MATERI 2
MATEMATIKA TEKNIK 1

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA

Tujuan

1. Dapat menyelesaikan persamaan diferensial orde dua.
2. Dapat menyelesaikan suatu Sistem Linier dengan menggunakan metode Eliminasi atau dengan menggunakan metode Matrik.
3. Dapat menyelesaikan suatu rangkaian yang mengandung R, L dan C.
4. Dapat membuat model matematis suatu rangkaian Listrik yang mengandung *multiple loop*.

Persamaan diferensial orde dua

1. Persamaan diferensial linier adalah tiap suku dalam persamaan diferensial, variable-variable *y, y', y'', ..., y(n) berderajat satu atau nol.*

Contoh 1.

1. $t\dfrac{dy}{dt} - 2y = t^3$ linier tak homogen orde satu

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 3y = \cos(t)$ linier tak homogen orde dua

3. $y^{(4)} - y = 0$ linier tak homogen orde empat.

Persamaan diferensial orde dua

2. Suatu kumpulan n fungsi *f1, f2, f3, …, fn, masing masing terdefinisi dan kontinu*, dikatakan **linier dependent** jika kontanta konstanta *a1, a2, a3, …, an, tidak* semuanya secara bersama-sama sama dengan nol, sehingga :

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \ldots + a_n f_n = 0$$

Contoh 2.

$$f_1(t) = 3\mathrm{t} + \frac{12}{5} \quad ; \qquad f_2(t) = 5\mathrm{t} + 4$$

$$\Rightarrow a_1\left(3\mathrm{t} + \frac{12}{5}\right) + a_2(5\mathrm{t} + 4) = 0$$

Persamaan diferensial orde dua

3. Suatu kumpulan n fungsi *f1, f2, f3, …, fn, masing masing terdefinisi dan kontinu,* dikatakan **linier independent** jika kontanta konstanta *a1, a2, a3, …, an,* semuanya secara bersama-sama sama dengan nol, sehingga :

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \ldots + a_n f_n = 0$$

Menghasilkan

$$a1 = a2 = a3 = \ldots = an = 0$$

Contoh 3

$$f_1(t) = t \qquad f_2(t) = t^2 \quad y = C \ln(t)^4$$

$$a_1 \left(t\right) + a_2 \left(t^2\right) = 0$$


problem
analysis
solution

Penyelesaian Persamaan diferensial orde dua

1. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Koefisien konstant – Penyelesaiaan Umum

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

2. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Fungsi komplementer dan Integral Khusus

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$$

Solusi

1. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Koefisien Konstant – Penyelesaiaan Umum

1. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Koefisien konstant – Penyelesaiaan Umum

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

SOLUSI

$$y = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$$

ATAU

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

- A dan B adalah konstanta sembarang,
- *m1, m2 adalah akar-akar persamaan karakteristik :* $am^2+bm+c=0$

$m_1=\alpha$ dan $m_2=\beta$

1. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Koefisien konstant – Penyelesaiaan Umum

1. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Koefisien konstant – Penyelesaiaan Umum

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

Contoh :

1. $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$ Pada saat x=0, y=10; dy/dx=4

2. to solve $2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-3y=0$, given that when $x=0$, $y=4$ and $\frac{dy}{dx}=9$:

1. Prosedur Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Koefisien konstant – Penyelesaian Umum

- Tulis dalam bentuk $a\frac{d^2y}{dx}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ →*(aD²+bD+c)y=f(x)*
- *Subtitusi m=D, Tentukan nilai akar m dari persamaan $am^2+bm+c=0$*
- *Tentukan karakterisrik akarnya*

(i) **real and different,** say $m=\alpha$ and $m=\beta$, then the general solution is

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

(ii) **real and equal**, say $m=\alpha$ twice, then the general solution is

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x}$$

(iii) **complex,** say $m=\alpha \pm j\beta$, then the general solution is

$$y = e^{\alpha x}\{A\cos\beta x + B\sin\beta x\}$$

- *Masukkan batas-batasnya, jika ada*

Latihan

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-15y=0$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$$

3. $$2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+5y=0$$ pada saat x=0; y=2

   Pada saat x=0; y'=4

2. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Fungsi komplementer dan Integral Khusus

2. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Fungsi komplementer dan Integral Khusus

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$$

SOLUSI

$$y=Ae^{m_1 t}+Be^{m_2 t}$$ disebut juga fungsi komplementer

$$y=f(t)\ \text{fungsi}\ t$$ disebut juga integral khusus

Jawab lengkap = fungsi komplementer + integral khusus

2. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Fungsi komplementer dan Integral Khusus

2. Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Fungsi komplementer dan Faktor Integral

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

Contoh :

1. $$2\frac{d^2y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} + 12y = 3x - 2$$

2. $$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = t^2$$

2. Prosedur Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Fungsi komplementer dan Integral Khusus

- Tulis dalam bentuk $(aD^2+bD+c)y=f(x)$
- *Subtitusi m=D, Tentukan nilai akar m dari persamaan* $am^2+bm+c=0$
- *Tentukan karakterisrik akarnya (sebagai fungsi u)*
- *Integral Khusus (v)* $\longrightarrow$ *Cek tabel*
- *Substitusi Integral Khusus ke dalam Persamaan* $(aD^2+bD+c)v=f(x)$ *dan tentukan koefisien yang lain*
- *Solusi Akhir Y= Fungsi Komplementer (CF) + Integral Khusus (PI)*

  $$y = u + v$$

- *Masukkan batas-batasnya, jika ada*

2. Prosedur Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Fungsi komplementer dan Integral Khusus

Type	*Straightforward cases* *Try as particular integral:*	*'Snag' cases* *Try as particular integral:*
(a) $f(x) =$ a constant	$v = k$	$v = kx$ (used when C.F. contains a constant)
(b) $f(x) =$ polynomial (i.e. $f(x) = L + Mx + Nx^2 + ..$ where any of the coefficients may be zero)	$v = a + bx + cx^2 + ..$	
(c) $f(x) =$ an exponential function (i.e. $f(x) = Ae^{ax}$)	$v = ke^{ax}$	(i) $v = kxe^{ax}$ (used when e^{ax} appears in the C.F.) (ii) $v = kx^2e^{ax}$ (used when e^{ax} **and** xe^{ax} both appear in the C.F.) etc.
(d) $f(x) =$ a sine or cosine function (i.e. $f(x) = a \sin px + b \cos px$ where a or b may be zero)	$v = A \sin px + B \cos px$	$v = x(A \sin px + B \cos px)$ (used when $\sin px$ and/or $\cos px$ appears in the C.F.)
(e) $f(x) =$ a sum e.g. (i) $f(x) = 4x^2 - 3 \sin 2x$ (ii) $f(x) = 2 - x + e^{3x}$	(i) $v = ax^2 + bx + c + d \sin 2x + e \cos 2x$ (ii) $v = ax + b + ce^{3x}$	
(f) $f(x) =$ a product e.g. $f(x) = 2e^x \cos 2x$	$v = e^x(A \sin 2x + B \cos 2x)$	

Type	*Straightforward cases Try as particular integral:*	*'Snag' cases Try as particular integral:*
(a) $f(x) =$ a constant	$v = k$	$v = kx$ (used when C.F. contains a constant)
(b) $f(x) =$ polynomial (i.e. $f(x) = L + Mx + Nx^2 + \ldots$ where any of the coefficients may be zero)	$v = a + bx + cx^2 + \ldots$	
(c) $f(x) =$ an exponential function (i.e. $f(x) = Ae^{ax}$)	$v = ke^{ax}$	(i) $v = kxe^{ax}$ (used when e^{ax} appears in the C.F.) (ii) $v = kx^2e^{ax}$ (used when e^{ax} **and** xe^{ax} both appear in the C.F.) etc.
(d) $f(x) =$ a sine or cosine function (i.e. $f(x) = a \sin px + b \cos px$ where a or b may be zero)	$v = A \sin px + B \cos px$	$v = x(A \sin px + B \cos px)$ (used when $\sin px$ and/or $\cos px$ appears in the C.F.)
(e) $f(x) =$ a sum e.g. (i) $f(x) = 4x^2 - 3 \sin 2x$ (ii) $f(x) = 2 - x + e^{3x}$	(i) $v = ax^2 + bx + c + d \sin 2x + e \cos 2x$ (ii) $v = ax + b + ce^{3x}$	
(f) $f(x) =$ a product e.g. $f(x) = 2e^x \cos 2x$	$v = e^x(A \sin 2x + B \cos 2x)$	

TUGAS 3

TUGAS 3

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = x$$

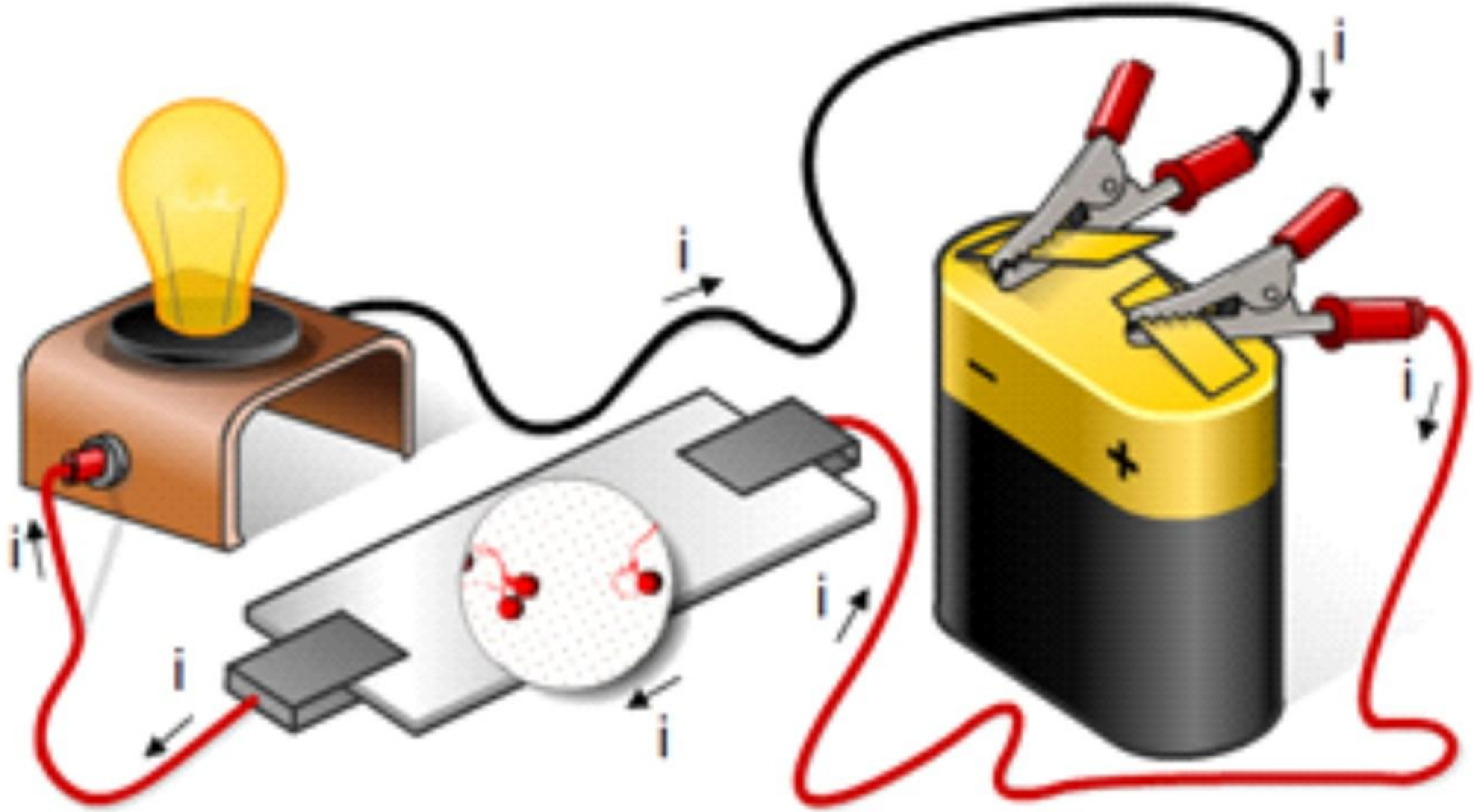
2. $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 3 - 6x$$

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 6e^x + 3$$

4. $$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 6e^x$$

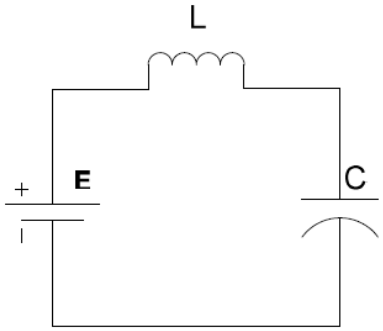
5. $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6\sin 2x$$

Aplikasi Persamaan Diferensial Orde dua



Rangkaian LC seri

- Rangkaian LC seri dengan sumber baterai E volt digambarkan pada Gambar. Dengan hukum Tegangan Kirchoff didapatkan model persamaan pada Gambar



$V_L + V_C = E$

dengan: V_L adalah tegangan pada induktor L yaitu $L\frac{dI}{dt}$

V_C adalah tegangan pada kapasitor C yaitu $\frac{1}{C}\int I dt$

diketahui bahwa $I = \frac{dQ}{dt}$ dengan Q adalah muatan dalam Coulomb. Sehingga model persamaan dapat dituliskan:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = E$$

Rangkaian LC seri

untuk menghilangkan tanda integral, persamaan dideferensialkan, maka:

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right)+\frac{1}{C}\int\frac{d}{dt}I\,dt=\frac{d}{dt}(E)$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=\frac{d}{dt}(E)$$

$$\boxed{L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=\frac{d}{dt}(E)}$$

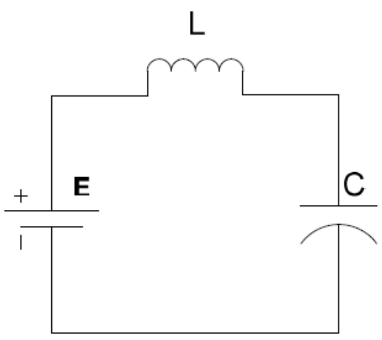
Rangkaian LC seri

- Model persamaan LC Seri dapat juga dinyatakan dalam muatan Q(t), yaitu:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = E$$

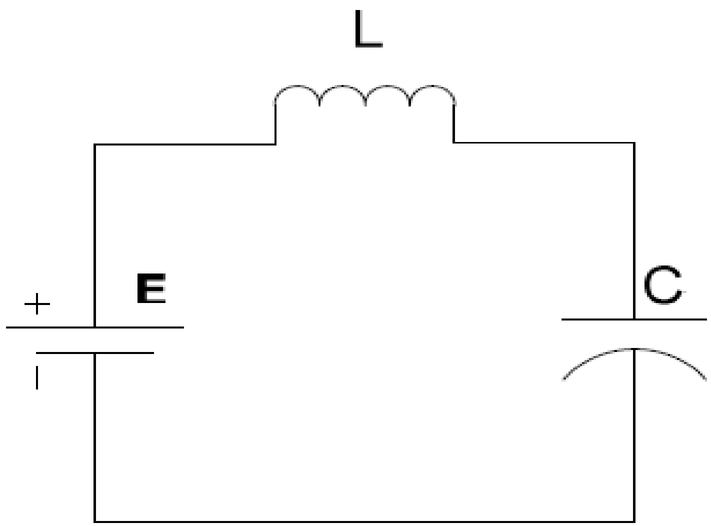
$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{1}{C}\int \frac{dQ}{dt} dt = E$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E$$



$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E}$$

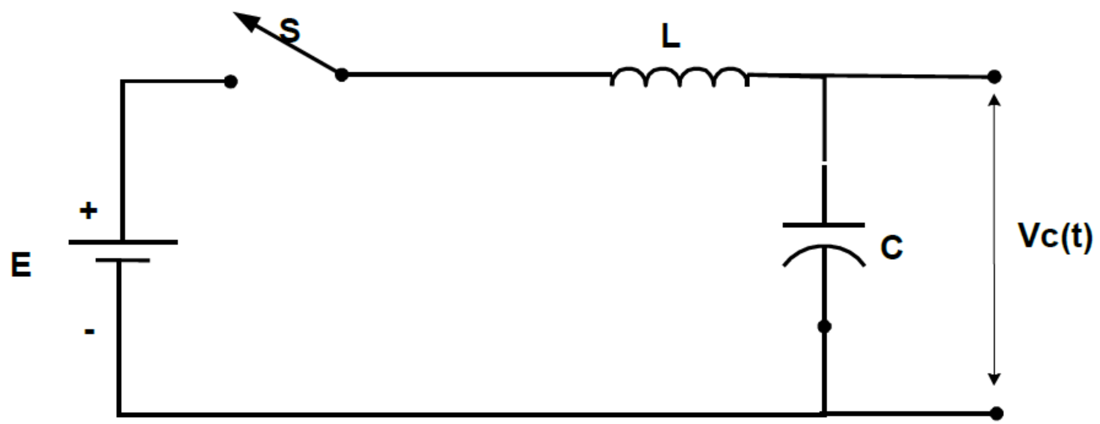
Contoh 1



- Tentukan kuat arus I(t) rangkaian LC seperti Gambar jika L= 10 henry, C=0,004 farad, E=0 volt !

Contoh 2

- **Rangkaian LC**

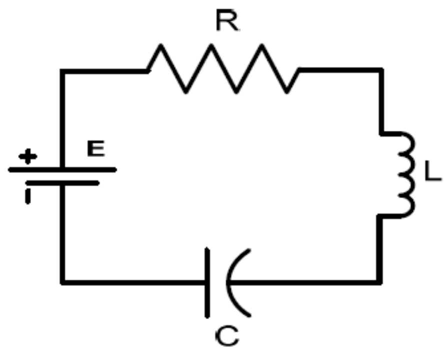


Gambar 3. Rangkaian LC dengan sumber DC

- Pada gambar 3, pada saat switch S ditutup muatan kapasitor nol arus yang mengalir juga nol. Jika harga L = 2 mH, C = 0,2 mF dan E = 12 volt. Tentukanlah muatan dan arus?

Rangkaian RLC seri

- Rangkaian RLC seri dengan sumber baterai E volt digambarkan pada Gambar . Model persamaan rangkaian didapatkan dengan hukum Tegangan Kirchoff, yaitu:



$$V_R + V_L + V_C = E$$

dengan: V_R adalah tegangan pada resistor R yaitu RI

V_L adalah tegangan pada induktor L yaitu $L\frac{dI}{dt}$

V_C adalah tegangan pada kapasitor C yaitu $\frac{1}{C}\int I dt$

diketahui bahwa $I = \frac{dQ}{dt}$ dengan Q adalah muatan dalam Coulomb.

Rangkaian RLC seri

Model persamaan rangkaian dapat dinyatakan sebagai:

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = E$$

untuk menghilangkan tanda integral, persamaan dideferensialkan, maka:

$$R\frac{d}{dt}I + L\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right) + \frac{1}{C}\int \frac{d}{dt}I dt = \frac{d}{dt}(E)$$

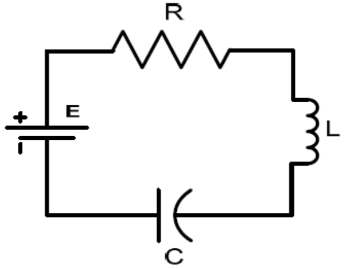
$$\boldsymbol{L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}(E)}$$

Model persamaan untuk Gambar 38 dapat juga dinyatakan dalam muatan Q(t), yaitu:

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = E$$

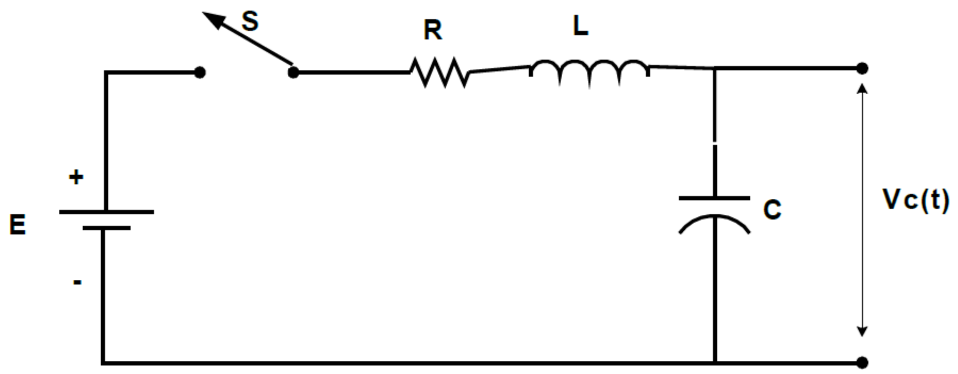
$$R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{1}{C}\int \frac{dQ}{dt} dt = E$$

$$\boldsymbol{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E}$$



Contoh 3

Rangkaian RLC



Gambar 1. Rangkaian Seri RLC dengan Sumber DC

Penyelesaian.

- Switch S mentup pada t = 0, muatan pada kapasitor pada t = 0 adalah nol dan arus pada keadaan awal nol. Tentukanlah muatan dan arus pada gambar 1 pada saat Switch S menutup. Diketahui R = 0,1Ω, L = 0,25H, C = 220μF,   E = 120 volt.

TUGAS 4

TUGAS 4

1. Tentukan kuat arus I(t) pada rangkaian LC seri, jika L=0,4 henry, C=0,01 farad, E= 0 volt
2. Tentukan kuat arus I(t) pada rangkaian LC seri, jika L=0,4 henry, C=0,01 farad, E= 40 volt
3. Tentukan kuat arus I(t) pada rangkaian LC seri, jika L=5 henry, C=0,01 farad, E= 0 volt, I(0)=0, Q(0)=Q
4. Tentukanlah muatan Q dan I sebagai fungsi watku t dalam rangkaian RLC seri jika R = 32 Ω, L = 0,01 H, C = 2×10^{-4} F dan E = 24 volt. Anggaplah pada saat t= 0, arus I = 0 dan muatan kapasitor Q = 0
5. Suatu induktor 4 henry, resistor 8 ohm dan kapasitor 0,2 farad dihubungkan secara seri dengan sutu baterai dengan ggl. E = 80 sin 3t. Pada t=0 muatan dalam kapasitor dan arus dalam rangkaian adalah nol. Tentukanlah (a) muatan dan (b) arus pada t>0.
6. Tentukan arus transien dalam rangkaian RLC seri dimana R=200 Ω, L=100H, C=0,005F dan E=500 sin t volt! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.

Tugas Kelompok

- Ketik soal dan jawaban Tugas (Tugas 1- 4)
- Ketik di Microsoft word (format *.doc atau *.docx)
- Kumpul :
  - Soft Copy : Suthami09@gmail.com
  - Hard Copy : Kamis Depan

  - Info : www.suthami.wordpress.com

Referensi

- Google
- Stroud, K.A., *Matematika untuk Teknik*. *Jakarta: Penerbit Erlangga, 1987*.
- Buku ajar matematika Teknik I Jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Brawijaya
- Diktat matematika Teknik I Jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Mataram

TERIMA KASIH