MODUL LIMIT SUATU FUNGSI (Kelas XI IPA)

Oleh Drs. Victor Hery Purwanta

I. Standar Kompetensi :

Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam pemecahan masalah.

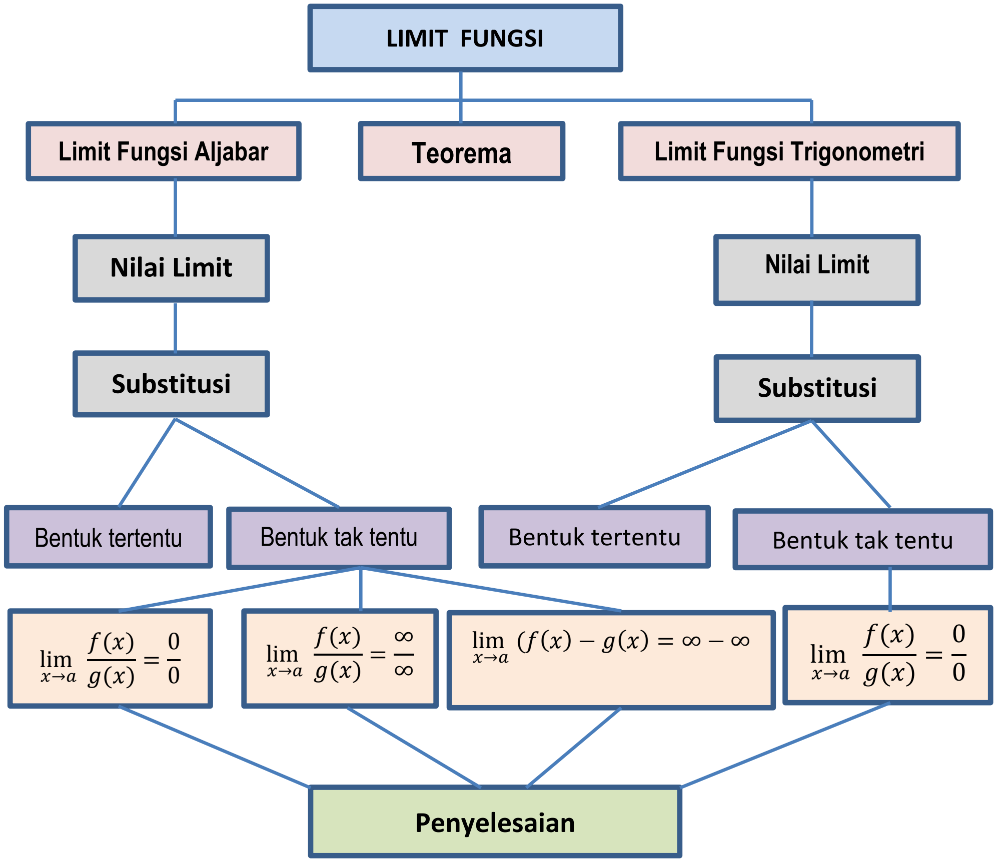
II. Kompetensi Dasar :

Menjelaskan secara intuitif arti limit fungsi di suatu titik dan di tak hingga dan menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

III. Tujuan Pembelajaran :

1. Menjelaskan arti limit fungsi di suatu titik.
2. Menghitung limit fungsi aljabar di suatu titik.
3. Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.
4. Menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi.
5. Menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar.
6. Membedakan cara menentukan limit fungsi aljabar dengan cerdas.
7. Menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.
8. Mampu bekerjasama dalam kelompok belajar dan peduli kepada teman belajar yang memerlukan bantuan dalam menyelesaikan soal limit.
9. Menghitung limit fungsi trigonometri.
10. Gigih dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.

IV. Peta Konsep



V. Materi Pembelajaran

1. Pengertian Limit

Perhatikan kalimat-kalimat berikut ini :

a. “Kesabaran saya hampir mendekati batas”
b. “Limit kartu kredit anda adalah sebesar sepuluh juta rupiah”

Selain kedua kalimat tersebut tentunya masih banyak lagi kalimat lain yang menggunakan kata hampir atau limit. Kata-kata hampir atau limit memiliki arti menuju atau mendekati dan berhubungan dengan limit yang akan kita bahas. Limit yang akan kita pelajari adalah limit dari suatu fungsi dan dibatasi hanya untuk limit fungsi aljabar dan limit fungsi trigonometri.

Banyak bidang yang secara langsung atau tidak langsung menggunakan konsep limit fungsi. Misalkan dalam bidang ekonomi, seorang pedagang melakukan kebijakan diskriminasi harga dalam penjualan rambutan, yang dapat dituliskan dalam bentuk fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} 10.000x, & untuk\ 1 \leq x < 2 \\ 15.000x, & untuk\ 2 \leq x < 3 \\ 20.000x, & untuk\ 3 \leq x < 4 \\ 25.000x, & untuk\quad x \geq 4 \end{cases}$$

dengan x adalah banyak rambutan per ikat dan f(x) adalah total harga pembelian. Maka berapa harga termurah bila ingin membeli 6 ikat rambutan?
Dengan kebijakan harga semacam ini, penjual dapat merangsang pembeli untuk membeli lebih banyak.
Contoh lain : Cobalah kamu mengambil kembang gula-kembang gula dalam sebuah tempat dengan genggaman sebanyak lima kali. Setelah dihitung, pengambilan pertama terdapat 5 bungkus, pengambilan ke dua 6 bungkus, pengambilan ke tiga 5 bungkus, pengambilan ke empat 7 bungkus, dan pengambilan kelima 6 bungkus. Jika diratarata pada pengambilan pertama, ke dua, sampai ke lima adalah 29/5 = 5,8 dan dikatakan hampir mendekati 6. Dalam contoh sehari-hari, banyak sekali kamu temukan kata-kata hampir, mendekati, harga batas, dan sebagainya.Pengertian tersebut sering dianalogikan dengan pengertian limit. Limit merupakan konsep dasar atau pengantar dari deferensial dan integral pada kalkulus. Untuk lebih jelasnya, dalam bab ini kamu akan mempelajari konsep limit fungsi dalam pemecahan masalah.

2. Limit Fungsi Aljabar

A. Pengertian Limit Fungsi Melalui Perhitungan Nilai-Nilai Fungsi

Limit fungsi memiliki pengertian tentang nilai fungsi yang diperoleh melalui pendekatan terhadap suatu titik atau batas.
Perhatikanlah fungsi f yang dinyatakan dengan f$(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
Untuk $x \neq 1$ fungsi tersebut dapat disederhanakan menjadi f$(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1$, Sedangkan untuk $x = 1$ bila disubstitusikan ke fungsi f$(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ akan memberikan nilai f(1) $= \frac{0}{0}$ (tidak tentu). Selanjutnya jika nilai x mendekati 1 apakah nilai f(x) mendekati bilangan tertentu?
Perhatikan tabel berikut yang menunjukkan nilai f(x), bila x = 1 didekati dari kiri dan kanan

x	0,5	0,9	0,99	0,999	→ 1	1	1 ←	1,001	1,01	1,1	1,5
f(x)	1,5	1,9	1,99	1,999	→ 2	.?.	2 ←	2,001	2,01	2,1	2,5

Tabel di atas menunjukkan nilai f(x) untuk x mendekati 1 dari kiri ditulis $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Tanda " – " pada 1^- dimaksudkan bahwa nilai x ketika mendekati 1 dari arah kiri. Maka bentuk umum limit kiri suatu fungsi f(x) untuk x mendekati a ditulis $\lim\limits_{x \to a^-} \mathrm{f}(x)$.

Sedangkan untuk nilai f(x) untuk x mendekati 2 dari kanan ditulis $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Tanda + pada 1^+ dimaksudkan bahwa nilai x ketika mendekati 2 dari arah kanan. Maka bentuk umum dari limit kanan suatu fungsi f(x) untuk x mendekati a dapat ditulis $\lim\limits_{x \to a^+} \mathrm{f}(x)$

Ternyata limit kiri dan limit kanan mendekati nilai yang sama yaitu 2. Maka dapat ditulis sebagai :

$$\lim_{x \to 1} \mathrm{f}(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Contoh 1.

Diketahui fungsi f(x) dirumuskan dengan :

f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & untuk\ x < 2 \\ 2x - 1 & untuk\ x \geq 2 \end{cases}$ Hitung nilai $\lim\limits_{x \to 2} \mathrm{f}(x)$ dengan cara menghitung nilai-nilai fungsi disekitar $x = 2$

Jawab :

x	1,5	1,9	1,99	1,999	→ 2	2←	2,0001	2,001	2,01	2,1	2,5
f(x)	0,5	0,9	0,99	0,999	→ 1	3←	3,0002	3,002	3,02	3,2	3,5

Dari tabel didapat :

Limit kirinya $\lim\limits_{x \to 2^-} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$ dan Limit kanannya $\lim\limits_{x \to 2^+} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 1) = 3$

Dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x \to 2^-} \mathrm{f}(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} \mathrm{f}(x)$ maka $\lim\limits_{x \to 2} \mathrm{f}(x)\ tidak\ terdefinisi.$

Definisi Limit fungsi :

Jika $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{f}(x) = L$ berarti jika x mendekati a dari kiri dan kanan sehingga nilai f(x) mendekati L dari kedua arah, maka nilai f(x) mendekati L.

Jadi $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{f}(x) = L$ Jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to a^-} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x \to a^+} \mathrm{f}(x)$

Soal Latihan 1.

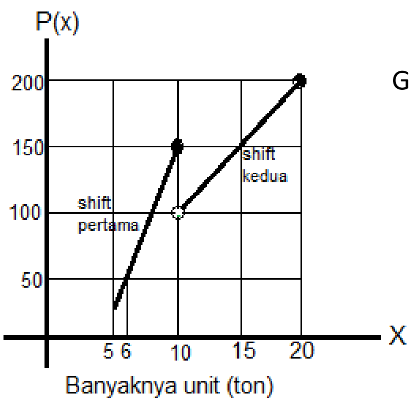
1. Tentukan limit fungsi f(x) berikut ini dengan cara menghitung nilai-nilai fungsi disekitar titik yang didekati.
   a. f(x) = $x^2 - 2x + 3$, jika x mendekati 0
   b. f$(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1}$, jika x mendekati 1
   c. f$(x) = \frac{2}{x-1}$, jika x mendekati 1
   d. f$(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$, jika x mendekati 1

2. Diketahui f(x) = $\begin{cases} 2x-3 \; untuk \; x \le 3 \\ x+1 \quad untuk \; x > 3 \end{cases}$ Hitunglah limit berikut ini dengan menghitung nilai-nilai fungi disekitar titik yang didekati.
   a. $\lim\limits_{x\to 3} \text{f}(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \text{f}(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 5} \text{f}(x)$

3. Diketahui f(x) = $\begin{cases} x^2-4x \;\; untuk \; x \le 0 \\ x^2+2x \;\; untuk \; x > 0 \end{cases}$ Hitunglah $\lim\limits_{x\to 0} \text{f}(x)$.

4. Misalkan keuntungan (dalam juta rupiah) yang diterima dari penjualan x ton suatu produk diberikan dalam suatu fungsi :
   f(x) = $\begin{cases} 4x^2-18 \;\; untuk \; 0 \le x < 3 \\ \quad 4x \qquad\quad untuk \; x \ge 3 \end{cases}$ Tentukan nilai : a. $\lim\limits_{x\to 1} \text{f}(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 3} \text{f}(x)$

5. Grafik berikut ini menunjukkan besar keuntungan dari produksi harian x ton produk industri kimia dari suatu perusahaan.



Gunakan grafik tersebut untuk menentukan :

a. $\lim\limits_{x\to 6} \text{P}(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 10} \text{P}(x)$

c. $\lim\limits_{x\to 15} \text{P}(x)$

B. Cara Menyelesaikan Limit Fungsi ALjabar

Nilai limit fungsi f(x) untuk x mendekati a yang ditentukan dengan perhitungan nilai-nilai fungsi disekitar nilai yang didekati lebih bersifat **intuitif**, **lamban** dan **kurang efisien**. Oleh karena itu, perhitungan limit fungsi aljabar dikerjakan dengan menggunakan perhitungan aljabar biasa.

Penyelesaian Limit fungsi aljabar berbentuk $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \text{f}(x)}$

B.1. Metode Substitusi Langsung.

Contoh 2.

Hitunglah nilai limit fungsi : i. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-2x-4)$ ii. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{7x+2}$

Jawab :

i. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-2x-4) = 2^2-2.2-4 = 4-4-4 = -4$

ii. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{7x+2} = \sqrt{7.1+2} = \sqrt{9} = 3$

B.2. Metode Pemfaktoran.

Contoh 3.

Hitunglah nilai limit fungsi : i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

Jawab :

Bentuk seperti di atas tidak bisa dikerjakan dengan substitusi langsung misalnya

i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ (tidak tentu) ii. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{2^2-3.2+2}{2-2} = \frac{0}{0}$ (tidak tentu)

Catatan :

> **Bentuk $\frac{0}{0}$ adalah bentuk tidak tentu (tidak terdefinisi dalam bilangan real).**
> **Sehingga $\frac{0}{0}$ bukan jawaban dari suatu limit fungsi.**

Oleh karena itu diperlukan cara lain yaitu dengan pemfaktoran untuk mencari faktor persekutuan antara bagian pembilang dan bagian penyebut sehingga bentuk fungsi tersebut dapat disederhanakan.

i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$

ii. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x-1) = 2-1 = 1$

B.3. Metode Perkalian dengan Sekawan.

Metode ini dipakai bila fungsi yang dicari nilai limitnya memuat bentuk akar.

Contoh 4.

Hitunglah nilai limit fungsi : i. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$ ii. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x}$

Jawab :

i. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)} =$
$\lim\limits_{x\to 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) = (2+2)(\sqrt{2+2)}+2) = 4.(2+2) = 4.4 = 16$

ii. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x} \times \frac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(9+x)-(9-x)}{x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} =$
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} = \frac{2}{\sqrt{9+0}+\sqrt{9-0}} = \frac{1}{3}$

Catatan bentuk sekawan :

1. $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ bentuk sekawannya $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$
   sehingga $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = a-b$
2. $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$ bentuk sekawannya $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$
   sehingga $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right) = a-b$
3. $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$ bentuk sekawannya $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$
   sehingga $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right) = a+b$

Soal Latihan 2.

1. Hitunglah nilai setiap limit fungsi berikut ini :

a. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x+3)$ c. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right)$ e. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x}+1\right)$ d. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{x^4-16}{x^2-4}\right)$ f. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2-2x+1}\right)$

2. Hitunglah nilai setiap limit fungsi berikut ini :

a. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-4x}{x-2}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x^3+8}{x^2+3x+2}\right)$ c. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^3-8x-3}{x^2+2x-15}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)$ e. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}\right)$ f. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-x-1}{3x^3-2x-1}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-9}\right)$ h. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}{x-3}\right)$ i. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2+3x-10}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{x^2+(3-a)x-3a}{x-a}\right)$ k. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x}\right)$ l. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}-x-1}\right)$

m. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}\right)$ n. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^4-16}{x^3+2x^2-5x-6}\right)$ o. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}\right)$

3. Hitunglah nilai setiap limit fungsi berikut ini :

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}\right)$ g. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{3x^2+8x-3}-\sqrt{4x^2+9}}{x-2}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{2}-2\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\right)$ h. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{6-x}{x^2-2}-\frac{1}{x-2}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\right)$ i. $\lim\limits_{x\to b}\left(\frac{x\sqrt{x}-b\sqrt{b}}{\sqrt{x}-\sqrt{b}}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-8}{x-2}+\frac{x^2-2x}{2x-4}\right)$ j. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}\right)$ k. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+\sqrt{x}}-\sqrt{4-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x^2-4}-\frac{3}{x^2+2x-8}\right)$ l. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\right)$

4. Untuk fungsi-fungsi berikut ini, hitunglah nilai dari $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

a. $f(x) = 4x - 5$ e. $f(x) = 4\sqrt{2x}$ h. $f(x) = \frac{2x-3}{4x+1}$

b. $f(x) = x^2-2x-3$ f. $f(x) = \frac{2}{3x-4}$ i. $f(x) = x^3+2x$

c. $f(x) = \sin 2x$ g. $f(x) = \cos 4x$

5. Untuk fungsi-fungsi berikut ini, hitunglah nilai dari $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)$

a. $f(x) = 2x+1$ c. $f(x) = 2\sqrt{5x}$ e. $f(x) = \frac{3x-2}{5x+4}$ g. $f(x) = \sin 3x$

b. $f(x) = x^2+2x-8$ d. $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ f. $f(x) = x^3-4x$ h. $f(x) = \cos 5x$

6. Diketahui fungsi $f(x) = x^2$. Hitunglah limit berikut ini :

a. $\lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{f(a)}{a}\right)$ c. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)$ e. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}\right)$

b. $\lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{f(a)}{a^2}\right)$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{f(x+1)-f(1)}\right)$ f. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}\right)$

7. Gradien garis singgung kurva y = $\sqrt{x}$ di titik $x = 1$ dinyatakan dengan m = $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\right)$.
   Tentukan nilai m.

8. Jika gradien garis singgung kurva y = f(x) di titik x adalah m = $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$.
   Untuk m = 2 dan f(x) $= x^2 + 4x + 3$. Tentukan nilai x.

9. Sebuah benda jatuh bebas dari suatu ketinggian. Jarak benda tersebut terhadap posisi semula dirumuskan sebagai fungsi waktu t yaitu $s(t) = 4t^2$ dan iika kecepatan pada saat t = 2 detik, dirumuskan dengan v = $\lim_{h\to 0}\left(\frac{s(2+h)-s(2)}{h}\right)$.
   Tentukanlah nilai v. (satuan jarak = meter, satuan kecepatan = meter/detik)

10. Sebuah mobil bergerak pada suatu lintasan yang lurus. Jarak lintasannya (kilometer) sesuai dengan fungsi $f(t) = 5t^2 + 10t + 8$. Kecepatan mobil tersebut pada saat t = 3 jam adalah $v = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$. Tentukanlah nilai v.

11. Diketahui fungsi f(x) = $\frac{1}{x-2}$ dengan daerah asal $D_f = \{\, x \mid x \neq 2,\ x \in \mathcal{R} \,\}$. Hitunglah:
    a. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ b. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ c. $\lim_{x\to 2} f(x)$

12. Diketahui fungsi f(x) = $\frac{1}{(x-2)^2}$ dengan Domain $D_f = \{\, x \mid x \neq 2,\ x \in \mathcal{R} \,\}$ Hitunglah:
    a. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ b. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ c. $\lim_{x\to 2} f(x)$

B.4. Limit Fungsi di Tak Hingga

Limit fungsi aljabar jika x mendekati tak hingga, dapat diselesaikan dengan cara-cara tertentu yaitu :

i. Limit rasional pecahan yang berbentuk $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$
ii. Limit fungsi irrasional yang berbentuk $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)$

Contoh 5.

Hitunglah nilai limit fungsi berikut ini :

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10x-3}{2x+5}\right)$ b. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-5x+4}{3x^2-x-2}\right)$ c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4-5x^2-1}{2x^5+4x-5}\right)$ d. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^4-2x-1}{2x^3-4x-5}\right)$

Jawab :

Petunjuk faktorkanlah pangkat tertinggi dari x (bagilah pembilang dan penyebut dengan x dengan pangkat tertinggi).

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10x-3}{2x+5}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(10-\frac{3}{x}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(10-\frac{3}{x}\right)}{\left(2+\frac{5}{x}\right)}\right) = \frac{10-0}{2-0} = \frac{10}{2} = 5$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-5x+4}{3x^2-x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\left(6-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(6-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{6-0+0}{3-0-0}=\frac{6}{3}=2$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4-5x^2-1}{2x^5+4x-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2+\frac{4}{x^4}-\frac{5}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)}{\left(2+\frac{4}{x^4}-\frac{5}{x^5}\right)}=\frac{0-0-0}{2+0-0}=\frac{0}{2}=0$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^4-2x-1}{2x^3-4x-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(4-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3-x^4}\frac{5}{}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3-x^4}\frac{5}{}\right)}=\frac{4-0-0}{0-0-0}=\frac{4}{0}=\infty$

Berdasarkan perhitungan pada Contoh 6, nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ dapat ditetapkan sebagai berikut :

1. Jika derajat f(x) dan g(x) sama, maka $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{koefisien\ pangkat\ tertinggi\ dari\ f(x)}{koefisien\ pangkat\ tertinggi\ dari\ g(x)}$
2. Jika derajat f(x) lebih tinggi dari derajat g(x) maka $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$
3. Jika derajat f(x) lebih rendah dari derajat g(x) maka $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

Contoh 6.

Hitunglah limit fungsi berikut ini :

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4}\right)$

b. b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2+3x-4}\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x-5}-2x+1\right)$

Jawab :

Gunakan perkalian sekawan!!!

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4}\right)\times\left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+2)-(x-4)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}}\right)=$
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}}\right)=\frac{6}{\infty}=0$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+5)-(x+1)}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+1}}\right)=$
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\left(\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)=$
$\frac{1+0}{\sqrt{0+0}+\sqrt{0+0}}=\frac{1}{0}=\infty$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2+3x-4}\right)\times\left(\frac{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2+3x-4}}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2+3x-4}}\right)=$
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-x+2)-(x^2+3x-4)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2+3x-4}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x+6}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2+3x-4}}\right)=$
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}}\right)=\frac{-4+0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0-0}}=\frac{-4}{2}=-2$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x-5}-2x+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x-5}-\sqrt{4x^2-4x+1}\right)$
$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(4x^2+2x-5)-(4x^2-4x+1)}{\sqrt{4x^2+2x-5}+\sqrt{4x^2-4x+1}}\right)$
$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-6}{\sqrt{4x^2+2x-5}+\sqrt{4x^2-4x+1}}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6-\frac{6}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)=\frac{6-0}{\sqrt{4+0-0}+\sqrt{4-0+0}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Soal Latihan 3

1. Hitunglah nilai limit-limit fungsi berikut ini.

a. $\lim_{x\to\infty}(3x-6)$

b. $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x+3)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-1}{2x+3}\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\frac{(1-4x)^2}{\sqrt{4x^4+3x^2-1}}$

e. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{x^2-x-6}\right)$

f. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4x-5}{4x^2-x-3}\right)$

g. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(4x+3)^2}{(2x-1)^2}\right)$

h. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4+\sqrt{4x^2-3x+5}}{4x-5}$

i. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10x^4+2x^3-1}{2+3x^2-5x^4}\right)$

j. $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^3}{(4x+1)(x^2-2x-3)}$

k. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}+2x-3}{2\sqrt{x^3}-3x-4}\right)$

l. $\lim_{x\to\infty}\frac{(4x-3)(2x-1)^3(2x+3)^2}{(1-3x^2)^2(1-3x-x^2)}$

2. Hitunglah nilai limit-limit fungsi berikut ini.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x-1}-(x+1)\right)$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x+1}-(x+2)\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x+3}-(x+1)\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-3}{x+1}-(2x+1)\right)$

e. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-3}{x-1}-(2x+1)\right)$

3. Hitunglah nilai limit-limit fungsi berikut ini.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x-1}-\sqrt{4x^2-6x+1}\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-4x+3}-3x+1\right)$

e. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-(2x+3)\right)$

f. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-4}-\sqrt{3x^2-6x-10}\right)$

4. Diketahui fungsi-fungsi : $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ dan $g(x)=\sqrt{px^2+qx+r}$

a. Jika $a=p$, buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

b. Jika $a>p$, buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=\infty$

c. Jika $a<p$, buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$

d. Jika $a=p$ dan $b=q$, buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$

5. Dengan memakai hasil soal no 4. Hitunglah nilai-nilai limit fungsi berikut

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-3}-\sqrt{x^2-2x-3}\right)$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x-5}-\sqrt{4x^2-5x-6}\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\left((3x-2)-\sqrt{9x^2-6x-3}\right)$

e. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-6x-3}-(2x+1)\right)$

f. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(2x-3)(2x+1)}-(2x-3)\right)$

g. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-4x-2}-\sqrt{3x}\right)$

h. $\lim_{x\to\infty}\left((x+3)-\sqrt{x^2-4x-5}\right)$

i. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2+5x-3}-\sqrt{2x^2-3x+4}}{2}\right)$

j. $\lim_{x\to\infty}x\sqrt{25-\frac{10}{x}}-\sqrt{25+\frac{10}{x}}$

6. Ukuran pupil mata seekor hewan dinyatakan dengan rumus $f(x) = \frac{80x^{-0,3}+60}{2x^{-0,3}+5}$ dengan f dalam mm dan x menyatakan intensitas cahaya yang diterima pupil mata. Tentukan ukuran pupil mata ketika cahaya yang diterima intensitasnya besar sekali.

7. Menurut teori relativitas Einsten bahwa kecepatan suatu benda dinyatakan dengan $v = \frac{Fct}{\sqrt{m^2C^2+F^2t^2}}$ dengan F = gaya yang dialami benda, m = massa benda, C = kecepatan cahaya, dan t = waktu tempuh dalam detik. Tentukan nilai v jika t mendekati tak hingga.

8. Seorang pedagang yang menjual barang dagangannya sebanyak m buah, akan memperoleh laba yang besarnnya dapat dinyatakan dengan fungsi : f(m) = $\frac{15m^2-3m+1}{\sqrt{m^4+2m^3+5}}$ $juta\ rupiah$. Berapakah laba yang ia dapatkan jika barang yang terjual jumlahnya sangat banyak.

3. Teorema Limit

Sifat-sifat limit fungsi dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Jika $f(x) = k$ maka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$ (untuk setiap k konstanta dan a bilangan real)
2. Jika $f(x) = x$ maka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ (untuk setiap a bilangan real)
3. Jika k suatu konstanta maka $\lim\limits_{x\to a} k.f(x) = k.\lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$
6. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $dengan\ \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$
8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, $dengan\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0\ untuk\ n\ genap$

Contoh 7.

Hitunglah nilai limit berikut ini menggunakan teorema limit.

a. $\lim\limits_{x\to 1} (2x^2 - 3x + 4)$
b. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+2}\right)$
c. Diketahui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 32$, Hitung $\lim\limits_{x\to a} \left(f^2(x)\sqrt[5]{g(x)}\right)$

Jawab :

a. $\lim_{x\to1}(2x^2-3x+4)=\lim_{x\to1}2x^2-\lim_{x\to1}3x+\lim_{x\to1}4=2\left(\lim_{x\to1}x\right)^2-3\left(\lim_{x\to1}x\right)+\lim_{x\to1}4=$
$2(1)^2-3(1)+4=2-3+4=3$

b. $\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+2}\right)=\frac{\sqrt{2\left(\lim_{x\to2}x\right)^2+\left(\lim_{x\to2}1\right)}}{\left(\lim_{x\to2}x\right)+\left(\lim_{x\to2}1\right)}=\frac{\sqrt{2.(2)^2+1}}{2+1}=\frac{\sqrt{9}}{3}=\frac{3}{3}=1$

c. $\lim_{x\to a}\left(f^2(x)\sqrt[5]{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}f^2(x).\lim_{x\to a}\sqrt[5]{g(x)}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^2.\sqrt[5]{\lim_{x\to a}g(x)}=$
$(2)^2.\sqrt[5]{32}=4.2=8$n

Soal Latihan 4.

1. Hitunglah limit-limit fungsi berikut ini dengan menggunakan teorema limit.

a. $\lim_{x\to2}4x-1$
b. $\lim_{x\to2}2x^2-4x+3$
c. $\lim_{x\to2}(x^2-4)(3-5x)$
d. $\lim_{x\to0}(x^3-1)(x^4+2x)$
e. $\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{4x^2-9}$
f. $\lim_{x\to1}\frac{3x^2+1}{4x^4-9}$
g. $\lim_{x\to2}\sqrt{3x-2}$
h. $\lim_{x\to1}\sqrt[5]{2x^3-x+3}$
i. $\lim_{x\to2}\sqrt{\frac{3x-2}{x^3-7}}$

2. Diketahui fungsi-fungsi f(x), g(x) dan h(x) dengan $\lim_{x\to a}f(x)=3$ dan $\lim_{x\to a}g(x)=-1$,
Hitunglah :

a. $\lim_{x\to a}(f(x)+g^2(x))$
b. $\lim_{x\to a}\left(\sqrt{4f(x)+g^2(x)}\right)$
c. $\lim_{x\to a}\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)+4g(x)}$
d. $\lim_{x\to a}(2.f(x)+(x-a).g(x))$
e. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))^{20}$

4. Limit Fungsi Trigonometri

Cara menentukan limit fungsi trigonometri sebenarnya mirip pada penentuan limit fungsi aljabar, misalnya metode substitusi langsung atau metode pemfaktoran. Namun di luar itu pemahaman tentang rumus-rumus trigonometri dan teorema limit akan lebih membantu dalam penyelesaian limit fungsi trigonometri.
Berikut ini akan dijelaskan cara menentukan rumus perbandingan limit pada fungsi trigonometri yang paling dasar dan mendasari perhitungan limit trigonometri yang lebih kompleks.
Apabila f(x) merupakan fungsi yang memuat perbandingan trigonometri, maka bentuk $\lim_{x\to a}f(x)$ disebut limit fungsi trigonometri.

Contoh 8:
Tentukanlah nilai dari limit fungsi berikut .

a. $\lim_{x\to0}\sin 2x$
b. $\lim_{x\to\pi}(\cos x-\sin x)$
c. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\sin 2x}{1+2.\cos x}\right)$

Jawab :
Untuk menyelesaikan soal pada contoh 9 di atas dapat diselesaikan dengan cara substitusi langsung.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \sin 2x = \sin 2.0 = \sin 0 = 0$
b. $\lim\limits_{x \to \pi} (\cos x - \sin x) = \cos \pi - \sin \pi = -1 - 0 = -1$
c. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+\sin 2x}{1+2.\cos x}\right) = \frac{1+\sin 0}{1+2.\cos 0} = \frac{1+0}{1+2} = \frac{1}{3}$

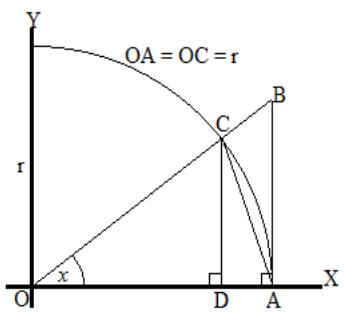
Contoh 9:
Hitunglah nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)$
Jika dikerjakan dengan substitusi langsung didapat :
$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin x}\right) = \frac{\sin 0}{\sin 0} = \frac{0}{0}$ $(Bentuk\ tak\ tentu)$ $\dots ini\ bukan\ jawaban$, maka perhitungan limit dilakukan dengan cara $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2.\sin x.\cos x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} (2.\cos x) =$ $2.\cos 0 = 2.1 = 2$

Seringkali bentuk tak tentu pada soal limit fungsi trigonometri tak dapat dihilangkan, sehingga soal-soal yang demikian diselesaikan dengan menggunakan rumus :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right) = 1$

Bukti 1 (Secara Intuitif)
Dari sin 0 = 0 terlihat bahwa untuk $x \to 0$ maka diperoleh $\sin x \to x$, didapat :
$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$
Dari tan 0 = 0 terlihat bawa untuk $x \to 0$ maka diperoleh $\tan x \to x$, didapat :
$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

Bukti 2 (Secara teoritis)
Perhatikan gambar seperempat lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari r berikut :



Luas $\Delta OAC \leq Luas\ juring\ OAC \leq Luas\ \Delta OAB$
$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{CD} \leq \frac{x}{2\pi} \times \pi.r^2 \leq \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AB}$
$\frac{1}{2} \times r \times r.\sin x \leq \frac{x}{2} \times r^2 \leq \frac{1}{2} \times r \times r.\tan x$
Bila masing-masing ruas dibagi $\frac{1}{2} \times r \times r.\sin x$
maka didapat : $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$
Jika x semakin mendekati nol maka diperoleh :
$\lim\limits_{x \to 0} 1 \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos x}\right)$ sehingga
$1 \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \leq 1$, Jadi $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$,
dan berlaku pula $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

Dari bentuk $\frac{1}{2} \times r \times r . \sin x \leq \frac{x}{2} \times r^2 \leq \frac{1}{2} \times r \times r . \tan x$ bila masing-masing ruas dibagi $\frac{1}{2} \times r \times r . \tan x$

Diperoleh $\cos x \leq \frac{x}{\tan x} \leq 1$ Jika x semakin mendekati nol maka diperoleh $\lim\limits_{x \to 0} \cos x \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right) \leq \lim\limits_{x \to 0} 1$ diapat $1 \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right) \leq 1$, Jadi $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right) = 1$, dan berlaku pula $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$

Contoh 10:

Tentukanlah nilai limit fungsi trigonometri berikut ini.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)$ b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}$ c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\tan 2x}$ d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{\sin 2x}$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{2x} \times \frac{6}{6} = \frac{6}{2} . \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 3.1 = 3$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x} \times \frac{6x}{6x} \times \frac{3x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{6x} . \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} . \lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{3x} = 1.1. \frac{6}{3} = 2$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\tan 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\tan 2x} \times \frac{2}{2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{4}{2} = 1. \frac{4}{2} = 2$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{\sin 2x} \times \frac{8x}{8x} \times \frac{2x}{2x} = . \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{8x} . \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} . \lim\limits_{x \to 0} \frac{8x}{2x} = 1.1. \frac{8}{2} = 4$

Dari contoh 10 di atas maka untuk memudahkan dalam perhitungan secara umum dapat ditulis dalam rumus berikut :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{bx}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{ax}{\sin bx}\right) = \frac{a}{b}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan ax}{bx}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{ax}{\tan bx}\right) = \frac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{\sin bx}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan ax}{\tan bx}\right) = \frac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{\tan bx}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan ax}{\sin bx}\right) = \frac{a}{b}$

Contoh 11.

Tentukanlah nilai limit fungsi trigonometri berikut ini berdasarkan rumus di atas.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)$ b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}$ c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\tan 2x}$ d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{\sin 2x}$ e. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{tan^2 4x}{sin^2 2x}\right)$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x}\right) = \frac{6}{2} = 3$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \frac{6}{3} = 2$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\tan 2x} = \frac{4}{2} = 2$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{\sin 2x} = \frac{8}{2} = 4$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{tan^2 4x}{sin^2 2x}\right) = \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{\sin 2x}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

Beberapa Rumus Trigonometri yang sering dipakai pada limit trigonometri :

(i). 1 – cos A = 2.sin^2 (½ A)	(iv). 1 – sin^{2}A = cos^2 A
(ii). Sin A – sin B = 2.cos ½(A+B).sin ½(A—B)	(v). 1 – cos^{2}A = sin^2 A
(iii). Cos A – cos B = -2.sin ½(A+B).sin ½(A—B)	(vi). CosA.cosB = ½(cos(A+B)+cos(A– B)

Pengembangan rumus $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)=1$ dan $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)=1,$ bila x berupa fungsi katakanlah menjadi f(x) dan jika nilai f(a) = 0 untuk x mendekati a maka dapat ditulis sbb:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin f(x)}{f(x)}\right)=\left(\frac{f(x)}{\sin f(x)}\right)=1$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan f(x)}{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\tan f(x)}\right)=1$

Contoh 12.

Tentukan hasil dari limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

b. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{x-9}$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2.\cos ½(x+a).\sin ½(x-a)}{x-a}=$

$\lim\limits_{x\to a}2.\cos ½(x+a).\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\ ½(x-a)}{x-a}=2.\cos a\,.\frac{1}{2}=\cos a$

b. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{x-3}\times\frac{x+3}{x+3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3).\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{(x^2-9)}=(3+3).1=6$

Soal Latihan 5

Tentukan hasil dari limit fungsi trigonometri berikut ini!

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin 5x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{6x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x}{\tan 2x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 9x}{\tan 3x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}$
8. $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\tan 2x}{\sin x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 4x}{\sin^2 3x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 4x}{2x^2}$
13. $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x.\tan 3x}{x.\sin 4x}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+\tan 4x}{x+\sin 2x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\tan 3x}{\tan 3x-\sin x}$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x^2}$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin 3x.\tan 2x}$
18. $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin 2x.\tan x}$
19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$
20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+a)-\sin x}{x}$
21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx-\sin nx}{\cos mx-\cos nx}$
22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x.\cos x}{\sin 4x.\tan 2x}$
23. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\tan x-\tan a}$
24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$
25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\sin 2x}$

Soal Pengayaan

26. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dari fungsi-fungsi trigonometri berikut ini :

a. f(x) = sin mx	c. f(x) = tan mx	e. f(x) = $\cos^2$ 2x	g. f(x) = $\frac{1}{\sin x}$
b. f(x) = cos mx	d. f(x) = $\sin^2$ 4x	f. f(x) = $\tan^2$ 6x	h. f(x)= $\frac{1}{\cos 2x}$

27. Hitunglah nilai limit fungsi berikut ini :

a. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2x+2).\sin(x-2)}{x^2-4}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\ \sin 3x.\cos 2x}{2x^2}$ e. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x.\tan x}{1-\cos 2x}$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2x+2).\sin(x-2)}{x^2-4}$ d. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{(3x-3a)+\tan(x-a)}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x.(cos^2 6x-1)}{\sin 3x.\tan^2 2x}$

g. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-(a+1)x^2+ax}{(x^2-a)\tan(x-1)}$ h. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(x-1).\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1}$

28. Tentukanlah nilai dari $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2n}-x}{1-x}$

29. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari $(a-3)x^2-(2a+1)x+1-3a=0$, maka tentukanlah nilai dari $\lim\limits_{a\to\infty}x_1+\lim\limits_{a\to\infty}x_2$

30. Tentukanlah hasil dari $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^2+ax-2a^2).\sin(x-a)}{(x^2+a^2)+\tan(x^2-ax)}$

Soal Uji Kompetensi Limit Fungsi

I. Pilihlah jawaban yang benar!

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}=\cdots$

A. 3 B. 2 C. 0 D. –2 E. –3

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^5-4x}{2x^2+x}=\cdots$

A. –4 B. –2 C. 0 D. 2 E. 4

3. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{n}=\cdots$

A. x B. $2x$ C. x^2 D. $-2x$ E. $-x^2$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3(1-x^2)}{1-x}=\cdots$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}=\cdots$

A. 0 B. 2 C. 4 D. 6 E. ∞

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\cdots$

A. –1 B. – ½ C. ½ D. 1 E. 2

7. Jika $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\cdots$

A. 1 B. A C. f(a) D. a + f(a) E. a – f(a)

8. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{2x^2-5x}{3-\sqrt{9+x}} = \cdots$

A. 30 B. 1 C. 0 D. –1 E. –30

9. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{1-x^2} = \cdots$

A. – ½ B. – ¼ C. 0 D. ¼ E. ½

10. $\lim\limits_{a\to b} \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \cdots$

A. 0 B. 3a C. $\sqrt[3]{b}$ D. 3b E. ∞

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-5}{2x^2+4x+5} = \cdots$

A. 0 B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$ E. 6

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(4+4x)(2-x)}{(2+x)(1-x)} = \cdots$

A. –∞ B. $\frac{1}{5}$ C. 2 D. 5 E. ∞

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x} - x - 2\right) = \cdots$

A. $-\frac{9}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$ E. ∞

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{x^2+6x+3} - 2x\right) = \cdots$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1 E. 0

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2.cos^2 x-1}{\cos x-\sin x} = \cdots$

A. -1 B. 0 C. 1 D. $\sqrt{2}$ E. $2\sqrt{2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2+2x} = \cdots$

A. 2 B. 1 C. 0 D. ½ E. ¼

17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \cdots$

A. 0 B. ½ C. ½$\sqrt{2}$ D. 1 E. 2

18. $\lim\limits_{x\to k} \frac{x-k}{\sin(x-k)+2k-2x} = \cdots$

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$ E. 1

19. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin\left(1-\frac{1}{x}\right).\cos\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x-1} = \cdots$

A. – 1 B. – ½ C. 0 D. ½ E. 1

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x-2.\tan x}{x^3} = \cdots$

A. – 2 B. – 1 C. 0 D. 1 E. 2

II. Soal Uraian (Essay)

1. Hitunglah $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{2x^2-8}{x-2} + \frac{x^2-2x}{2x-4}\right)$
2. Hitunglah $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$
3. Jika $\lim\limits_{x\to 4} \left(\frac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4}\right) = \frac{3}{4}$, maka tentukanlah nilai $a+b$.
4. Tentukanlah nilai $\lim\limits_{t\to 0} \frac{(t^2-5t+6).\sin(t-2)}{(t^2-t-2)^2}$

VI. Glossary

Istilah	Keterangan
Bentuk sekawan	Pasangan bilangan atau bentuk aljabar yang memuat bentuk akar yang hasil kalinya bilangan rasional atau bentuk aljabar yang tidak memuat bentuk akar. Contoh: $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$ sekawan dengan $(\sqrt{7}-\sqrt{2})$, sebab $\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)=5$
Bentuk tak tentu	Bentuk yang nilainya tidak dapat ditentukan secara tepat karena mempunyai nilai yang bermacam-macam sehingga bentuk tak tentu ini tidak terdefinisi pada bilangan real. Bentuk tak tentu yang terdapat dalam modul ini adalah : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ dan $0 . \infty$
Limit	Kata-kata "batas", "mendekati", "hampir", "sedikit lagi" atau kata-kata yang dapat disamakan artinya dengan pengertian "limit" dalam matematika.
Limit fungsi	Limit fungsi f(x) = L untuk x mendekati a, dapat ditulis dengan notasi $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{f}(x) = \mathrm{L}$ mengandung arti jika x dekat dengan a tetapi tidak sama dengan a maka nilai fungsi f(x) mendekati L.
Substitusi	Penggatian variabel (=peubah) dengan suatu bilangan real (konstanta)

VII. Daftar Pustaka :

Sembiring, S. (2012), *Matematika untuk Kelas XI IPA*, Bandung, YRAMA WIDYA.
Pakpahan, M. W. (2001), *Matematika SMU kelas 2*, Jakarta, Galaksi Puspa Mega.
Tampomas, H. (2008), *Seribu Pena Matematika untuk Kelas XI*, Jakarta, Erlangga
Wirodikromo, S. (2007), *Matematika untuk SMA kelas XI 2B*, Jakarta, Erlangga.