MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Grupo Editorial Patria

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Jesús Rodríguez Franco
Elva Cristina Rodríguez Jiménez
Alberto Isaac Pierdant Rodríguez

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco,
02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinación editorial: Verónica Estrada Flores
Producción: Gerardo Briones González
Revisión Técnica: M.C. Alex Polo Velázquez
Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco (U.A.M.)
Diseño de interiores: Jorge Martínez J. y Gustavo Vargas M.
Diseño de portada: Juan Bernardo Rosado Solís/Signx

Matemáticas Financieras. Serie Patria

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN ebook: **978-607-744-033-8**
ISBN Material Impreso: 978-607-438-722-3

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Semblanza autoral

Jesús Rodríguez Franco

Profesor-investigador Titular "C" del Departamento de Política y Cultura en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Xochimilco (UAM-X). Profesor en la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Nacional Autónoma de México (FCA-UNAM) de asignatura "B" en Matemáticas Financieras y Estadística.

Estudió la carrera de Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica en el Instituto Politécnico Nacional (IPN), tiene la maestría en Ciencias en la especialidad de Bioelectrónica del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). Diplomados en: "Formación Docente para las Disciplinas Financiero Administrativas" (FCA-UNAM), "Formación Docente" y "La Estadística IX" (UAM-X).

Tiene 34 años de experiencia docente impartiendo cursos de matemáticas e informática. Cuenta con la acreditación de Profesor de Perfil Idóneo otorgada por la Secretaría de Educación Pública (SEP). Es miembro de la Academia de Matemáticas en la Facultad de Contaduría y Administración (UNAM), e integrante de la Comisión Dictaminadora en Matemáticas (FCA-UNAM). También es miembro del área de investigación "Desarrollo de las Matemáticas en las Ciencias Sociales" (UAM-X) y del Cuerpo Académico de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (UAM-X y SEP), cuenta con el reconocimiento de Profesor Distinguido otorgado por la Facultad de Contaduría y Administración UNAM en mayo de 2013.

A la fecha ha publicado 12 libros de matemáticas como coautor, más de 15 artículos, en revistas especializadas de difusión, enfocados a la pequeña y mediana empresa mexicana, informática y educación. También ha coordinado un libro temático de matemáticas.

Ha presentado diferentes ponencias en ciclos de conferencias, congresos, encuentros, foros y simposios a nivel nacional e internacional. Ha participado en la organización en congresos, foros, ciclos de conferencias, en semanas de matemáticas y en maratones de matemáticas financieras y estadística. También ha otorgado diversas entrevistas radiofónicas en Radio Educación, Radio UAEM y MVS-Noticias.

Es fundador y primer Presidente de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Contaduría y Administración (UNAM) de noviembre de 1999 a junio 2004. Fue representante ante el Consejo Académico del Departamento de Política y Cultura (UAM-X) y Colegiado de la División de Ciencias Sociales y Humanidades ante el Colegio Académico de la Universidad Autónoma Metropolitana periodo 2007-2009. Fue Jefe del área de investigación "Desarrollo de las Matemáticas en las Ciencias Sociales" en el periodo 2003 a 2005 (UAM-X).

Trabajó como Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica en la Refinería 18 Marzo y en Dirección de Construcción y Obras de Petróleos Mexicanos (1984-1989). Ha sido profesor en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME) del Instituto Politécnico Nacional, en el Instituto Tecnológico de Monterrey División de Preparatoria Campus Ciudad de México y en la Universidad Latina Campus Sur.

Elva Cristina Rodríguez Jiménez

Profesora de matemáticas del Departamento de Política y Cultura en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Xochimilco (UAM-X) y profesora definitiva de asignatura "B" Estadística I y asignatura "A" Estadística II en la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Estudió la licenciatura en Química Farmacobióloga con mención honorífica en la Facultad de Química de la Universidad Nacional Autónoma de México, los diplomados en "Matemáticas Aplicadas a la Economía" en la Facultad de Economía, el de "Formación Docente para las Disciplinas Financiero Administrativas" en la Facultad de Contaduría y Administración, ambos en la Universidad Nacional Autónoma de México.

Tiene 19 años de experiencia docente impartiendo diferentes cursos de matemáticas, es miembro de la "Academia de Matemáticas" en la Facultad de Contaduría y Administración (UNAM). Es coautora de los libros: Libro electrónico *Fundamentos de Matemáticas*, producto PAPIME Fomento Editorial FCA-UNAM, México, 2005; *Estadística para Administración*, Grupo Editorial Patria, segunda reimpresión, México, 2013 y *Estadística aplicada II*, *Estadística en administración para la toma de decisiones*, Grupo Editorial Patria, México, 2010. También ha participado en diferentes ponencias en ciclos de conferencias, encuentros y foros a nivel nacional.

Participó en la investigación para el desarrollo de un método fotocolorimétrico para la determinación de metionina, para la Organización de Estados Americanos (OEA) y la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Química de la UNAM (1984). Ocupó el cargo de Jefe y subjefe del laboratorio de Gases, también como química analista en el laboratorio Analítico, experimental y de gases en la Refinería 18 de Marzo (1985-1991).

Alberto Isaac Pierdant Rodríguez

Profesor-investigador Titular "C" del Departamento de Política y Cultura en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Xochimilco (UAM-X) y socio director de Pierdant y Asociados, S.C.

Estudió la carrera de Ingeniero Industrial en el Instituto Politécnico Nacional (IPN), tiene la Maestría en Ingeniería en la especialidad de Planeación de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Es candidato a Doctor en Ciencias Sociales con especialidad en Sociedad y Educación en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Xochimilco. Ha participado en diferentes cursos de actualización, entre los que destacan:"Evaluación Económica de Proyectos de Exploración de Hidrocarburos I", en la Universidad de los Andes-Banco Interamericano de Desarrollo, Bogotá, Colombia. "Evaluación Económica de Proyectos de Exploración de Hidrocarburos II", en la Universidad de los Andes-Banco Interamericano de Desarrollo, Bogotá, Colombia. "Petroleum Energy" en The Institutte of Energy Economics, Japan, septiembre-noviembre 1989, Tokio, Japón.

Tiene 35 años de experiencia docente impartiendo cursos de matemáticas e informática, cuenta con la acreditación de Profesor de Perfil Idóneo otorgada por la Secretaría de Educación Pública (SEP). Es miembro del área de investigación: "Desarrollo de las Matemáticas en las Ciencias Sociales" en la UAM-X y del Cuerpo Académico de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (UAM-X y SEP). Ha publicado cuatro libros como autor y 10 de matemáticas como coautor, también ha publicado más de 30 artículos científicos y de difusión enfocada a la educación, informática, a las políticas públicas y para la pequeña y mediana empresa mexicana. Ha presentado diferentes ponencias en ciclos de conferencias, encuentros y foros a nivel nacional e internacional.

Fue fundador y en la actualidad director del despacho de consultoría Pierdant y Asociados, S.C. (1979). Dentro de consultoría ha elaborado trabajos para diversas empresas y organismos como SHCP, ISSSTE, la Comisión Federal de Electricidad, Petróleos Mexicanos, Coca-Cola FEMSA, el INBA, entre otros.

Presentación

En la actualidad, la matemática financiera ha adquirido una gran importancia por su utilidad en la administración, la economía y en las políticas públicas, así como en diversas ramas en donde se emplea como la auxiliar de cálculos en la ingeniería económica para la valuación de inversiones en maquinaria, equipos, instalaciones, tecnología, infraestructura y, en general, cualquier inversión que signifique un proceso en el cual debe de realizarse una evaluación del proyecto. Pero no solo en estas áreas sofisticadas de la inversión es útil la matemática financiera, ya que un pequeño inversionista puede utilizarla para analizar opciones de crédito en la adquisición de bienes y servicios cotidianos que le permitan tener mejores condiciones de vida. La matemática financiera también es necesaria para toda persona que tenga la necesidad de utilizar el sistema financiero.

El libro ***Matemáticas Financieras Serie Patria*** responde a los programas de bachillerato y licenciatura. Su estructura motiva al estudiante a ser el protagonista en la construcción de su aprendizaje, basado en el enfoque educativo por competencias en el ámbito constructivista, esto con el objetivo de potencializar el saber qué hacer en la vida académica y profesional; lo anterior lleva al estudiante al aprendizaje significativo.

El libro presenta los conceptos con un lenguaje sencillo y ameno. Contiene de tres a cinco ejercicios resueltos (paso a paso) del ámbito nacional en cada subtema, inicia con los sencillos y aumenta su complejidad, con la idea que el alumno adquiera seguridad y confianza. Lo anterior le permitirá resolver los problemas propuestos al final de cada unidad o cualquiera que se le llegue a presentar en la vida académica o profesional con éxito. Al inicio de cada unidad se plantean los objetivos y la sección ¿Qué sabes?, en ella se exponen una serie de preguntas y problemas que permiten al estudiante recordar sus conocimientos previos o despertar la inquietud de conocer más del tema. También contiene pequeños cuadros de alerta como son: el histórico, que contiene breves biografías de personajes vinculados con la matemática o pasajes de la misma; para pensar, que encierra los pasos que se realizan mentalmente; de definiciones, para resaltar definiciones importantes, teoremas y conceptos; de advertencia, para indicar las operaciones y pasos que no deben realizarse. En las ocho unidades que conforman el libro se da una breve información teórica del subtema a estudiar y se plantean de dos a cuatro problemas resueltos paso a paso. Al final de cada unidad se cuenta con un formulario, un glosario, los problemas a resolver y la sección de problemas reto.

El contenido del texto está estructurado en ocho unidades.

Unidad 1 Exponentes, logaritmos y porcentajes. En nuestro país, la realidad comercial y, sobre todo, la financiera se han influenciado por los avances tecnológicos que más impactan a la sociedad. Dos de estos avances lo representan las calculadoras modernas y las computadoras. El manejo de estas y sus programas de cálculo permiten a los alumnos, profesores y analistas de datos financieros obtener resultados de manera rápida y certera y logra al mismo tiempo un máximo beneficio que se refleja en atractivos rendimientos en sus inversiones. Por esta razón nos hemos preocupado por incluir en esta unidad la forma de resolver las operaciones aritméticas básicas, exponentes, radicales, logaritmos, proporciones, regla de tres y porcentajes, utilizando estas herramientas indispensables en el aprendizaje de las matemáticas financieras.

Unidad 2 Series y sucesiones. Inicia con las sucesiones o progresiones aritméticas, al explicar la forma de encontrar el *n*-ésimo término y la suma de los términos de la progresión. Después se estudian las progresiones geométricas, se indica la forma de encontrar el *n*-ésimo término, número de términos y la suma total de términos en una serie.

Unidad 3 Interés simple. Comienza con la explicación del concepto de interés simple, la tasa de interés y la forma de calcularlos. Se continúa con el interés simple o real, el ordinario o comercial, el monto, el valor presente o actual y el tiempo (plazo). También se incluye el descuento simple y se estudian los siguientes casos: el valor descontado o ganancia, tasa de rendimiento, valor de vencimiento, relación entre la tasa de descuento y la tasa de rendimiento, plazo y el pagaré. Por último, se ven las ecuaciones de valor equivalentes o de valor, la diferencia entre interés ordinario y exacto, ecuaciones de valor, descuento bancario y descuento comercial.

Unidad 4 Interés compuesto. Empieza con la forma de calcular el monto compuesto, la comparación del interés simple con el compuesto, el valor actual o presente y el tiempo. Después se estudia el concepto y forma de cálculo de las tasas de interés equivalentes, efectivas y nominales. También se ve la aproximación a la tasa de interés y la ecuación de valor y de tiempo equivalente.

Unidad 5 Anualidades. En esta se muestra el cálculo del valor futuro, el valor presente, el plazo y la renta para las anualidades simples o vencidas, anticipadas y diferidas. Además, se incluye el estudio de la anualidad general y anualidades perpetuas.

Unidad 6 Amortización. Se inicia con la amortización gradual y tasa negativa. Se presentan casos sobre cómo es la amortización de una deuda, hipotecas, inflación, refinanciamiento de un crédito y fondos de amortización. Se continúa con la depreciación y se explica en qué activos se aplica y en cuáles no. Después, se explica la forma de utilizar los diferentes métodos como la línea recta, porcentaje fijo, suma de dígitos, de unidades de producción o servicio y de fondo de amortización. Tanto para la amortización como para la depreciación se enseña cómo utilizar Excel para elaborar cuadros de amortización y depreciación.

Unidad 7 Análisis de proyectos de inversión. En esta unidad se muestra la metodología empleada en el ámbito financiero para realizar un proyecto de inversión, como es el caso del análisis de flujo de efectivo de un proyecto y su variabilidad, al emplear los conocimientos adquiridos en las unidades anteriores. Se estudia la forma de calcular el valor presente en la metodología denominada Valor Actual Neto (VAN) y el costo de capital (TIR) para calcular el valor presente de un proyecto de inversión.

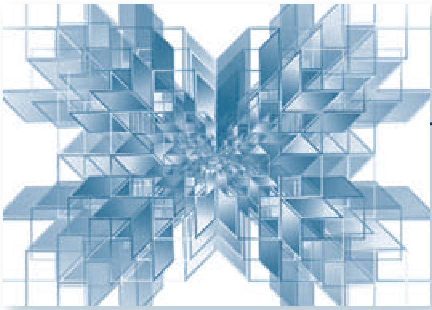
Unidad 8 Bonos y obligaciones. Se estudia lo referente a bonos y obligaciones como principales mecanismos de financiamiento para proyectos de inversión pública y privada. También a conocer y operar las operaciones básicas relativas a los bonos de descuento puro, las relativas a bonos de cupón, rendimiento actual y rendimiento al vencimiento.

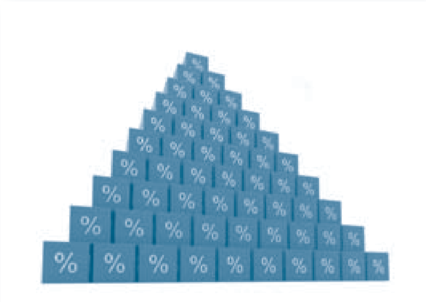
Es importante mencionar que los resultados de los problemas resueltos pueden variar un poco debido a los que se obtengan. Esto se debe a la forma en que esté programada la calculadora con respecto a la fracción decimal o el número de fracciones decimales que utilice.

Se espera que con ***Matemáticas Financieras Serie Patria***, nuestros lectores puedan resolver los problemas financieros que se les presenten.

Los autores

Contenido





UNIDAD 5 Anualidades 123

UNIDAD 6 Amortización y depreciación 195

UNIDAD 1

Exponentes, logaritmos y porcentajes

OBJETIVOS

- Identificar y manejar expresiones algebraicas con exponentes enteros positivos, negativos y fraccionarios.
- Aprender a dividir, multiplicar y reducir expresiones con radicales.
- Convertir expresiones con radicales a exponentes fraccionarios.
- Conocer y comprender el sistema de logaritmos y sus propiedades.
- Aprender a encontrar el logaritmo de base *a*, base 10 y base *e*.
- Aprender a encontrar el antilogaritmo de base 10.
- Realizar el cálculo e interpretación de los porcentajes.
- Aprender a utilizar la calculadora y hoja de cálculo Excel, con exponentes radicales y logaritmos.
- Comprender la trascendencia de los temas estudiados y su importancia en la aplicación en matemáticas financieras.

¿QUÉ SABES?

Aplica tus conocimientos y encuentra los resultados de cada problema

- Encontrar el resultado de las operaciones aritméticas $9 + 6 \times 4 - 5 + 48/8 =$
- El producto de las potencias $(x^3)(x^6)$ es igual a: ______________.
- Encontrar el resultado utilizando calculadora y computadora: $[(2)(6)]^3 =$

- Encontrar el resultado utilizando calculadora y computadora: $\left[\frac{1}{3}\right]^{-3} =$
- Encontrar el resultado utilizando calculadora y computadora: $\sqrt[3]{8^9} =$
- Encontrar el resultado utilizando calculadora y computadora: $5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} =$
- Encontrar el resultado utilizando calculadora y computadora: $2\sqrt[3]{11}\left(3\sqrt[3]{48}\right) =$
- Completar el cuadro

Logaritmo	Característica	Mantisa
$\text{Log}^3 = 0.4771$		

- Encontrar el resultado utilizando calculadora y computadora: $\log\sqrt[3]{999} =$
- Andrea compró un refrigerador en $5 400.00; ella dio 20% de enganche del precio del refrigerador. ¿Cuánto pagó de enganche (en pesos)?

1.1 Exponentes

La potenciación es la operación que toma una expresión algebraica como factor dos o más veces, y al resultado de la operación se le llama potencia.

Si $x \in R$ y $n \in N$ entonces:

$$x^n = \underbrace{(x)(x)\ldots(n)}_{n \text{ factores}} = n\text{-ésima potencia de } x$$

n entero positivo es el exponente

x es la base

- La primera potencia de una expresión es: $x^1 = x$
- La segunda potencia de una expresión es: $x^2 = (x)(x)$
- La tercera potencia de una expresión es: $x^3 = (x)(x)(x)$

Problema resuelto

1. *a)* $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $12^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1\,728$

c) $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$

d) $(x + a)^n = (x + a)(x + a)\ldots,\ n = 1, 2, 3\ldots$

Una expresión algebraica se obtiene al combinar una o varias operaciones, con números y símbolos, ejemplo: $4x^2$, $7x + 4a$, $6x + \sqrt{8x^5}$

En la calculadora la tecla para encontrar la potencia de una expresión es la siguiente:

y^x o $\wedge$ Encontrar la elevación a potencia.

Problema resuelto

2.

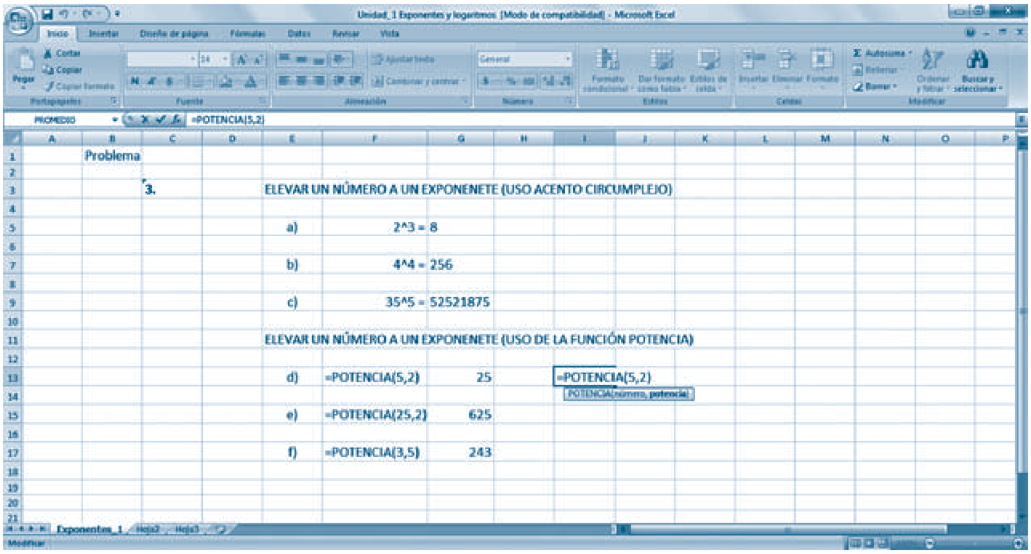
Problema	Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
a)	$(2^3) = 8$	**2** y^x **3** =	**8**
b)	$(4^3) = 64$	**4** $\wedge$ **3** =	**64**

Problema resuelto

3. Con la hoja de cálculo Excel

a) Con la función = *POTENCIA*(*número, potencia*)

b) Con el acento circunflejo = *número*[*alt gr*] + [^] *potencia*



1.2 Exponentes enteros

1.2.1 Producto de potencias de igual base

$$(a^n)(a^m) = a^{n+m}$$

Problema resuelto

4. *a*) $(3^2)(3^4) = 3^6 = 729$

b) $(12^3)(12^2) = 12^5 = 248\,832$

c) $(a^2)(a^6) = a^{4+6} = a^{10}$

d) $(x+a)^2(x+a)^3 = (x+a)^5$

Problema resuelto

5.

Problema	Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
a)	$(2^2)(2^4) = 2^{2+4} = 2^6 = 64$	2 y^x 2 × 2 y^x 4 =	64
b)	$(4^3)(4^2) = 64 \times 16 = 1\,024$	3 ∧ 4 × (2 ∧ 4) =	1 024

1.2.2 Elevar una potencia a otra potencia

$$(a^n)^m = a^{(n)(m)}$$

Problema resuelto

6. *a*) $(4^2)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6 = 4\,096$

b) $(8^2)^4 = 8^{2\cdot 4} = 8^8 = 16\,777\,216$

c) $(4^2)^3 = 4^{(2)(3)} = 4^6 = 4\,096$

d) $(2^2)^6 = 2^{2\cdot 6} = 2^{12} = 4\,096$

e) $((x+m)^3)^5 = (x+m)^{3\cdot 5} = (x+m)^{15}$

f) $(2^5)^4 = 2^{(5)(4)} = 2^{20} = 1\,048\,576$

1.2.3 Producto elevado a una potencia n

El producto elevado a una potencia se calcula con la siguiente expresión:

$$[(a)(b)]^n = (a)^n(b)^n$$

Problema resuelto

7. *a*) $[(2)(3)]^2 = (2^2)(3^2) = 4 \times 9 = 36$

b) $[(4)(3)]^3 = (4^3)(3^3) = 64 \times 27 = 1\,728$

c) $[(8)(5)]^4 = (8^4)(5^4) = 4\,096 \times 625 = 2\,560\,000$

d) $[(x+1)(x+a)]^2 = (x+1)^2(x+a)^2$

e) $[(2)(5)]^2 = (2^2)(5^2) = (4)(25) = 100$

f) $[(3)(2)]^3 = (3^3)(2^3) = (27)(8) = 216$

1.2.4 Elevar un cociente a una potencia n

El producto elevado a una potencia se calcula con la siguiente expresión:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad \text{si } b \neq 0$$

Problema resuelto

8. *a*) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

b) $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4^3}{7^3} = \frac{64}{343}$

c) $\left[\frac{6}{7}\right]^2 = \left[\frac{6^2}{7^2}\right] = \frac{36}{49} = 0.73469388$

d) $\left(\frac{8}{7}\right)^4 = \frac{8^4}{7^4} = \frac{4\,096}{2\,401}$

e) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$

f) $\left[\frac{3}{7}\right]^3 = \left[\frac{3^3}{7^3}\right] = \frac{27}{343} = 0.078717$

1.3 Exponente negativo

Se encuentra al dividir dos potencias de igual base, con un exponente menor en el numerador y mayor en el denominador.

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$$

Se conoce a $1/a$ como el inverso multiplicativo de a, cuando $a \neq 0$.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Problema resuelto

9. *a*) $ax^{-1} = \frac{a}{x}$

b) $m^2\,(xy)^{-1} = \frac{m^2}{xy}$

c) $4^{-3} = 0.015625$

d) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0.\overline{111}$

e) $a^2\, 4^{-3} = \frac{a^2}{4^3} = \frac{a^2}{64}$

f) $\left[\frac{1}{2}\right]^{-9} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \frac{1}{\frac{1^9}{2^9}} =$

$= \frac{1}{\frac{1}{512}} = \frac{1}{0.001953} = 512$

1.4 Radicales

1.4.1 Exponentes fraccionarios

El exponente fraccionario se obtiene de extraer una raíz a una potencia.

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a};\ \text{con } a \in R^{+} \text{ y } n \neq 0$$

n es el índice de la raíz

a cantidad subradical o radicando

$\sqrt{\ }$ símbolo del radical

Problema resuelto

10. a) $x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $am^{1/3} = a\sqrt[3]{m}$

c) $(x+a)^{2/5} = \sqrt[5]{(x+a)^2}$

d) $8^{1/2} = \sqrt[2]{8}$

$\sqrt[x]{y}$ o $x^{1/y}$ o $\wedge$ teclas para encontrar raíces con índice igual a dos o superior a dos.

Si el índice es un número par, entonces la raíz es un número positivo y debe satisfacer:

$$\sqrt[n]{a} = c \Leftrightarrow c^n = a$$

Si $c^n = a$ y n es un entero positivo, entonces c es la raíz n-ésima de a.

Problema resuelto

11. a) $(-3)^2 = 9$, entonces: la raíz cuadrada de 9 es +3 y –3, $\sqrt[2]{9} = \pm 3$

b) $(-2)^3 = -8$, entonces: la raíz cúbica de –8 es solamente –2, $\sqrt[3]{-8} = -2$

$$\sqrt[n]{a}\begin{cases}\text{Si } n \text{ es par y } a \text{ positiva entonces: } \textit{la raíz es positiva y negativa}\\ \text{Si } n \text{ es impar y } a \text{ negativa entonces: } \textit{la raíz es solamente negativa}\end{cases}$$

Si m y n son enteros, la base a diferente de cero y la potencia fraccionaria es m/n, se puede expresar como radical, en donde n es el índice del radical, a es el subradical y m el exponente del subradical.

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Problema resuelto

12. *a)* $\sqrt[3]{8^5} = 8^{5/3} = 32$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{109} = \left(\frac{1}{2}\right)(10.44) = 5.22$

c) $3\sqrt[3]{6^2} = 3\sqrt[3]{36} = 3(36^{1/3}) = (3.30)(3) = 9.9$

d) $\sqrt[3]{-27} = (-27)^{1/3} = -3$

Problema resuelto

13.

	Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
a)	$\sqrt[4]{16} = 2$	**4** $\sqrt[n]{x}$ **16** =	**2**
b)	$16^{1/4} = 2$	**1** ÷ **4** = *Min* C **16** y^x *RM* =	**2**
Para otro tipo de calculadora			
c)	$\sqrt[4]{64} = 2.828$	**4** *SHIFT* $\sqrt[x]{\ }$ **64** =	**2.828**
d)	$27^{1/3} = 3$	**(1** ÷ **3**) = *Min* C **27** ∧ *RM*) =	**3**

Con la hoja de cálculo Excel

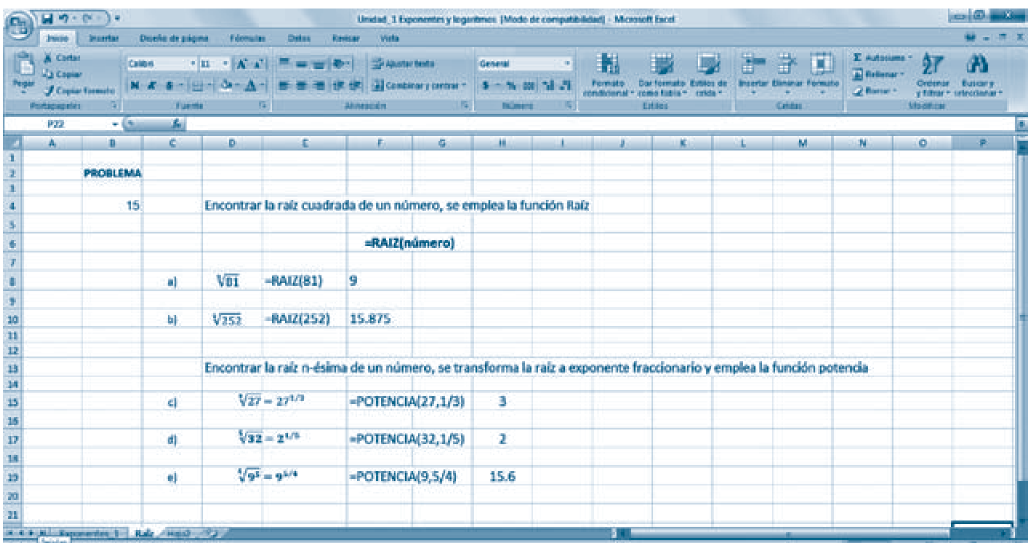
Problema resuelto

a) Con la función = *RAIZ*(*número*), solo se obtiene la raíz cuadrada de un número. Por ejemplo, la expresión $\sqrt[2]{9} = 3$, en Excel con la función = *RAIZ*(9)

b) Con el acento circunflejo = *número*[*alt gr*] + [^] *potencia*. Por ejemplo, la expresión $\sqrt[3]{27} = 3$, en Excel = 27 ^ (1/3)

Problema resuelto

Problemas en Excel



1.5 Suma de radicales semejantes

En los radicales semejantes se deben sumar algebraicamente los coeficientes, y la suma de estos es el coeficiente del radical común.

Problema resuelto

14. *a)* $2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (2-4)\sqrt{5}$
$= -2\sqrt{5}$
$= -4.472$

b) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (2+3)\sqrt{7}$
$= 5\sqrt{7}$
$= 5 \times 2.645$
$= 13.228$

c) $3\sqrt{9} + 4\sqrt{9} = (3+4)\sqrt{9}$
$= 7(3)$
$= 21.0$

d) $5\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = (5-3+2)\sqrt{6}$
$= 4\sqrt{6}$
$= 4 \times 2.4494$
$= 9.80$

1.6 Suma y resta de radicales del mismo índice con subradical diferente

Problema resuelto

15. *a)* $2\sqrt{5} - 3\sqrt{9} = 2(2.236) - 3(3)$
$= 4.472 - 9$
$= -4.528$

b) $4\sqrt{16} + 3\sqrt{7} = 4(4) + 3(2.64)$
$= 16 + 7.937$
$= 23.937$

c) $5\sqrt{25} + 4\sqrt{11} = 5(5) + 4(3.3166)$
$= 25 + 13.26$
$= 38.266$

d) $5\sqrt{64} + 2\sqrt{10} = 5(8) + 2(3.162)$
$= 40 + 6.324$
$= 46.324$

e) $3\sqrt{21} - 7\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 3(4.58) + (-7+4)\sqrt{6}$
$= 13.748 - 3\sqrt{6}$
$= 6.399$

f) $6\sqrt{26} - 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 6(5.099) + (-3+2)\sqrt{6}$
$= 30.59 - \sqrt{6}$
$= 28.145$

1.7 Multiplicación de radicales del mismo índice

En la multiplicación de radicales del mismo índice se deben multiplicar los radicales, y el resultado de esta operación es el nuevo subradical, siendo el índice el mismo en el nuevo radical.

$$\sqrt[n]{a}\left(\sqrt[n]{b}\right) = \sqrt[n]{(a)(b)}$$

Problema resuelto

16. *a)* $\sqrt{5}\left(\sqrt{9}\right) = \sqrt{5 \times 9} = \sqrt{45} = 6.7$

b) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}\right) = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

c) $3\sqrt{5}\left(4\sqrt{12}\right) = 3(2.236)[4(3.464)]$
$= (6.708)(13.8564)$
$= 92.952$

d) $\sqrt[3]{64}\left(\sqrt[3]{10}\right) = 4(2.15) = 8.617$

e) $2\sqrt[3]{81}\left(\sqrt[3]{27}\right) = 2(4.32 \times 3)$
$= 2(12.96)$
$= 25.96$

f) $5\sqrt{25}\left(3\sqrt{18}\right) + 2 = 5(5)[3(4.24264)] + 2$
$= (25)(12.72792) + 2$
$= 318.198 + 2$
$= 320.198$

1.8 División de radicales del mismo índice

En la división de radicales del mismo índice se obtiene un radical con el mismo índice y el cociente de ambos radicales.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Problema resuelto

17. a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{12}{5}}$
$= \sqrt{2.4}$
$= 1.549$

b) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}}$
$= \sqrt{0.36}$
$= 0.6$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{27}}$
$= \sqrt[3]{3}$
$= 1.44$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{84}}{\sqrt[3]{11}} = \sqrt[3]{\dfrac{84}{11}}$
$= \sqrt[3]{7.636}$
$= 1.969$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{93}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\dfrac{93}{4}}$
$= \sqrt[5]{23.25}$
$= 1.876$

f) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{11}} = \sqrt[4]{\dfrac{48}{11}}$
$= \sqrt[4]{4.36364}$
$= 1.445$

Problema resuelto

Resuelve las ecuaciones exponenciales

18. a) $\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{12} = \left(1+\dfrac{0.125}{6}\right)^{6}$

$\sqrt[12]{\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{12}} = \sqrt[12]{(1+0.020833)^{6}}$

$1+\dfrac{i}{12} = \sqrt[12]{1.13169}$

$\dfrac{i}{12} = (1.13169)^{1/12} - 1$

$i = 12\left[(1.13169)^{0.0833} - 1\right]$

$i = 12(0.01036)$

$i = 0.12436$

b) $e = \left[1+\dfrac{0.22}{6}\right]^{6} - 1$

$e = (1.03667)^{6} - 1$

$e = 1.2412 - 1$

$e = 0.2412$

c) $\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{0.116}{4}\right)^{4}$

$$\sqrt[12]{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}}=\sqrt[12]{(1+0.029)^{4}}$$

$$1+\frac{i}{12}=\sqrt[12]{1.1211443}$$

$$\frac{i}{12}=(1.1211443)^{1/12}-1$$

$$i=12\left[(1.1211443)^{0.0833}-1\right]$$

$$i=12(0.009574)$$

$$i=0.1149$$

1.9 Redondeo

Redondeo de una cantidad hacia arriba a cuatro cifras.

Problema resuelto

19.

	Número	Redondeo
a)	0.204688	0.2047
b)	9.711768	9.712
c)	0.7988745	0.7989

Redondeo hacia abajo a cuatro cifras de las siguientes cantidades:

Problema resuelto

20.

	Número	Redondeo
a)	0.6184142	0.6184
b)	0.1246397	0.1246
c)	3.4161853	3.416

1.10 Notación científica

Cuando se trabaja con números muy grandes o pequeños utilizamos la notación científica. El punto decimal se mueve a la derecha cuando el exponente es positivo y a la izquierda si es negativo, el exponente indica el número de lugares que se tiene que mover el punto decimal.

EXP o *EE* tecla para escribir la notación científica en la calculadora

Problema resuelto

21.

a)	$12\times10^{-2}=0.12$	**12** *EXP* – **2** =	**0.12**
b)	$1.578E-1=0.1578$	**1.578** *EXP* – **1** =	**0.1578**
c)	$0.9510E+2=95.1$	**0.9510** *EXP* + **2** =	**95.1**

Forma de representar una cantidad en notación científica hacia arriba.

Problema resuelto

22.

	Número	Notación científica	Con calculadora *EXP*
a)	679.19	6.7919×10^{2}	6.7919×10^{02}
b)	48.56	4.856×10^{1}	4.856×10^{01}
c)	5.31	5.31×10^{0}	5.31
d)	258 916	2.58916×10^{5}	2.58916×10^{05}

Forma de representar una cantidad en notación científica hacia abajo.

Problema resuelto

23.

	Número	Notación científica	Con calculadora *EXP*
a)	0.3471	3.471×10^{-1}	3.471×10^{-01}
b)	0.0126	1.26×10^{-2}	1.26×10^{-02}
c)	0.00879	8.79×10^{-3}	8.79×10^{-03}
d)	0.0002978	2.978×10^{-4}	2.978×10^{-04}
e)	793.24	7.9324×10^{2}	7.9324×10^{02}

El logaritmo de un número es el exponente al que se debe elevar otro número llamado base para obtener un tercer número.

Problema resuelto

Ejemplos:

24. *a*) $9^0 = 1$ *c*) $9^2 = 81$ *e*) $9^4 = 6\,561$

b) $9^1 = 9$ *d*) $9^3 = 729$ etcétera

La base es un número positivo y este es la base de un sistema de logaritmos.

Sistema de logaritmos
- * Logaritmos vulgares o Briggs la base es 10 ($\log_{10} x = \log x$)
- * Logaritmos naturales o neperianos la base es: $e = 2.71828182845\ldots$
- * $\log_e x = \ln x$

Se puede tomar como base para un sistema de logaritmos cualquier número positivo.

1.11 Propiedades de los logaritmos base 10

1.11.1 Progresiones

Problema resuelto

25 *a*) $10^0 = 1$ *c*) $10^2 = 100$ *e*) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0.01$

b) $10^1 = 10$ *d*) $10^{-1} = \dfrac{1}{10^1} = 0.1$ *f*) $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = 0.001$

1.12 Únicos números cuyos logaritmos son enteros

Problema resuelto

26. *a*) log 1 = 0 *c*) log 100 = 2 *e*) log 0.01 = –2
b) log 10 = 1 *d*) log 0.1 = –1 *f*) log 0.001 = –3

El logaritmo de los números entre 1 y 10, su logaritmo se encuentra entre 0 y 1.

Problema resuelto

27. *a*) log 1 = 0 *c*) log 3 = 0.4771 *e*) log 9 = 0.9542
b) log 2 = 0.3010 *d*) log 8 = 0.9031 *f*) log 10 = 1

El logaritmo de los números entre 100 y 1 000, su logaritmo se encuentra entre 2 y 3.

Problema resuelto

28. *a*) log 100 = 2 *c*) log 500 = 2.6990 *e*) log 700 = 2.8451
b) log 200 = 2.3010 *d*) log 600 = 2.7781 *f*) log 1 000 = 3

Por analogía el logaritmo de los números entre 1 000 y 10 000, su logaritmo se encuentra entre 3 y 4.

Problema resuelto

29. *a*) log 2 000 = 3.3010 *c*) log 6 000 = 3.7781
b) log 5 000 = 3.6990 *d*) log 10 000 = 4

Alerta

Los números negativos no tienen logaritmo.

Todo logaritmo de un número que no sea potencia de 10 con exponente entero, está formado de una parte entera y una parte decimal.
A la parte entera se le llama característica y a la parte decimal mantisa, por ejemplo:

Problema resuelto

30.

	Logaritmo	Característica	Mantisa
a)	log 4 = 0.6020	0	0.6020
b)	log 600 = 2.7781	2	0.7781
c)	log 7 500 = 3.8750	3	0.8750
d)	log 85 000 = 4.9294	4	0.9294

Mantisa { * Siempre es Positiva

Característica {
* Positiva si el número es mayor o igual a 10
* Cero si el número es mayor o igual a 1 y menor que 10
* Negativa si el número es mayor que 0 y menor que 1

Para conocer la característica de un número mayor a 1, se resta una unidad al número total de cifras de la parte entera del número.

Problema resuelto

31.

	Logaritmo	Cifra	Operación	Característica	Mantisa
a)	log 5 = 0.6989	1	1 − 1 = 0	0	0.6989
b)	log 650 = 2.8129	3	3 − 1 = 2	2	0.8129
c)	log 5 700 = 3.7558	4	4 − 1 = 3	3	0.7558
d)	log 76 000 = 4.8808	5	5 − 1 = 4	4	0.8808

Para conocer la característica de un número menor a 1, se suma una unidad al número total de ceros que hay entre el punto decimal y la primera cifra significativa del número.

Problema resuelto

32.

	Logaritmo	Ceros	Operación	Característica	Mantisa
a)	log 0.1 = −1	0	0 + 1 = 1	−1	0
b)	log 0.01 = −2	1	1 + 1 = 2	−2	0
c)	log 0.001 = −3	2	2 + 1 = 3	−3	0
d)	log 0.0001 = −4	3	3 + 1 = 4	−4	0

Al escribir un **logaritmo**, cuya característica es **negativa**, el signo menos se coloca sobre la característica y nunca delante de ella, porque las mantisas son positivas, por lo tanto, un logaritmo no se debe representar como: −2.3846; la forma correcta es: $\bar{2}.3846$.

En la calculadora cuando la característica de un número menor a 1, en la pantalla indicador aparece de la siguiente forma: log 0.6 = −0.2218, lo que significa que la característica es −1 y la mantisa 0.7782. Si la característica de un número igual o mayor a 1, en la pantalla aparece de la siguiente forma: log 260 = 2.414973, lo que significa que la característica es 2 y la mantisa 0.414973.

Para encontrar el logaritmo utilizando la calculadora se sigue la siguiente secuencia de tecleo dependiendo de la calculadora.

log *x* o *x* log

ln *x* o *x* ln

Alerta

En honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), se eligió la letra *e* para tomarla como base del logaritmo natural (o neperiano).

Problema resuelto

33.

	Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
a)	log 57 = 1.755874856	**57** log =	**1.755874856**
b)	log 0.8735 = −0.05873709 o $\bar{1}$.941262909	log **0.8735** =	**−0.05873709**
c)	ln 26 = 3.2580906	ln **26** =	**3.2580906**
d)	ln *e* = 1	ln **2.718281828459** =	**1**

El logaritmo de base ***a*** se define como:

> Sea ***a*** la base del logaritmo, en donde ***a*** es un número real distinto de uno, se tiene:
>
> $$y = \log_a x \quad \text{si y solo si} \quad x = a^y$$
>
> para toda $x > 0$, todo número real y

Si analizamos la definición encontramos dos funciones: una logarítmica ($y = \log_a x$) y la otra exponencial ($x = a^y$), con la misma base $\boldsymbol{a}$.

Exponente

$\log_a x = y \qquad a^y = x$

Base

De la interpretación del logaritmo como un exponente están las siguientes propiedades:

Núm.	Propiedad	Motivo
1.	$\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$
2.	$\log_a a = 1$	$a^1 = a$
3.	$\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$
4.	$a^{\log_a x} = x$	$a^y = x$

Problema resuelto

34.

	$\log_a x = y$	$x = a^y$
a)	$\log_8 x = 2$	$8^2 = x$
b)	$\log_a 16 = 2$	$a^2 = 16$
c)	$\log_{10} x = y$	$10^y = x$

1.13 Propiedades de los logaritmos

1.13.1 Logaritmo del producto

El logaritmo del producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log(A \times B) = \log A + \log B$$

Problema resuelto

35. *a)* $\log(4 \times 10) = \log(4) + \log(10) = 0.602059 + 1 = 1.602059$

b) $\log(12 \times 31) = \log(12) + \log(31) = 1.07918 + 1.49136 = 2.57054$

c) $\log(231 \times 51) = \log(231) + \log(51) = 2.36361 + 1.70757 = 4.07118$

1.13.2 Logaritmo de un cociente

El logaritmo del cociente es igual al logaritmo dividendo menos el logaritmo divisor.

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

Problema resuelto

36. *a)* $\log \frac{12}{8} = \log(12) - \log(8) = 1.07918 - 0.90308 = 0.17609$

b) $\log \frac{5}{17} = \log(5) - \log(17) = 0.69897 - 1.23044 = -0.53147$

c) $\log \frac{33}{15} = \log(33) - \log(15) = 1.51851 - 1.17609 = 0.34241$

1.13.3 Logaritmo de una potencia

El logaritmo del cociente es igual a la multiplicación del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log A^n = n(\log A)$$

Problema resuelto

37. *a)* $\log\ 3^5 = 5[\log\ (3)] = 5(0.47712) = 2.38560$

b) $\log\ 23^4 = 4[\log\ (23)] = 4(1.36172) = 5.44691$

c) $\log\ 247^3 = 3[\log\ (247)] = 3(2.39269) = 7.17809$

1.13.4 Logaritmo de una raíz

El logaritmo de la raíz es igual al logaritmo del subradical dividido entre el índice del radical.

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}$$

Problema resuelto

38. *a)* $\log\ \sqrt{57} = \frac{\log\ 57}{2} = 0.8779$

b) $\log \sqrt[3]{39} = \frac{\log\ 39}{3} = 0.5304$

c) $\log\ \sqrt[4]{72} = \frac{\log\ 72}{4} = 0.4643$

1.14 Antilogaritmo

Cuando se conoce el logaritmo de un número desconocido x, al encontrar el valor de x a este proceso se le conoce como antilogaritmo y se abrevia **antilog**.

Problema resuelto

39. *a)* Sea el log 76 = 1.88081, encontrar el antilogaritmo de 1.88081 es: 76

b) Sea el log 25 = 1.39794, encontrar el antilogaritmo de 1.39794 es: 25

c) Sea el log 397 = 2.59879, encontrar el antilogaritmo de 2.59879 es: 397

Utilizando la calculadora existen dos caminos para encontrar el antilogaritmo:

SHIFT log x o 2nf log x

Problemas resueltos

40. Sea el log 15 = 1.1760912, encontrar el antilogaritmo de 1.1760912 es: 15

Con calculadora

a) log 15 = 1.1760912, encontrar el antilogaritmo de:

SHIFT log 1.1760912 = 15

b) log 15 = 1.1760912, encontrar el antilogaritmo de:

1.1760912 2nf log = 15

41. Sea el log $x = 1.30102999$ y si $10^{1.30102999} = x$,

$\therefore$ x el antilogaritmo de 1.30102999, se representa como:

$x = \text{antilog } 1.30102999 = 10^{1.30102999}$

$x = 10$ ^ 1.30102999

$x = 20$

Problemas resueltos

Con calculadora

42.

Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
antilog 1.5563025 = 36	SHIFT log **1.5563025** = 2nf log **1.5563025** =	**36** **36**
$10^{1.5563025} = 36$	**10** y^x **1.5563025** = **10** ^ **1.5563025** =	**36** **36**

43.

Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
antilog 2.1986571 = 158 $10^{2.1986571} = 158$	2nf log = **2.1986571** **10** y^x **2.1986571** =	**158** **158**

Problema resuelto

44. Encuentra el resultado de $x = 3.2^{1.2} \times 5$

Solución:

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad:

$\log x = \log (3.2^{1.2} \times 5)$

$\log x = \log 3.2^{1.2} + \log 5$

$\log x = 1.2 \log 3.2 + \log 5$

1.15 Logaritmos naturales

Una función logarítmica de base $a(y = \log_a x)$ es la inversa de una función exponencial $(x = a^y)$. A partir de esto se puede llegar a una definición.

Cuando se sustituye la base a por la base e, se obtiene la siguiente expresión (si $x > 0$):

$$y = \log_e x, \text{ si y solo si } x = e^y$$

A partir de lo anterior la definición de logaritmo natural es:

$$\ln x = \log_e (x), \text{ para todo } x > 0$$

Alerta

Definición:
El $\log_a x$ se expresa de la siguiente forma:

$y = \log_a x$, si y solo si $x = a^y$

1.15.1 Leyes de los logaritmos naturales

1. $\ln (AB) = \ln A + \ln B$
2. $\ln \left(\dfrac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$
3. $\ln A^n = n \ln A$

Es importante aclarar que $\ln a^n \neq (\ln a)^n$

4. $\ln \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \ln A$

Cambio de base:

5. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Teorema:

$$a^{\log_a x} = x \Rightarrow e^{\ln x} = x \Rightarrow \ln e^x = x$$

Propiedades para cuando $x = 0$:

En cualquier sistema de logaritmos:

1. El logaritmo de la base (a) es uno.

$$e^1 = e \therefore \ln e = 1$$

2. El logaritmo de uno es cero, si la base es a se tiene:

$$e^0 = 1 \therefore \ln 1 = 0$$

Expresión para cambiar de base

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} \qquad \log e = \frac{1}{\ln 10}$$

Problema resuelto

45. Encuentra el valor de x

$\ln x = 2.3$

$e^{\ln x} = e^{2.3}$

$x = e^{2.3}$

$x = 9.974$

1.16 Tanto por ciento

Todo número puede ser divisible entre una o varias partes, entonces si todo número lo podemos dividir en las partes que se nos ocurra, por ejemplo en diez partes, en veinticinco, en cien, en quinientas, en mil, etc. Cuando hablamos en un caso particular del tanto por ciento de un número a una o varias de las cien partes iguales en que fue dividido el número.

Alerta

El signo de tanto por ciento (%) aparece por un error al utilizar la abreviatura de ciento (Cto.), esta siempre se empleaba en las operaciones comerciales o mercantiles.

Unidad = 1

1	2	3	.	.	.	.
						100

Cada cuadro representa un centésimo (1/100) del número (1).

Problema resuelto

Ejemplos:

46. *a)* Si seleccionamos 6 cuadros, estos representan 6 partes de un total de 100 partes y se representa de la siguiente forma: 6/100, expresándolo en tanto por ciento: 6%.

Unidad = 1

1	2	3	4	5	6	
						100

b) Si deseamos conocer el 3% de 80, lo que se debe hacer es dividir a 80 en cien partes iguales y de ellas se toman tres.

Unidad = 80

1	2	3				
						100

El 3% de 80 o 3/80 de 80 equivale a tres centésimas partes de 80.

El 100% de 80 es 80, el 3% de 80, es lo que se desea conocer *x*, para encontrar el valor de *x* se emplea la regla de tres.

Datos	Tanto por ciento (%)	Partes
Supuesto	100	80
Pregunta	3	*x*

Entonces:

$$x = \frac{80 \times 3}{100}$$

$$x = 2.4$$

El 3% de 80 es 2.4

Problema resuelto

47. *a*) Obtén el 16% de 779

b) Obtén el 18% de 250

c) Obtén el 23.75% de 1 890

Solución

a) El 16% de 779 $= \left(\frac{16}{100}\right)(779) = 124.64$

b) El 18% de 250 $= \left(\frac{18}{100}\right)(250) = 45$

c) El 23.75% de 1 890 $= \left(\frac{23.75}{100}\right)(1\,890) = 448.875$

Problema resuelto

48. ¿Qué porcentaje de:

a) 17 500 es 2 300

b) 22 500 es 13 250?

Solución

a) $x(17\,500) = 2\,300$

$$x = \frac{2\,300}{17\,500} = 0.1314 = 13.14\%$$

b) $x(22\,500) = 13\,250$

$$x = \frac{13\,250}{22\,500} = 0.5888 = 58.88\%$$

Problema resuelto

49. ¿De qué número es:

a) 18 el 6% *b)* 350 el 5% *c)* 900 el 36%?

Solución

a) x es la base, el 6% de x es igual a 18

$x(0.06) = 18$

$$x = \frac{18}{0.06} = 300$$

b) $x(0.05) = 350$

$$x = \frac{350}{0.05} = 7\,000$$

c) $x(0.36) = 900$

$$x = \frac{900}{0.36} = 2\,500$$

Problema resuelto

50. *a)* El transporte en el D.F., costaba 60 centavos en 1970 y cinco pesos en 2012, ¿qué incremento ha tenido el precio del transporte? Expresarlo en porcentaje.

b) El precio del bolillo era de un peso en el año 2010 y en 2012 cuesta \$1.50, ¿qué incremento ha tenido el precio del bolillo? Expresarlo en porcentaje.

Solución

a) Sea x el porcentaje, expresado en forma decimal. Como el % de 0.60 es igual al incremento se tiene:

$x(0.60) = (5.00 - 0.60)$

$x(0.60) = 4.4$

$x = 7.3$

$x = 733.33\%$

b) Sea x el porcentaje, expresado en forma decimal. Como el % de \$1.00 es igual al incremento se tiene:

$x(1.00) = (1.50 - 1.00)$

$x(1.00) = 0.5$

$x = 0.5$

$x = 50\%$

El precio de venta de un producto o servicio, se determina aumentando al costo del artículo una cantidad suficiente para cubrir los gastos de operación para poder tener una utilidad, a esta cantidad se le llama utilidad bruta. Y se conoce como utilidad neta a la cantidad que queda después de cubrir los gastos de operación.

Los gastos de operación son las cantidades que se pagan por concepto de luz, agua, renta, seguros, salarios, publicidad, etcétera.

El costo de un artículo son todos los gastos realizados para fabricar o adquirir el artículo. Mientras que el costo de un servicio son todos los gastos realizados para proporcionar el servicio.

Alerta

Utilidad bruta =
Gastos de operación +
Utilidad neta.

Problema resuelto

51. Un fabricante desea producir ángeles de porcelana y venderlos cada uno en \$540.00. Con la experiencia de la fabricación de productos anteriores, él considera que si añade 65% del costo de producción para cubrir los gastos de operación y la utilidad neta, ¿cuánto puede gastar para poder producir los ángeles?

Solución:

x es el costo de producción

Utilidad bruta = 65% de $x = 0.65x$

Precio de venta = $x + 0.65x = 540$

$1.65x = 540$

$$x = \frac{540}{1.65}$$

$x = \$327.27$

Cuando se desea conocer la tasa de interés compuesto (i) es necesario despejarla de la ecuación de monto de interés compuesto.

$$M = C(1 + i)^n$$

Existen dos caminos para despejar la tasa i; a continuación se muestran las dos alternativas.

Raíz	Logaritmos
$\frac{M}{C} = (1+i)^n$	$\frac{M}{C} = (1+i)^n$
$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = \sqrt[n]{(1+i)^n}$	$\log\left(\frac{M}{C}\right) = \log(1+i)^n$
$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = 1+i$	$\log\left(\frac{M}{C}\right) = n\log(1+i)$
$i = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}}\right] - 1 \quad 4.6$	$\log(1+i) = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{n}$
	$1+i = \text{antilog}\left[\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{n}\right]$
	$i = \text{antilog}\left[\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{n}\right] - 1 \quad 4.6a$

Problema resuelto

52. El gerente de una empresa depositó en una institución financiera \$600 000.00 y después de tres años y cuatro meses le entregarán la cantidad de \$950 000.00. ¿Cuál es la tasa de interés bimestral que le dio la institución financiera a su inversión?

Solución

Datos:

$C = \$600\,000.00$ $\quad$ $M = \$950\,000.00$ $\quad$ $n = 3$ años y 4 meses $\quad$ $n = 20$ bimestres

Incógnita i **Desarrollo**

$$i = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}}\right] - 1$$

,

$$i = \left[\sqrt[20]{\frac{950\,000}{600\,000}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[20]{1.583333}\right] - 1$$

$$i = (1.58333)^{1/20} - 1$$

$$i = (1.58333)^{0.05} - 1$$

$$i = 1.023243 - 1$$

$$i = 0.023243 \quad \text{bimestral}$$

$$T = 2.3243\% \quad \text{bimestral}$$

Problema resuelto

53. El señor Martínez invirtió $22 000.00 en Banorte, por un plazo de cuatro años, con un interés de 9.7% capitalizable trimestralmente. Encontrar el monto al final de los cuatro años.

Solución:

Datos:

$C = \$22\,000.00$

$T = 9.7\%$ A. C. Trimestral

$np = (2.5$ años$)$ $(4$ trimestres por año$) = 10$ trimestres

$n = 2.5$ años

$p = 4$ trimestres al año

Incógnita M **Desarrollo**

$$M = C\left[1 + \frac{i}{p}\right]^{np}$$

$$M_1 = 22\,000\left[1 + \frac{0.097}{4}\right]^{10}$$

$$M_1 = 22\,000\,[1.02425]^{10}$$

$$M_1 = 22\,000\,(1.2707)$$

$$M_1 = 27\,956.47$$

Alerta

Tasa efectiva o rendimiento anual efectivo. Es la tasa de interés simple que da el mismo rendimiento en un año que la tasa compuesta.

La tasa efectiva (e) capitalizable anualmente es equivalente a la tasa nominal (i) compuesta en "p" periodos por año.

[Tasa efectiva al cabo de un año] = [Tasa nominal en p periodos por año]

Dividiendo ambos términos entre C se tiene:

$$C(1+e) = C\left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$$

$$e = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p - 1$$

La tasa efectiva es la que actúa directamente sobre un periodo.

Problema resuelto

54. Encontrar la tasa efectiva que corresponde a una tasa nominal de 22% capitalizable bimestralmente.

Solución:

$$e = \left[1 + \frac{0.22}{6}\right]^6 - 1$$

$$e = (1.03667)^6 - 1$$

$$e = 1.2412 - 1$$

$$e = 0.2412$$

$$e = 24.12\% \quad \textit{anual}$$

Es lo mismo invertir al 22% capitalizable bimestralmente que al 24.12% con capitalización anual.

Problema resuelto

55. Crecimiento de población

El crecimiento de la población en la República Mexicana en el año 2005 es de aproximadamente 103.9 millones de habitantes, la tasa de crecimiento promedio 1.3% anual. Determinar la población esperada para el año 2013.

Se sabe que el comportamiento del crecimiento de una población es aproximadamente exponencial, a partir de lo anterior resolver el problema utilizando la siguiente expresión:

$$P = P_0 e^{kt}$$

En donde:

Literal	Significado
P	Número de habitantes de los esperados para un determinado año.
P_0	Número de habitantes en el año de referencia o base.
k	Tasa de crecimiento promedio anual.
t	Tiempo transcurrido.

Solución:

Datos

$P_0 = 103.9$ millones de habitantes

$k = 1.3\%$ anual

$t = 8$ años

Incógnita P

Sustituyendo valores

$P = P_0 e^{kt}$

$P = 103.9\,[e^{(0.013)(8)}]$

Aplicando logaritmos a los dos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} P &= P_0 e^{kt} \\ \ln P &= \ln 103.9\left[e^{(0.013)(8)}\right] \\ \ln P &= \ln 103.9 + (0.013)(8)\left[\ln(e)\right] \\ \ln P &= 4.643428898 + 0.104\,(\ln e) \\ \ln P &= 4.643428898 + 0.104\,(1) \\ P &= \textit{anti}\ln 4.747428898 \end{aligned}$$

$P = 115.287$ millones de habitantes

Problema resuelto

Con calculadora

56. *a)* Calcular 16% de $1 500.00

b) Encontrar qué porcentaje es $1 660.00 de $2 880.00

Solución:

a)

Problema	Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
Calcular el porcentaje de una cantidad.	$x = \frac{16 \times 1500.00}{100}$	**1 500** × **16** *SHIFT* %	**240.00**
	$x = \frac{24\,000.00}{100}$	**1 500** × **16** *2da.* = =	**240.00**
	$x = \$240.00$	**1 500** × **16** %	**240.00**

b)

Problema	Operación	Teclas en la calculadora	Resultado en pantalla
Calcular el porcentaje a que le corresponde una parte de la cantidad.	$x = \frac{1\,660}{2\,880}$	**1 660** ÷ **2 880** *SHIFT* %	**57.64**
	$x = \frac{1\,660.00}{2\,880.00}$	**1 660** ÷ **2 880** *2da.* =	**57.64**
	$x = 0.576$	**1 660** ÷ **2 880** % =	**57.64**
	$x = 57.64\%$		

1.1 *a)* $2^6 =$ *c)* $(x+4)^3 =$

b) $13^4 =$ *d)* $(3x+a)^n =$

1.2 Realizar la operación con calculadora y con la hoja de cálculo:

a) $(5^3) =$ *c)* $(3^6) =$

b) $(14^4) =$ *d)* $(56.25^3) =$

1.3 Realizar la operación con calculadora y con la hoja de cálculo:

a) $(4^4)(4^3) =$ *c)* $(8^2)(8^3) =$

b) $(3.5^3)(5^2) =$ *d)* $(8.13^3)(2.25^2) =$

1.4 *a)* $[(3)(4)]^2 =$

b) $[(7)(5)]^4 =$

c) $[(3x+n)(x+m)]^4 =$

1.5 a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 =$

b) $\left(\frac{5.5}{6.35}\right)^2 =$

1.6 *a)* $z^{7/6} =$ *c)* $(3x+4ab)^{2/7} =$

b) $2ab^4x^{2/3} =$ *d)* $8x^{1/3} =$

1.7 *a)* $\sqrt[3]{4^7} =$ *c)* $4ax\sqrt[5]{7^2} =$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{210} =$ *d)* $\sqrt[3]{-10} =$

1.8 Realizar la operación con calculadora y con la hoja de cálculo:

a) $\sqrt[3]{16} =$ *c)* $\sqrt[5]{85} =$

b) $16^{1/6} =$ *d)* $36^{1/4} =$

1.9 *a)* $4\sqrt{6} - 2\sqrt{9} =$ *c)* $5\sqrt{21} - 9\sqrt{6} + 2\sqrt{7} =$

b) $8\sqrt{25} - 5\sqrt{7} =$ *d)* $5\sqrt{36} - 4\sqrt{10} + 3\sqrt{10} =$

1.10 *a)* $\sqrt{6}\left(\sqrt{7}\right) =$ *c)* $\sqrt[3]{125}\left(\sqrt[3]{27}\right) =$

b) $\sqrt{5}\left(\sqrt{72}\right) =$ *d)* $3\sqrt[3]{77}\left(\sqrt[3]{39}\right) =$

1.11 *a)* $\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{9}} =$ *c)* $\frac{\sqrt[3]{44}}{\sqrt[3]{19}} =$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{13}} =$ *d)* $\frac{\sqrt[5]{46}}{\sqrt[5]{5}} =$

Potencia de un monomio:

1.12 *a)* $\left(-5x^4a^3b\right)^2 =$

b) $\left(-\frac{3ya^2b}{2x^3}\right)^3 =$

c) $\left(6a^4x^3\right)^2 =$

Realiza producto de potencia de igual base:

1.13 *a)* $(3)^2(3)^2 =$

b) $(2)^4(2)^3 =$

c) $(-5)^3(-5)^2 =$

Eleva la potencia a otra potencia:

1.14 *a)* $(x^2)^4 =$

b) $[(-1^3)]^4 =$

c) $[(-xa)^2]^4 =$

Realiza el producto elevándolo a una potencia:

1.15 *a)* $(3xy)^4 =$

b) $-2(3ax)^4 =$

c) $(-xab)^4 =$

1.16 *a)* $(-xab)^3 =$

b) $\left(\frac{xy}{2}\right)^3 =$

c) $\left(\frac{4xab}{5}\right)^2 =$

Eleva el cociente a una potencia n:

1.17 *a)* $\left[\frac{x}{ay}\right]^4 =$

b) $\left[\frac{ax}{-x^2}\right]^5 =$

1.18 *a)* $\left[\frac{4xb}{y}\right]^3 =$

b) $\left[\frac{-3x}{ab}\right]^2 =$

Realiza el cociente de dos potencias de igual base con exponente diferente:

1.19 *a)* $\frac{16abx^2}{256x^5} =$

b) $\frac{27ax^4}{3x^2} =$

c) $\frac{5ax^6}{(5x^4)^2} =$