad, o el espacio recorrido por un cuerpo sometido a la atracción gravitatoria de otro cuerpo puntual.

Los griegos, sobre todo Arquímedes, habían resuelto algunos casos particulares del cálculo de áreas y volúmenes por el método llamado “exahustivo” o “método de llenado”: se supone que el área encerrada por una curva existe y se halla una sucesión de polígonos regulares inscritos en la curva, cuya suma de áreas se aproxime a la deseada. Este área está bien calculada por *Eudoxio* (¿408-355? a.C.) sin usar expresamente el paso al límite, pero sí teniendo clara la idea de que $k/2^n$ tiende a 0 cuando n crece. Otro método usado es el de la “compresión”: para probar que el área, el volumen o la longitud buscada, M, es igual al valor C, se toman dos sucesiones de cuerpos $\{S_n\}$ y $\{I_n\}$ de áreas, volumenes o longitudes conocidas y tales que verifiquen:

1. $S_n > M > I_n$, $S_n > C > I_n$;
2. dado $\varepsilon > 0$, $S_n - I_n < \varepsilon$ ó $\frac{S_n}{I_n} < 1 + \varepsilon$, para n suficientemente grande (recuérdese que el significado de $S_n - I_n < \varepsilon$ estaba aclarado por Eudoxio para el caso $\varepsilon = 1/2^n$).

Estos métodos y los resultados de Arquímedes se conocieron en Europa en el siglo XVI. Se mejoraron y aplicaron a gran variedad de problemas sin temor al paso al límite, ni al infinito ni a los números irracionales. Ello produjo una amalgama de procedimientos, con una base muy pobre, pero muy poderosos. Algunos de ellos son los que, a continuación, se describen de forma rápida:

- Kepler estudio la manera de hallar el volumen de cuerpos de revolución, descomponiéndolos en partes indivisibles de la forma adecuada a cada problema. Así determinó el volumen de más de noventa cuerpos diferentes.
- *Galileo* (1564-1642) justificó que el espacio recorrido por un móvil era igual al área comprendida entre la curva de la velocidad y el eje del tiempo. Esta idea es muy importante, dado que unificaba dos problemas de orígenes bien diferentes: la longitud de una curva y el área bajo otra.
- Fue *Cavalieri* (1598-1647), un alumno de Galileo, quien utilizó de manera sistemática técnicas infinitesimales para resolver este tipo de problemas. Comparó las áreas (o volúmenes) de los “indivisibles” que forman una figura con los que forman otra, deduciendo que si aquéllas se hallaban en una determinada relación, también lo estaban en esa misma las de las figuras correspondientes. Además, Cavalieri descompuso las figuras en indivisibles de magnitud inferior. Así, para calcular volúmenes, cortaba los cuerpos y medía las áreas de las secciones. Esto suponía una ruptura con los procedimientos previos de los griegos y de Kepler. Su postura puede resumirse en una frase que se le atribuye: “el rigor es cosa de los filósofos, no de los matemáticos”. Estaba más interesado en los resultados prácticos de los cálculos que en la justificación última de lo que eran los “indivisibles”.

  El llamado *teorema de Cavalieri* fue enunciado de la siguiente forma: “si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura y al hacer secciones paralelas a la base las áreas de las secciones están siempre en una proporción fija, entonces en esa misma proporción están los volúmenes”. Su justificación la hizo transformando un sólido en otro mediante la transformación de las secciones a lo largo de la altura. Este resultado fue expuesto en 1635 en su libro *Geometría de los indivisibles*.
- Otro de sus resultado fue la fórmula que hoy se escribe en la forma $\displaystyle\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, y que obtuvo estudiando el cuerpo engendrado al girar la curva de ecuación $y = x^n$ en torno al eje

de abscisas. Evidentemente, el resultado general lo conjeturó, tras haberlo demostrado para valores pequeños de n.

- Los problemas de hallar el área entre un arco de curva y el eje de abscisas se denominaron *problemas de cuadratura* y fueron arduamente trabajados, como se está viendo. Para llegar a probar la expresión de la integral anterior, fue necesario obtener previamente que $\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{h=1}^{n} h^k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k+1}$ (donde k es un número natural), lo que dio lugar a trabajos de Fermat, *Pascal* y del mismo Cavalieri. También se consiguió calcular esa integral en el caso en que el exponente es un número racional. El trabajo principal es de *Wallis* (1616-1703), que lo probó para $n = 1/q$. El resultado general es de Fermat y también de *Torricelli* (1608-1647), que era otro discípulo de Galileo.

Más dificultades llevó el problema del cálculo de la longitud de una curva (la *rectificación*). En primer lugar porque no se creía que una curva pudiera tener la misma longitud que un segmento de recta construible. Incluso Descartes pensaba que era un problema del que pudiera no haber solución.

Sin embargo se consiguieron rectificar curvas. Así, en el año 1657 (1659, según algunos estudiosos), *Neil* (1637-1670) rectifica la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, *Wreu* (1632-1723) rectifica la cicloide, Fermat hace lo propio con otras varias y *Gregory* (1638-1675) da en 1668 un método general para rectificar curvas. Los primeros resultados se obtuvieron inscribiendo polígonos, aumentando el número de lados y disminuyendo así la longitud de éstos; aunque se ayudaban con curvas auxiliares y métodos esféricos para calcular las sumas que se obtenían.

Como comentario final, cabe decir que uno de los problemas de esta época fue el no saber relacionar el problema de las tangentes con el de la integración. Así, se tenían los resultados de que el área bajo la curva $y = x^n$ es $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, y que la tangente a la curva $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ tiene pendiente x^n, pero esto no indujo a pensar que, en general, los dos problemas estuvieran relacionados. Hay un momento en que Barrow llega a intuirlo, pero no se da cuenta completa de ello y deja para su discípulo Newton (1642-1727) la solución de la cuestión. En realidad, al parecer, Barrow no supo salir de la idea "estética" de la tangente a una curva.

2.4 Otros problemas

Las necesidades de la navegación hicieron que *Napier* (1550-1617) estudiase y construyese las tablas de logaritmos en 1614, que, corregidas por *Briggs* (1561-1631), dieron origen a los logaritmos tal como hoy son conocidos. Ello dio lugar a una nueva función que entonces no se entendía como tal y que pronto se relacionó con el área bajo la hipérbola de ecuación $y = 1/x$. El primero que lo hizo fue Gregory, observando que dicha área no sólo verificaba la propiedad del producto, sino otras propiedades. Newton obtuvo una serie para calcular logaritmos, lo cual originó otro de los problemas precursores de los trabajos posteriores del propio Newton y de Leibnitz (1646-1716): el manejo del infinito. Se hacía, pues, uso (sin ninguna justificación rigurosa) de las series de potencias, que eran obtenidas, en general, dividiendo polinomios por potencias crecientes. En ningún momento se aclaraba qué significaba la suma o la convergencia de estas series. La diferencia con los griegos, tal como ya se ha comentado, estribaba en haber perdido el miedo al paso al límite y al manejo del infinito.

Pero no acababa aquí la cosa. Newton estaba convencido de que todo lo que era posible hacer con sumandos finitos también se podía hacer con las series, y así lo hacía, obteniendo, en general, resultados correctos, verificados merced a las comprobaciones numéricas que él mismo efectuaba frecuentemente.

Chapter 3

Newton y Leibnitz

En el apartado anterior se han repasado algunos de los problemas que estaban planteados hacia mitades del siglo XVII y que tenían que ver con el cálculo. Muchos de ellos tenían sus soluciones particulares. El trabajo de Newton y Leibnitz consistió fundamentalmente en efectuar una síntesis, en elaborar un método general para atacarlos todos. Pero también fue un detenerse para recapitular y darse cuenta de que aquel era un buen punto de partida para progresar. En otras palabras, se aprovechó un momento en que había muchas experiencias y era necesario elaborar la teoría (dicho en términos de ciencia experimental).

A continuación, se van a analizar y comparar los trabajos de ambos.

3.1 El cálculo según Newton

Los trabajos de Newton ocupan, en ediciones modernas, más de cinco mil páginas. Es imposible dar aquí un resumen coherente de todos ellos, ni aún sólo de los referidos al cálculo infinitesimal, ya que la visión de Newton es general e impone su punto de vista físico o mecánico en todas las cosas que lleva a cabo. A este respecto, es admirable la capacidad de observación, de imaginación y de crítica constante de todo lo que hace y que queda de manifiesto a lo largo de toda su obra. En general Newton no publicó los trabajos que iba escribiendo, sino que los divulgaba entre sus alumnos y conocidos, por miedo a las críticas.

En 1666 introdujo las "fluxiones", que es lo que hoy se conoce con el nombre de *derivadas*. Newton imaginaba una curva como una ecuación $f(x, y) = 0$, donde x e y eran funciones del tiempo; es decir, partía de la imagen cinemática de curva como trayectoria de un móvil. La velocidad en cada punto tenía como componentes las velocidades según las direcciones de los ejes, $\bar{x}$ e $\bar{y}$; funciones que el denominaba *fluxiones*. Para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto calculaba el cociente $\bar{y}/\bar{x}$. (Hay que señalar que esta notación es posterior. Newton la usó hacia 1690.) De esta manera, calculaba las tangentes fácilmente. Seguidamente se propuso el problema inverso: conocido el cociente $f(x) = \bar{y}/\bar{x}$, ¿cómo hallar y en función de x? Newton estudió casos particulares de la función f y de las variables que en ella intervienen. Es lo que hoy se conoce como resolución de *ecuaciones diferenciales* o *antidiferenciación*. Newton afirmaba que de esta manera se podían resolver todos los problemas, lo cual da idea de su visión de futuro, aun cuando él sólo pudiera resolver casos particulares.

Para estudiar el cálculo del área bajo una curva por métodos de antidiferenciación, primero investigó la variación del área al variar la abscisa. Así obtuvo el *teorema fundamental del cálculo* (exactamente igual a como hoy se les hace a los alumnos de bachillerato, con funciones continuas y usando la propiedad de aditividad del área.) Debe señalarse que para Newton todas las funciones eran continuas, ya que se trataba de las trayectorias de movimientos continuos (que era el concepto que en su tiempo se tenía de *continuidad*.)

Aquí se unen dos problemas previos: el de las tangentes y la integración. De este modo, los "indivisibles" se relacionan con los métodos de hallar tangentes y Newton se percata de que este procedimiento unificador es el que va a permitir adelantar en el progreso, no sólo referido a esos problemas, sino en el de la comprensión de la naturaleza.

Newton desarrolló métodos de derivación e integración; en particular, la regla de la cadena y el método de sustitución, así como la propiedad de linealidad, y construyó, además, tablas de derivadas e integrales.

Para el cálculo de áreas necesitaba conocer los puntos de corte de la curva con el eje. Con ese motivo inventó el llamado posteriormente *método de Newton* para calcular raíces aproximadas (y que se sigue usando tal como él lo desarrolló.) Hay que señalar, no obstante, que él no hace la interpretación geométrica habitual del método, sino que su versión se basa en realizar pequeñas variaciones de la variable e ir aproximando la función como si fuera una serie. Además, como utiliza funciones implícitas $f(x, y) = 0$, necesita despejar y en función de x; de ahí que su idea para el cálculo de raíces no sea geométrica, sino que trata de obtener la variable y como una serie en la variable x, para después integrar término a término.

Este uso no justificado de las series (y otros posteriores) no le pasó desapercibido. Tenía una idea intuitiva de la convergencia, aunque no llegó a explicarla. Incluso llegó a afirmar que, más que una demostración, lo que hacía era una explicación corta del método.

Al abordar los problemas de máximos y mínimos, llegó de inmediato a la conclusión de que la derivada es nula en un extremo. Aquí se dio cuenta de que no siempre la variable va a ser el tiempo, cosa que comenta: "el tiempo se puede sustituir por otra variable (fluente) que fluya con continuidad".

Sobre el problema de rectificación de curvas, Newton dio las fórmulas integrales que se explican en los cursos de cálculo, y las aplicó a muchos casos concretos.

Como ya se ha comentado, el trabajo de Newton no acaba aquí. En realidad se puede decir que partió de una visión de la naturaleza y construyó el cálculo infinitesimal como una necesidad para explicar y desarrollar esa visión. A este respecto hay que añadir que, desde luego, no era indiferente a los problemas matemáticos de su tiempo, pero tampoco a todos los demás, y a todos dedicó parte de sus energías.

3.2 El cálculo según Leibnitz

El punto de partida de Leibnitz es distinto al de Newton. Éste parte de ideas físicas, mientras que aquél lo hace de ideas filosóficas, tratando de buscar un lenguaje universal y, quizás, su mayor contribución al cálculo sea precisamente dicho lenguaje, que aún es usado. Leibnitz creó un lenguaje mediante el cual, por sencillas manipulaciones, se obtienen fórmulas que resultan ser las verdaderas y que, naturalmente, hay que comprobar.

Ya ha sido comentado que Newton no publicó sus trabajos sobre el cálculo hasta muy posteriormente. En el caso de Leibnitz la situación es peor todavía, puesto que, prácticamente, ni siquiera lo escribió en forma ordenada, salvo pequeñas contribuciones. Su *Historia y origen del cálculo Diferencial* fue escrito mucho más tarde de su creación. Así sólo se tienen muchos papeles en los que iba anotando sus ideas y resultados.

Sus primeros estudios matemáticos datan de 1666 y versan sobre progresiones aritméticas de orden superior, en concreto, sobre cómo la suma de las diferencias está relacionada con los términos de la sucesión. De hecho, este es el origen de su desarrollo del cálculo: obtener y calcular sumas.

Hacia 1673 está convencido de la importancia del problema de las tangentes y del problema inverso, sobre el cual tiene la certeza de que consiste en hallar áreas y volúmenes. Su primer trabajo sobre el cálculo de áreas lo efectúa integrando las funciones polinómicas, de las cuales da las reglas de integración; queda claro que entiende la integral como el área bajo la curva y ésta como límite de infinitésimos. Además va cambiando la notación continuamente, en busca de la mejor, que es la que hoy en día se usa.

Interpreta la derivada como el cociente de los infinitésimos $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, aunque es incapaz de aclarar qué son dichos infinitésimos. Incluso, en algún momento, llega a escribir que no cree en ellos, a pesar de haber escrito abundantes páginas tratando de justificarlos y explicarlos.

Al igual que Newton, resuelve en uno solo todos los problemas que estaban abiertos: tangentes, integración y máximos y mínimos. Además es consciente de que el cálculo infinitesimal es una ruptura con todo lo precedente, en el sentido de que es un paso adelante sin retorno.

3.3 Comparación

Es conocida la historia sobre las acusaciones de plagio que sufrió Leibnitz, problemas que no fueron entre Newton y Leibnitz, sino entre sus seguidores y que, más que de índole matemática, fueron problemas de tipo nacionalista entre Inglaterra y el continente. Dejando aparte esas disputas, se va a tratar de dilucidar las diferencias entre las dos aproximaciones.

Hay que dejar claro, de antemano, que los resultados de uno y otro son, prácticamente, los mismos, aunque originados de distinta manera.

En primer lugar, el trabajo de Newton se basa en las derivadas respecto al tiempo, pues el origen de sus ideas es físico, como ya se ha comentado. Leibnitz, por el contrario, parte de problemas filosóficos (de su busca de los infinitesimales); de ahí que su trabajo se base en sumas de infinitesimales. Por esa razón la integral de Newton es originalmente *indefinida*, mientras que la de Leibnitz es *definida*. Por supuesto que, al final, ambos calculan áreas buscando *primitivas*.

Queda también claro que para Newton las nociones originales son las fluxiones $\bar{x}$ e $\bar{y}$: las velocidades según los ejes. Su cociente es la pendiente de la tangente. Contrariamente, para Leibnitz, las nociones originales son los diferenciales, y su cociente es algo que tiene un significado geométrico claro.

Por otra parte, Newton hace uso continuado de los desarrollos en serie, mientras que Leibnitz prefiere trabajar sólo con las funciones conocidas: racionales, logarítmicas y trigonométricas. Esto proviene, otra vez, de los orígenes de las ideas de ambos. El primero es experimental: va buscando buenos resultados, de acuerdo con la experiencia; no busca teorías globales sino resultados concretos. Contrariamente, el segundo es más dado a la generalización y a la especulación. Newton, a veces, no se preocupa de escribir el resultado de forma general, sino que le basta con varios ejemplos. Leibnitz hace todo lo contrario.

Dejando aparte estas diferencias, los trabajos de ambos hicieron que la situación matemática fuera radicalmente diferente a finales que a principios del siglo XVII. Ambos hicieron posible el paso de una colección anárquica de problemas y métodos de resolución, a un método general para atacar y resolver todos ellos. Además, Newton propició un desarrollo inmenso en la comprensión de la naturaleza y el universo, utilizando el instrumento que había creado a lo largo de sus trabajos.

Habría que añadir, finalmente, que Leibnitz fue un gran polemista sobre las ideas de sus trabajos, respondiendo continuamente a las acusaciones de oscuridad, falta de rigor y falta de acuerdo con los grandes maestros de la antiguedad; en cambio Newton fue completamente silencioso en ese aspecto.

3.4 Desarrollos inmediatos

Parte de las mismas personas que con anterioridad a los trabajos de Newton y Leibnitz habían planteado los problemas previos, contribuyeron rápidamente al desarrollo del cálculo infinitesimal.

Entre otros, Wallis y *Raphson* (1648-1715) mejoraron los métodos de Newton para hallar raíces. *Rolle* (1652-1719) dio, en 1691, el resultado que hoy se conoce con su nombre, aunque sin demostrarlo. Los hermanos *Bernouilli* contribuyeron fuertemente a la obra de Leibnitz, tal como éste reconoce. Uno de ellos escribió el primer tratado de cálculo infinitesimal basado en los métodos de Leibnitz y, en su traducción al francés, *l'Hôpital* (1661-1704) incluyó la regla que hoy es de todos conocida.

Pero no sólo se desarrolló, sino que el cálculo contribuyó a aclarar las ideas acerca de los objetos con los que se estaba trabajando. Así, aparecen ya en 1697 ideas sobre la continuidad. Gregory afirma que el cálculo introduce una nueva operación, el paso al límite, la cual da lugar a números irracionales distintos a los obtenidos como raíces de números racionales. Wallis enuncia claramente la actual definición de límite de una función. Y así otras.

Chapter 4

El siglo XVIII

El siglo XVII proporcionó a las matemáticas dos instrumentos extraordinarios: la geometría analítica y el cálculo infinitesimal. Ambos fueron extensamente desarrollados en esa época y aplicados a la resolución de una enorme variedad de problemas.

Durante este siglo, eran la *mecánica* y la *astronomía*, además de las propias matemáticas, las ramas que continuamente exigían a las Matemáticas la resolución de sus problemas, la creación de nuevas técnicas y el desarrollo de nuevas ideas. Así nace la *mecánica analítica*, el *cálculo de variaciones*, el *cálculo en varias variables* y el análisis de las *ecuaciones diferenciales* (*ordinarias* y en *derivadas parciales*), así como su uso en la descripción de los fenómenos de la naturaleza.

No es preciso aclarar que, realmente, la división en siglos es artificiosa, puesto que no se toma el año cero de cada siglo para hacer balance y comenzar de nuevo (ya que la evolución histórica de la resolución de los problemas es continuada.) Sin embargo, dicha división sí permite clarificar el análisis de esta evolución. (De esta manera, se pueden incluir en el siglo que nos ocupa los trabajos de Newton y Leibnitz y de sus inmediatos continuadores.)

Ya se ha comentado que las matemáticas se desarrollan enormemente en este siglo. Aquí, no obstante, sólo se va a analizar la evolución del cálculo infinitesimal y, en ese aspecto, la figura que eclipsa a todos los demás es la de *Euler*, por lo que se tomará como el personaje representativo del siglo.

Se va a dividir el estudio en tres partes. En primer lugar se hará un repaso de la obra de Euler. Se continuará con el trabajo general sobre las series y su desarrollo, lo que permitirá hacer un breve resumen de los demás resultados de cálculo en este siglo. Finalmente, se hará un breve comentario sobre las discusiones habidas al respecto de la validez o no del cálculo infinitesimal, sobre sus posibles errores y demás problemas relacionados.

4.1 Euler

Euler (1707-1783) realizó contribuciones importantes a varias ramas de la matemática pura y aplicada y de la física. De entre sus muchos escritos, sólo se va a prestar atención a sus tres libros sobre cálculo: *Introductio in Analysis infinitorum* (1748), *Institutiones Calculo Differentialis* (1755) y *Institutiones Calculo Integralis* (1768-1770).

La exposición que se va a realizar seguidamente es un repaso a las contribuciones que Euler realizó al cálculo (dejando claro, de entrada, que su trabajo es mucho más extenso, incluso sobre los temas aquí considerados.) Se aprovechará, de paso, para citar las aportaciones que otros matemáticos hicieron a los distintos temas.

4.1.1 Sobre el concepto de función

En el siglo XVIII eran conocidas (junto con muchas de sus propiedades) las funciones que, hoy en día, se llaman elementales (racionales, trigonométricas, exponencial y logarítmica.) Entre las propiedades conocidas figuraban, por ejemplo, la expresión de $\sin(x \pm y)$, las derivadas y la relación entre las funciones exponencial y logarítmica como inversas una de otra. Sin embargo, no se tenía una definición expresa, ni tan siquiera una noción clara, del concepto de *función* en general. Las "funciones" eran magnitudes geométricas asociadas a curvas o al movimiento de un cuerpo material (de ahí las *funciones del tiempo*, que era tal como las entendía Newton.) Siguiendo esta imagen de magnitudes asociadas a curvas era como se entendieron las funciones elementales y otras muchas.

No obstante, Euler comenzó dando una definición del objeto que iba a estudiar en sus obras, pasando de las funciones particulares conocidas a una noción general de "función". Para él, una función era una "expresión analítica" en la que interviniesen las variables y, eventualmente, algunas constantes. Con ello entendía Euler una expresión en la que, no sólo había operaciones algebraicas, sino también el paso al límite de sucesiones, sumas de series y las funciones elementales conocidas. (Euler entendía que las series y los productos infinitos no eran sino la repetición infinitas veces de las operaciones racionales, acerca de cuya validez no tenía ninguna duda.) De ahí su definición de las funciones exponencial y logarítmica en la forma:

$$\begin{aligned} \log x &:= \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n}-1) \\ e^x &:= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

o su descomposición de las funciones trigonométricas en productos infinitos.

En realidad, a esas "expresiones analíticas" las llama Euler *funciones continuas*, y se pueden identificar con lo que actualmente se denominan *funciones analíticas*, salvo en puntos aislados de discontinuidad (como $1/x$ en $x = 0$.) Así no hay ninguna duda de que toda función se desarrolla en serie de potencias. El argumento utilizado es el experimental: "tómese una función y compruébese". Esto también le permite utilizar funciones implícitas por medio de su desarrollo en serie. A pesar de eso, Euler reconoce la existencia de otras funciones a las que llama "mecánicas" o bien dice de ellas que se pueden dibujar libremente.

Respecto a las funciones polinómicas, admite sin demostración que se descomponen en producto de factores lineales cuadráticos.

A lo largo del siglo hubo controversias sobre el concepto de función, motivadas, en general, por la necesidad de admitir soluciones de ecuaciones diferenciales que estén definidas a trozos. Esto obligó a Euler a generalizar, más adelante, su idea de función, del siguiente modo: "si unas magnitudes cambian al cambiar otras, se dice que las primeras son función de las segundas".

También a finales del siglo, el otro gran matemático de la época, *Lagrange* (1736-1813), definió la noción de función como "cualquier expresión útil para efectuar cálculos, en la que las variables intervienen de cualquier manera". La diferencia estriba en admitir diversas expresiones para trozos distintos.

4.1.2 Tratamiento de las funciones elementales

Uno de los méritos con que cuenta Euler es la facilidad con que maneja los números infinitamente pequeños y los infinitamente grandes, como puede verse en el siguiente ejemplo. Por primera vez define $\log_a x$ como el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número x. A partir de ahí da su definición de la *función exponencial* como

$$a^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kx}{n}\right)^n$$

(donde k depende de a), expresión que él escribe en la forma:

$$a^x := \left(1+\frac{kx}{N}\right)^N$$

donde N es un número infinitamente grande. Desarrollando por la fórmula del binomio y teniendo en cuenta que

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \dots$$

(pues N es infinitamente grande) queda:

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \dots$$

Poniendo $x = 1$ se tiene la relación entre k y a:

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots$$

y el caso en que $k = 1$, da el número e (introducido por Euler):

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

que queda inmediatamente identificado como la base de los logaritmos naturales. Además, puesto que

$$e^x := \left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

se obtiene, así, la definición habitualmente utilizada.

Con respecto a las funciones trigonométricas, Euler introduce el *radián* como unidad de medida de ángulos, y el *seno* y el *coseno* como razones entre segmentos, ya que utiliza circunferencias de radio unidad en las definiciones. De estas buenas definiciones obtiene fácilmente las propiedades correspondientes. Además, como tampoco tiene ningún tipo de problemas en el manejo conjunto de números complejos junto con funciones reales o complejas, obtiene, asimismo, los desarrollos en serie de estas dos funciones, así como la famosa expresión:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

por identificación de los correspondientes desarrollos en serie formales.

Finalmente, cabe señalar que los desarrollos en serie los obtiene Euler sin hacer uso del cálculo diferencial, sino repitiendo infinitas veces operaciones racionales (como ya se ha dicho).

4.1.3 Derivadas y diferenciales de las funciones elementales

A partir de los desarrollos en serie obtenidos para las funciones elementales, Euler deduce los correspondientes diferenciales (al estilo Leibnitz), y así escribe:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x^n &= nx^{n-1}\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(pq) &= \mathrm{d}pq + p\mathrm{d}q \\
\mathrm{d}(\log\, x) &= \log\,(x+\mathrm{d}x) - \log\, x = \log\,(1+\frac{\mathrm{d}x}{x}) \\
&= \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}x^2}{2x^2} + \frac{\mathrm{d}x^3}{3x^3} - \ldots = \frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}$$

(ya que $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x^3$,... son infinitamente pequeños frente a $\mathrm{d}x$.) De igual forma, y por la misma razón:

$$\mathrm{d}(e^x) = e^{x+\mathrm{d}x} - e^x = e^x(e^{\mathrm{d}x}-1) = e^x\left(\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}x^2}{2!} + \frac{\mathrm{d}x^3}{3!} - \ldots\right) = e^x\mathrm{d}x$$

y lo mismo con todas las demás.

Ya se ha comentado que Euler no tenía ningún problema en mezclar números complejos y reales en las expresiones de las funciones, o en tomar como variables números complejos, aun cuando inicialmente las funciones estuvieran definidas sólo para números reales. De hecho, mantuvo grandes discusiones sobre la función logaritmo, llegando a tener claro el hecho de que ésta toma infinitos valores para cada número, si se valora en los números complejos.

4.1.4 Sobre la fórmula de Taylor

Taylor (1685-1731) fue un discípulo de Newton, que obtuvo esa expresión al estudiar los métodos de interpolación. La aportación de Euler consistió en identificar los coeficientes de los diferenciales de orden superior como las derivadas sucesivas de la función. La fórmula la obtuvo a partir de la de interpolación de Newton, para un número infinitamente grande de pasos, y trabajando con números infinitamente grandes e infinitamente pequeños.

4.1.5 Otros temas tratados por Euler

Con respecto a la integración, Euler siempre la entendió como la operación inversa a la diferenciación (al estilo de Newton, cabría decir.) Únicamente la visualizó como suma al hacer aproximaciones de integrales.

En particular estudió las funciones definidas mediante integrales, y obtuvo las conocidas funciones Γ y B. El origen de estas funciones es tratar de interpolar, al estilo polinómico de Newton, funciones definidas sobre los números naturales (en este caso $n!$), pero con productos infinitos.

Con respecto a las funciones de varias variables, aunque Newton usó $f(x,y)=0$, y alguno de sus seguidores introdujo las *derivadas parciales* (en concreto fueron usadas por *Nicholas Bernouilli* (1687-1759)), el desarrollo de su estudio lo efectuaron Euler, *Clairaut* (1713-1765) y *D'Alembert* (1717-1783) en el siglo XVIII. El mayor trabajo se realizó al estudiar las ecuaciones en derivadas parciales que rigen algunos problemas físicos. Euler llegó a dar, incluso, lo que hoy se conoce con el nombre de *teorema de Schwarz* sobre la igualdad de las derivadas cruzadas.

En relación a la *integración múltiple*, parece claro que, aunque anteriormente se habían utilizado algunas integrales múltiples de tipo geométrico y físico, fue Euler el que tuvo una idea clara sobre el significado de las integrales dobles extendidas a un recinto plano limitado por arcos, y dio el método para calcularlas. Al final del siglo, Lagrange y *Laplace* (1749-1827) introdujeron las integrales múltiples en general y estudiaron el cambio de variable en ellas.

4.2 Problemas con las series

Grandes controversias originó el manejo indiscriminado de las series que se hacía, como ya se ha visto, en los siglos XVII y XVIII. Hay que tener en cuenta que dicho manejo se hacía pensando en las series como polinomios infinitos y, por tanto, era de una manera formal. No eran, pues, completamente conscientes de que, al pasar de un número finito de operaciones a un número infinito, se introducen nuevos problemas. De ahí que, aunque sin ignorar los problemas de convergencia, no les dieran demasiada importancia.

Así, se observa que Newton y Gregory eran conscientes de la necesidad de que convergiesen las series que usaban. En concreto, el primero afirma que las series de potencias convergen para valores pequeños de x y recomienda no utilizar series que en algún punto no converjan.

Leibnitz enuncia el criterio de convergencia de las series alternadas que lleva su nombre. *Mac Laurin* (1698-1746) da el *criterio integral* de convergencia de series. En general imponen como condición que se utilicen sólo en series en las que el término general se vaya haciendo cada vez menor, acercándose a cero.

Euler afirma que las series no convergentes tienen un valor definido: puesto que las series provienen de expresiones finitas, han de valer lo que valgan dichas expresiones en el punto en cuestión. Esto le lleva a afirmar que, por ejemplo, la serie $1, -1, 1, -1, ...$ suma $1/2$, ya que es la serie de potencias de la función $1/(1+x)$ en el punto $x = 1$. Esto provocó grandes discusiones con uno de los hermanos Bernouilli. De hecho, se podía interpretar que todas las expresiones de los números π, e y otros, como sumas o productos infinitos, no eran sino comprobaciones de que sus series funcionaban y convergían, mediante el cálculo expreso de muchas cifras decimales.

También Lagrange tercia en este problema, sobre todo después de verse obligado a trabajar con la *fórmula de Taylor*; recomendando que no se use dicha serie sin haber hecho, previamente, un estudio minucioso del resto.

D'Alembert expresa en la gran *Enciclopédie* sus dudas sobre el uso de series divergentes (aun a pesar de que se obtengan resultados correctos.) Este es un punto crucial en el pensamiento del siglo XVIII: el rigor viene medido por la obtención de resultados correctos, aunque los manejos intermedios no sean absolutamente claros, mientras que D'Alembert introduce una idea de rigor más relacionada con la claridad en los manejos de los objetos que se utilizan.

Resumiendo, durante el siglo XVIII las series se utilizan formalmente, pero asociadas a las funciones de las cuales se obtienen. Los problemas de convergencia no se desprecian, pero quedan relegados a segundo término por razones pragmáticas: se obtienen, pese a no estar del todo claro el proceso, resultados correctos.

4.3 Controversias

Culturalmente, el siglo XVIII es el siglo de la razón. Sin embargo, a la vista de lo expuesto, da la impresión de que el desarrollo del cálculo se haga sin un exceso de rigor. A continuación se va a discutir un poco sobre esta cuestión.

A lo largo de todo el siglo, los matemáticos son conscientes de la falta de base de la ciencia del cálculo que están construyendo e intentan con toda su fuerza rigorizar al máximo los desarrollos y clarificar los problemas.

Así, la escuela inglesa, seguidora de Newton y de sus métodos geométricos, pretende justificar el cálculo por medio de la geometría euclídea, y cree que es posible justificar todas las ideas y desarrollos mediante los métodos de Eudoxio y Arquímedes. De este modo, Taylor llega a justificarlo todo utilizando sólo incrementos finitos, aunque, naturalmente, sólo para funciones algebraicas.

En otro frente, los matemáticos seguidores de Leibnitz centran sus esfuerzos en la clarificación de los diferenciales.

Avanzado el siglo Rolle llega a afirmar: “el cálculo es una colección de ingeniosas falacias”.

Por otra parte, junto a estas tomas de conciencia de hechos reales e intentos clarificadores, se manifiestan también aquellos a los que la nueva ciencia estropea parte de sus supuestos, y toman una postura enconada en su contra, pretendiendo que se olvide. El más famoso de estos polemistas fue el obispo *Berkeley* (1685-1753). Evidentemente el mecanicismo y determinismo que implicaba la descripción de los fenómenos físicos que permitía el cálculo chocaba frontalmente con la postura religiosa oficial de la época: el poder y la confianza en la religión disminuirían si se demostraba que la naturaleza se regía por leyes. Por tanto era preciso atacar y desprestigiar el cálculo y, dado que había por donde hacerlo, a ello se dedicó el mencionado Berkeley. En concreto, se basó en la debilidad de los fundamentos y los matemáticos cayeron en la trampa de argumentar en su contra sin aclarar realmente casi nada. Así lo hicieron, por ejemplo, *Jurin* (1684-1751) y otros discípulos de Newton.

En realidad, los únicos que podían defenderse con garantías eran los seguidores de Leibnitz, que abogaron siempre por un manejo formal, sin entrometer otras consideraciones; obtuvieron así resultados y aplicaciones a la física que eran contrastables experimentalmente.

De cualquier modo, ha de quedar claro que el rigor fue una preocupación constante, y más que el rigor, el intento de fundamentar claramente las bases del cálculo. El problema (como se va a ver en el próximo apartado) estribaba en que era imposible hacerlo sin tener ideas claras sobre el concepto de límite y en carecer de un modelo para los números reales, cuestiones estas que se resolverían en el siguiente siglo.

Chapter 5

El siglo XIX

El siglo XVIII produjo un enorme desarrollo de los métodos iniciados en el XVII. Sin introducir ningún nuevo concepto, aumentaron considerablemente los conocimientos en todas las ramas. Tal como ya se ha mencionado, los matemáticos de finales del siglo XVIII eran conscientes de la falta de rigor en las demostraciones y de la vaguedad con que se explicaban los conceptos. Las demostraciones eran una mezcla de pruebas formales con consideraciones geométricas y físicas sobre los problemas. Así, las demostraciones de muchos resultados no se hallaban hechas en sitio alguno y los enunciados eran meras generalizaciones de experiencias concretas. El rigor se basaba en la comprobación experimental a posteriori de los resultados obtenidos. La búsqueda formal del rigor en dicho siglo se realiza intentando basar los conceptos iniciales del cálculo en la geometría, que era el modelo más riguroso disponible.

Al concluir el siglose tenía claro que había que imponer un cierto orden. A la vez se tenía la convicción de que los métodos usados habían dado de sí todo lo que podían ofrecer, por lo que no se iba a poder avanzar a menos que se introdujeran nuevas ideas fundamentales.

El siglo XIX se caracteriza porque se consiguen estos fines. Pero, además, hay otras muchas cosas. En primer lugar, se critica a la geometría como modelo de rigor; su lugar lo pasa a ocupar la *aritmética* (y es en ésta en la que hay que basar el análisis.) De esta manera, se produce una "aritmetización" de las matemáticas. En segundo lugar, hay una auténtica explosión en todas las ramas de las matemáticas. En concreto, el desarrollo del cálculo da lugar a lo que, hoy en día, se conoce con el nombre de *análisis matemático*.

Por otra parte, esta necesidad de rigorización hace que las matemáticas dejen de ser, en parte, una idealización de la naturaleza; y pasan a ser consideradas como una creación del ser humano. Su objetivo primordial no es ya la descripción de la naturaleza, sino el estudio de los entes matemáticos, que pasan a tener existencia independiente y en pie de igualdad con los demás objetos que conforman la realidad. Dejan, pues, de ser meras creaciones arbitrarias de la mente, para pasar a ser objetos reales que hay que descubrir y estudiar.

Todas estas discusiones se producen a finales del siglo XIX, pero, mientras tanto, se ha puesto orden y se han desarrollado todas las ramas de las matemáticas. En particular, en el cálculo, que es el que interesa aquí, los nombres importantes en esta época son *Cauchy* (1789-1857), *Weierstrass* (1815-1897), *Bolzano* (1781-1848), *Abel* (1802-1828), *Riemann* (1826-1866) y *Dirichlet* (1805-1859). Los más célebres, en relación al cálculo infinitesimal, son los dos primeros, pero la labor de los demás (y de otros muchos no citados) es también grande en este campo.

Se va a analizar este siglo dividiendo su estudio según los temas trabajados, como ya se ha hecho anteriormente.

5.1 Funciones y continuidad

A lo largo del siglo XVIII se entendía por *función continua* toda expresión analítica en la que interviniesen la variable, constantes y las funciones elementales; es decir, *continuidad* significaba "tener la misma expresión formal en todo el dominio". Las discusiones sobre esta definición fueron largas y estaban en parte motivadas por las funciones arbitrarias que intervienen en las soluciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Otro motivo eran los problemas de contorno o de condiciones iniciales para esas ecuaciones. Así, para el problema de la cuerda vibrante, una condición inicial natural es estirar de un punto de la cuerda, lo que da lugar a una solución que se expresa por medio de una función no derivable en un punto y con expresiones diferentes a cada lado de ese punto. Dado que se trata de una condición inicial, eso debía interpretarse como una función, aunque se salía del marco de la anterior definición.

Al final del siglo, objetos como el anterior eran, pues, admitidos dentro de la categoría de "funciones", y eran denominados *funciones discontinuas* o *mecánicas*. Se puede observar que la noción intuitiva que se tenía de continuidad era ya la moderna idea de conexión del grafo de la función ("que se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel".)

El problema se complica cuando *Fourier* (1768-1830) publica su memoria sobre la transmisión del calor, donde se obtienen series trigonométricas (que se suponen convergentes) para funciones mucho más arbitrarias que las entonces admitidas. "Para que existan los *coeficientes de Fourier* basta que $f(x)$, $f(x)$ sin nx y $f(x)$ cos nx tengan área bajo su gráfica" (en palabras del propio Fourier).

Cabe recordar que uno de los problemas pendientes todavía (aunque aún no se era consciente del mismo) era definir lo que se entiende por variable. La cuestión radica en no disponer de un concepto claro sobre el cuerpo de los números reales. Así, por ejemplo, en 1821 Cauchy enunciaba que "una variable es una magnitud que va tomando sucesivamente muchos valores diferentes". En esta definición se observa la presencia de las ideas "temporales" de Newton. Igualmente, Cauchy dice: "dadas varias variables tales que, conocido el valor de una de ellas, se puede obtener el valor de las demás, entonces esas otras se expresan por medio de la primera que se denomina *variable independiente*; mientras que de las demás se dice que son *función de esa variable*". El adelanto en relación al siglo precedente es que ya no se exige ningún tipo de expresión para poder hablar de funciones.

Es Dirichlet, en 1837, el que da una definición como la que se usa hoy día: "la variable y es función de la variable x cuando a cada valor de x en un intervalo le corresponde un valor de y". Todo ello independientemente de que haya expresiones (una o varias) que liguen y con x.

Una vez visto cómo se ha perfilado la idea de función, veamos cómo se llega a la de continuidad.

Es *Bolzano* el que, sorprendentemente, en 1817 escribe: "la función $f(x)$ es continua en un intervalo si, para cada valor de x en ese intervalo, la diferencia f$(x+\omega)-f(x)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando ω suficientemente pequeño". Pero no es sólo esto; salvo una teoría sobre los números reales, Bolzano expuso ya correctamente todas las ideas necesarias para el desarrollo del cálculo. Así, llegó a admitir la existencia de los números *infinitamente grandes* y de los *infinitamente pequeños*, el *axioma del extremo superior* y el hoy llamado *criterio de Cauchy* para la convergencia de una sucesión de números reales.

Sin embargo, el trabajo de Bolzano no circula con la amplitud necesaria entre sus contemporaneos y su influencia no es notoria. El que sí tuvo una influencia decisiva fue el *Curso de Análisis* que Cauchy publicó en 1821. Cauchy ataca y define con precisión el concepto de límite de una función y el de continuidad. Igualmente aclara los *infinitamente pequeños* como las variables con límite cero, y los *infinitamente grandes* como las variables cuyo valor crece indefinidamente ("más allá de toda cota") y converge a ∞. Su definición de continuidad es la siguiente: "$f(x)$ es continua en un punto x si un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal de la función"; esto es,

$$f \text{ es continua en } a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

A pesar de su habitual precisión, Cauchy también dice, de manera imprecisa, que "si una función de varias variables es continua en cada una de ellas, entonces dicha función es continua", cosa que sabemos que no es cierta.

Con estas definiciones Cauchy estudió las propiedades de las funciones continuas y muchos matemáticos siguieron, después, sus pasos. La noción de continuidad quedaba definitivamente aclarada y separada de la de los valores intermedios (*Darboux* (1842-1917) dio un ejemplo de función que toma todos los valores entre dos de ellos pero sin ser continua.)

Weierstrass fue el que eliminó del lenguaje del análisis toda relación con el movimiento. Frases como "una variable se acerca a un límite", que recuerdan las ideas temporales de Newton, fueron transformadas en desigualdades, intentando aritmetizar todo lo posible. De él es la definición de continuidad que hoy se llama "del $\epsilon - \delta$". También probó la existencia de *máximo* y *mínimo* para una función continua definida en un intervalo cerrado, que había sido usado por Cauchy sin demostración. Igualmente probó el llamado *teorema de Bolzano-Weierstrass* sobre el punto de acumulación, utilizando, para ello, el método de Bolzano de dividir el intervalo en dos partes y dar una regla para elegir una de ellas.

Los seguidores de estas ideas, *Heine* (1821-1881), *Borel* (1871-1956) y otros, obtuvieron, asimismo, la primera noción de *compacidad por recubrimientos* para un intervalo cerrado.

5.2 Derivación

Otra vez Bolzano fue el primero en definir:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

indicando que $f'(x)$ no es un cociente de ceros ni la razón entre dos "cantidades evanescentes", sino un número hacia el que se va aproximando ese cociente. Esto no era sino precisar las ideas de Newton, ya refinadas en el siglo XVIII, entre otros por D'Alembert, que fue el que más se acercó a esa definición. Sin embargo, tampoco este trabajo de Bolzano tuvo difusión.

Más tarde, Cauchy vuelve a tomar como buena esta definición y la desarrolla con plenitud. En primer lugar quita problemas a los diferenciales de Leibnitz: $\mathrm{d}x$ es una cantidad cualquiera y $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$. Esto es, la diferencial es la función lineal que aproxima a la función dada en el punto considerado. Cauchy distinguió claramente entre $\mathrm{d}y$ y Δy, entendiendo este último como la variación de los valores de la función. Para aclararlo obtuvo el *teorema del valor medio* y el que hoy se denomina *teorema de Cauchy*, que generaliza el anterior (y que, realmente, lo precedió.) Como consecuencias, obtuvo la *regla de l'Hôpital* y las condiciones de *extremo relativo*.

Igualmente obtuvo la *fórmula de Taylor* con la expresión del resto que lleva su nombre (la manera de obtenerlo es la que hoy se usa normalmente.) Empleó, además, dicha expresión para estudiar la convergencia de las series de Taylor de las funciones elementales.

Hay que señalar que, para demostrar el *teorema del valor medio*, "probó" previamente, de una forma intuitiva pero muy natural (igual que hoy se hace en los cursos de bachillerato, utilizando la compacidad de un intervalo cerrado y acotado, pero sin "saberlo"), que si una función tiene derivada positiva en un intervalo, entonces es creciente.

A pesar de todo esto, Cauchy creía que una función continua era diferenciable salvo, quizás, en puntos aislados, y con él, los libros de la época están llenos de "demostraciones" de este hecho. Sin embargo, Bolzano tenía clara la diferencia y dio, en 1834, una función continua con derivada no acotada en todos los puntos (tampoco este trabajo fue conocido.)

Hubo muchos intentos de probar que continuidad implica derivabilidad, y búsqueda de contraejemplos. Entre otros, Riemann, en 1854, y Weierstrass, en 1874, dieron ejemplos concretos de funciones continuas en todos los puntos y no derivables en ninguno.

5.3 Integración

Durante los siglos XVII y XVIII no había una teoría de la integral, ni una definición de tal concepto, ni una caracterización de las funciones integrables. Las ideas usadas eran las de Newton, como operación inversa de la derivación, mientras que las de Leibnitz no se utilizaban. Todo eran conceptos vagos, pero resultados que podrían ser calificados de maravillosos. La necesidad de construir una teoría al respecto aparece nuevamente en el trabajo de Fourier.

Cauchy es el primero en elaborarla, en 1823, y lo hace para funciones continuas: "sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $P = \{a = x < x_1 < ... < x_n = b\}$ una partición del intervalo, entonces"

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

(aunque la notación no era exactamente ésta.) El problema estaba en demostrar que ese límite existe cuando $n \to \infty$, que quiere decir cuando la distancia entre los puntos de la partición tiende a cero. Para probarlo Cauchy utiliza el que f sea *uniformemente continua* en $[a, b]$ (noción, para él, idéntica a la de continuidad).

Esto le lleva a estudiar la función

$$x \mapsto F(x) := \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

de la que prueba que es continua y derivable y que $F' = f$, y de ahí el *teorema fundamental del cálculo* (*teorema de Barrow*.)

También estudia las *integrales impropias de segunda especie*. Igualmente extiende su noción de integrabilidad a funciones continuas a trozos. Con esto se definen, además, las ideas geométricas para las que se requiere la integral: cálculo de áreas planas, longitudes de curvas, volúmenes, etc; restringidas, desde luego, al caso en que el integrando sea una función continua.

En 1854 es Riemann quien, en su trabajo sobre las series trigonométricas, se pregunta por las condiciones para que una función sea integrable. Su pregunta exactamente es la siguiente: "¿qué ha de entenderse por $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$?" Para responderla construye la *suma de Riemann*:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, en las mismas condiciones de Cauchy, pero para una función cualquiera. La primera condición de integrabilidad que da entonces, es: "las sumas se acercan a un límite cuando el diámetro de la partición tiende a cero, si la suma de los intervalos en los que la oscilación de f es mayor que un número prefijado λ se acerca a cero cuando lo hace el diámetro". Esto le permite cambiar las funciones continuas por funciones con discontinuidades aisladas e, incluso, por otras más generales. Da, asimismo, un ejemplo de función integrable que tiene infinitas discontinuidades en cualquier intervalo, por pequeño que sea.

También enuncia otra condición de integrabilidad. Para ello define las *sumas superior* e *inferior* de f en una partición, aunque él sólo usa su diferencia. Así, afirma que "una función es integrable si, y sólo si, dicha diferencia tiende a cero cuando el diámetro de la partición tiende a cero". La demostración la hace Darboux en 1875, quien prueba, además, que el *teorema fundamental del cálculo* vale para todas esas nuevas funciones.

Es también Darboux el que prueba, en 1875, que una función acotada es integrable si, y sólo si, los puntos de discontinuidad se pueden recubrir por un número finito de intervalos de longitud tan pequeña como se quiera (es decir, si forman un *conjunto de medida nula*.)

Riemann no se atreve a asegurar que toda función continua sea integrable. Para ello le falta la completitud de los números reales, que permite demostrar que toda función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua en él (resultado que no se tuvo hasta 1870.)

Enseguida se trabajó con las *integrales impropias* y se extendio la *integral de Riemann* a funciones no acotadas y a funciones de dos variables. Con ello concluía el problema de la integración.

Sin embargo, el origen de la integración fue hallar áreas. Ahora se disponía del concepto de integral y había que unirlo con el de área. De nuevo el comienzo es el mismo: hay que preguntarse qué es el área. La primera formulación de esta noción es de *Peano* (1858-1932) y la dio en 1887. Definió el *área interior* y *exterior* de un conjunto del plano como lo que hoy se llama *contenido de Jordan*, y probó la relación entre las *integrales superior* e *inferior* de una función con el área del recinto plano limitado por la gráfica de una función positiva y el eje de abscisas, en el intervalo de definición de la función.

En 1893, *Jordan* (1838-1922) extendió la *integral de Riemann* a funciones de varias variables, definiendo el *contenido de Jordan* de paralelepípedos en $\mathbb{R}^n$. El siguiente paso adelante lo da *Lebesgue* (1875-1941), ya en el siglo XX, pero no se va a hablar aquí de ello.

5.4 Convergencia

El uso indiscriminado de las series durante el siglo XVIII produjo contradicciones y discusiones. Al comenzar el siglo XIX, en 1810, Fourier, *Gauss* (1777-1855) y Bolzano empezaron a aclarar el problema de la convergencia y a criticar la vaguedad de las razones previas sobre el uso de las series no convergentes.

La primera definición de convergencia la dio Fourier en su memoria sobre el calor: “una serie converge si, cuando n aumenta, la suma de n términos se acerca a un número y llega a diferir de él una cantidad que es menor que cualquier magnitud”. Reconoció, además, la necesidad de que el término general de la serie tienda a cero para que la serie converja. A pesar de ello, no tuvo demasiados problemas para manejar series no convergentes y mantuvo que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1/2$.

Gauss aclaró el problema, y en su memoria de 1812 sobre las series, estudió la *serie hipergeométrica*. Este es el primer estudio serio y completo sobre las condiciones en que converge una serie concreta de funciones que depende, además, de tres parámetros.

Bolzano, en 1817, dio la condición que hoy recibe el nombre de *condición de Cauchy*. Además da la impresión de que tenía unas ideas absolutamente claras sobre la convergencia.

De nuevo es el trabajo de Cauchy el primer estudio organizado sobre series. Acerca de las series numéricas, dio la buena definición de convergencia y probó la necesidad del criterio que hoy lleva su nombre. La suficiencia era inaccesible debido al desconocimiento de las propiedades de los números reales. También dio criterios para estudiar la convergencia de *series de términos no negativos*: el que lleva su nombre (*criterio de la raíz*), el *de D'Alembert* o *del cociente* y los *de comparación*. Igualmente definió *convergencia absoluta* y vio que implicaba la convergencia. También dedujo el *criterio de Leibnitz* para *series alternadas*.

Estudió, además, las series de funciones y aplicó los criterios para hallar intervalos de convergencia. Obtuvo la *fórmula de Taylor* con una expresión para el resto, y estudió la convergencia de dicha serie analizando el resto. Dio ejemplos de funciones no analíticas, contradiciendo así las ideas de Lagrange. Sin embargo, no supo distinguir entre *convergencia puntual* y *uniforme*, y supuso ésta para asegurar que se conserva la continuidad al pasar al límite en una serie de funciones y que se puede integrar término a término y sumar.

Abel se dio cuenta, en 1826, de la necesidad de un concepto de convergencia más fuerte que la convergencia puntual, a fin de que se conserve la continuidad, y *Stokes* (1819-1903) dio la definición correcta de convergencia uniforme en 1848. En escritos posteriores, Cauchy reconoció la necesidad de la convergencia uniforme para esos resultados.

El estudio completo más preciso lo realizó Weierstrass, quien tenía clara la idea de convergencia uniforme y su necesidad para explicar las mencionadas propiedades, así como los problemas sobre diferenciación de series de funciones. También probó que toda función continua en un intervalo cerrado se puede aproximar por una serie uniformemente convergente de polinomios.

Finalmente, Dirichlet y Riemann estudiaron los problemas de reordenación de series.

5.5 Los números reales

Desde nuestro actual punto de vista, un tanto acostumbrado al método formal, parece inexplicable que los *números reales*, la base del cálculo, fueran el último punto que se aclarara en los problemas del cálculo infinitesimal. Aparte de su dificultad, está el hecho de que la idea de magnitud parece la más natural y es difícil darse cuenta de la necesidad de aclararla por completo. Influyó, además, otro problema de la época: el interés por aritmetizar las matemáticas se basaba en que el *número* era un dato, una idea a priori, y de ahí que no se tuviera conciencia de la necesidad de aclararlo.

Así, las propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado de la recta quedaban demostradas sólo en parte al no disponer de una teoría sobre los números reales. Igualmente la *condición de Cauchy* para la convergencia de sucesiones y series de números quedaba incompleta, y lo mismo ocurría con las construcciones de la integral. La gota que colmó el vaso fueron las funciones continuas no diferenciables. Todo ello exigió una aclaración del sistema de los números reales.

Hubo varias construcciones distintas. Las más utilizadas son las de *Cantor* (1845-1918) y *Dedekind* (1831-1916.) Ambas tenían como punto de partida el conjunto $\mathbb{Q}$ de los *números racionales*, y en ellas el conjunto de los números reales deja de ser una idea a priori para ser construido a partir de otros conceptos.

El problema era el de los *números irracionales*. Durante el siglo XVIII se habían utilizado sin problemas y se suponía que para ellos eran válidas las mismas propiedades y operaciones que para los racionales. Se decía de ellos que se aproximaban por racionales y eso bastaba. Después se precisó que eran "límite de números racionales". Cantor aclaró que primero había que construirlos y después ver si eran límite de algo. Weierstrass, en 1859, habló claramente de la necesidad de hacer una teoría sobre estos números.

El origen de la construcción de Dedekind es la idea de continuidad de la recta, ligada a la teoría de las *magnitudes* de Eudoxo. Observó que la continuidad consistía en que partir la recta en dos, de forma que una parte quede a un lado de la otra, sólo es posible hacerlo tomando un punto de la recta (esto era un axioma geométrico en su tiempo.) Por otra parte observó que eso no ocurría con los números racionales. De la teoría de Eudoxo dedujo que la relación entre dos magnitudes inconmensurables divide a los racionales en dos clases con esa propiedad. De aquí obtuvo la idea de *cortadura* y denominó *número real* a una cortadura del conjunto $\mathbb{Q}$. Definió la suma, el producto y el orden sin demasiadas dificultades y probó que, haciendo cortaduras en los reales, no se obtenían nuevos números. Seguidamente demostró que toda sucesión *monótona creciente* y acotada tiene límite. Eso era suficiente para dejar bien aclarados los problemas de su tiempo.

Dedekind tuvo algunos problemas y controversias sobre su método y a él mismo le costaba aclarar si un número real era lo mismo que una cortadura o era algo más. Su problema era que no intentaba dar una teoría de los números reales, sino construir los irracionales.

Cantor criticó la construcción de Dedekind por considerar que las cortaduras no aparecen de manera natural en el análisis y construyó, simultáneamente, los números reales utilizando la idea de que un número irracional es el límite de una sucesión de racionales. Así, tomó las *sucesiones de Cauchy* de números racionales y llamó *número real* a su límite; identificando dos sucesiones si su diferencia tiende a cero. Fácilmente comprobó que estos números formaban un *cuerpo ordenado* que contiene a los racionales y demostró que es *completo* (esto es, que las sucesiones de números reales no dan nuevos números.)

Puede observarse que en ambas construcciones es necesario un número infinito de números racionales para determinar un irracional. Esto provocaba auténticos problemas en su tiempo, por lo que no fueron aceptadas de una manera general ninguna de ambas.

Mucho antes, en 1696, Wallis había identificado los números racionales con los *decimales periódicos*. *Stolz* probó, en 1886, que todo irracional se puede representar como un número decimal *no periódico*. Esto provocó otra forma de ver el problema: los números reales son los números decimales.

Una vez construidos los números reales, quedaba por ver cómo se podía pasar de las ideas a priori, esto es, los números naturales, a los racionales. *Peano* (1858-1932) dio, en 1889, los axiomas de los números naturales y definió sus propiedades. Weierstrass había pasado, en 1854, de los naturales a los racionales, tal como se hace hoy. Los reales se construyeron en 1872.

Un comentario final: una vez construido el cuerpo $\mathbb{R}$, fue *Hilbert* (1862-1943) el que afirmó que para trabajar era más cómodo dar sus propiedades de forma axiomática (puesto que ya se sabía construir) que seguir el camino que lleva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Así, dio un sistema de axiomas, en 1899, divididos en cuatro grupos:

1. *Axiomas de conexión*,
2. *Axiomas de cálculo*,
3. *Axiomas de orden*,
4. *Axiomas de continuidad*.

Aclaró que no eran un sistema independiente y que era preciso probar su consistencia (con lo cual, desde el punto de vista matemático, el objeto existe.) De cualquier modo, el punto de vista axiomático tampoco fue generalmente aceptado, ya que muchos prefirieron el punto de vista constructivo.

Bibliography

[1] A.D. Alexsandrov et al. *La matemática: su contenido, método y significado.* Alianza Ed., Madrid, 1976.

[2] R. Courant, R. Robbins *¿Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid, 1967.

[3] M. Kline *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford Univ. Press, Nueva York, 1972.

[4] W.M. Priestley *Calculus: an historical approach*, Springer-Verlag, Nueva York, 1979.

[5] D.J. Struik, *A concise history of mathematics.* Dover Pub. Inc., Nueva York, 1967.