

# **MA1201 MATEMATIKA 2A**

**Hendra Gunawan**

Semester II, 2016/2017

1 Februari 2017

# Kuliah yang Lalu

## 8.1 Bentuk Tak Tentu Tipe 0/0

Menghitung limit bentuk tak tentu 0/0 dengan menggunakan Aturan l'Hopital

## 8.2 Bentuk Tak Tentu Lainnya

Menghitung bentuk tak tentu tipe  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ , dan  $1^\infty$

# Sasaran Kuliah Hari Ini

## 8.3 Integral Tak Wajar dgn Batas Tak Terhingga

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan **batas tak terhingga**

## 8.4 Integral Tak Wajar dgn Integran Tak Terbatas

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan **integran tak terbatas**

MA1201 MATEMATIKA 2A

## **8.3 INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN BATAS TAK TERHINGGA**

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan **batas tak terhingga**

# Integral Tak Wajar

Dalam definisi integral tentu  $\int_a^b f(x)dx$  terdapat dua asumsi:

- (i) selang pengintegralannya, yaitu  $[a,b]$ , merupakan selang **terhingga**;
- (ii) fungsi integrannya (yang diintegalkan) merupakan fungsi **terbatas**.

Namun, dalam aplikasinya, ada kalanya salah satu atau kedua asumsi ini tidak dipenuhi.

Dalam hal demikian kita berhadapan dengan **integral tak wajar**.

# Integral Tak Wajar dengan Batas Tak Terhingga

Pada sub-bab ini kita akan membahas terlebih dahulu integral tak wajar dengan **batas tak terhingga**, misalnya integral berikut ini:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^3} dx.$$

Kita akan mulai dengan bentuk yang pertama terlebih dahulu.

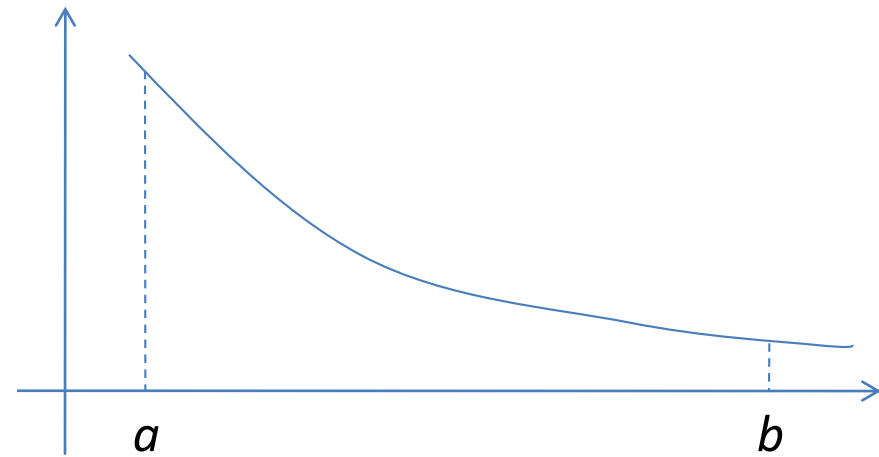
# Bagaimana Menghitung $\int_a^{\infty} f(x)dx$

Untuk setiap  $b > a$ , kita dapat menghitung integral tentu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

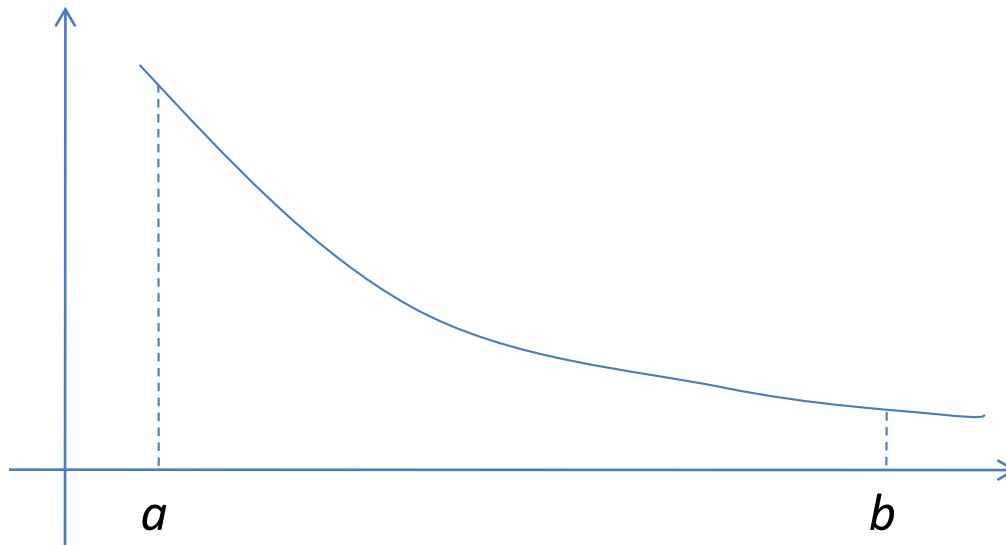
Integral tak wajar

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$



dapat didefinisikan sebagai limit dari integral tentu di atas, untuk  $b \rightarrow \infty$ .

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^{\infty} f(x)dx$



$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \text{bila limit ini ada.}$$

Catatan. Bila limit tsb ada, integral dikatakan **konvergen**; bila tidak, integral **divergen**.



# Contoh/Latihan

1. Hitung  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ , bila konvergen.

Jawab:

Untuk setiap  $b > 0$ , kita hitung

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Big|_0^b = \tan^{-1} b - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} b.$$

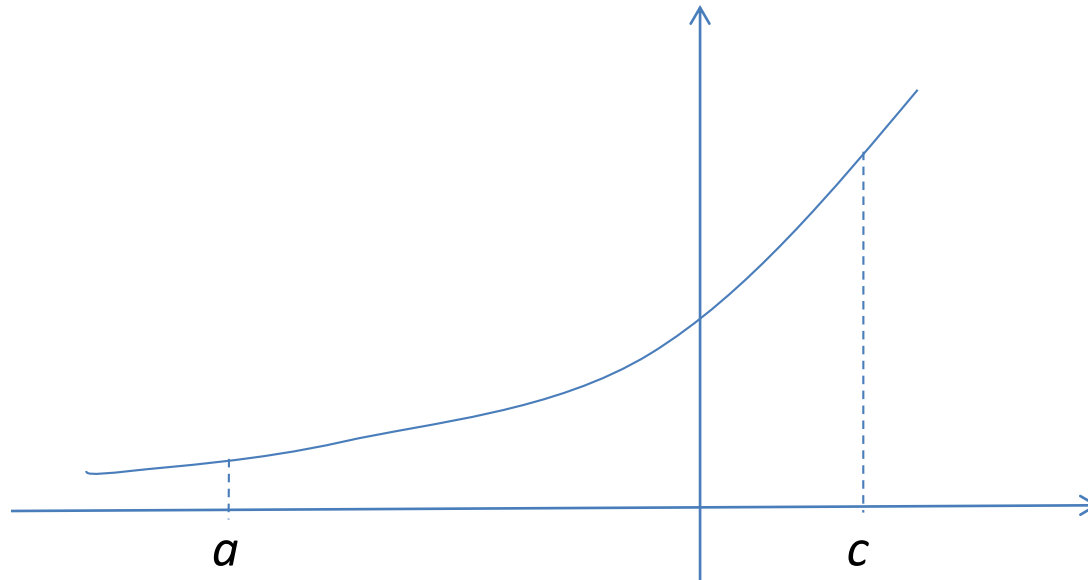
Jadi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}.$$

2. Hitung  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ .

Jawab:

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_{-\infty}^c f(x)dx$



$$\int_{-\infty}^c f(x)dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx, \text{ bila limit ini ada.}$$

Catatan. Bila limit tsb ada, integral dikatakan **konvergen**; bila tidak, integral **divergen**.

3. Hitung  $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$

Jawab:

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx,$$

bila kedua integral di ruas kanan konvergen.

4. Hitung  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ , bila konvergen.  
Jawab:

5. Hitung  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ , bila konvergen.  
Jawab:

# Meluncurkan Roket ke Angkasa

Menurut Hukum Newton, gaya gravitasi yang dialami oleh roket berbanding terbalik dgn jarak kuadrat, yakni  $-k/x^2$ , dengan  $x$  = jarak dari pusat Bumi. Karena itu, gaya yang diperlukan utk mengangkat roket tsb adalah  $F(x) = k/x^2$ . Berapakah kerja yang diperlukan untuk meluncurkan roket dgn berat 500 N ke luar angkasa?



# Meluncurkan Roket ke Angkasa

Menurut Hukum Newton, gaya gravitasi yang dialami oleh roket berbanding terbalik dgn jarak kuadrat, yakni  $-k/x^2$ , dengan  $x$  = jarak dari pusat Bumi. Karena itu, gaya yang diperlukan utk mengangkat roket tsb adalah  $F(x) = k/x^2$ . Berapakah kerja yang diperlukan untuk meluncurkan roket dgn berat 500 N ke luar angkasa?

# Bahan Diskusi

Untuk nilai  $p$  berapakah integral tak wajar ini

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

konvergen?

MA1201 MATEMATIKA 2A

## **8.4 INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN INTEGRAN TAK TERBATAS**

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan **integran tak terbatas**

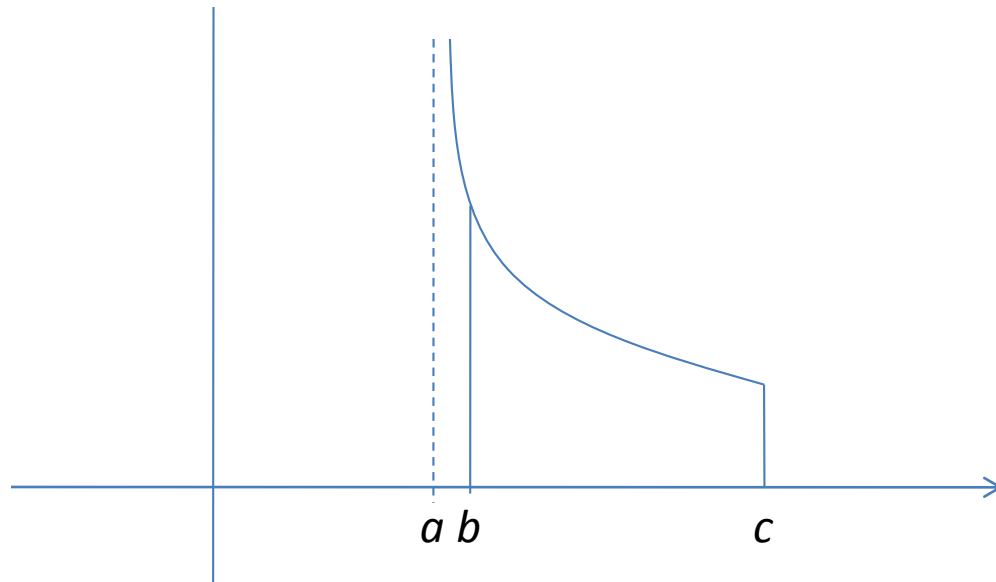
# Integral Tak Wajar dengan Integran Tak Terbatas

Sekarang kita akan membahas integral tak wajar dengan **integran tak terbatas**, misalnya integral berikut ini:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \tan x \cdot dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx.$$

Pada integral pertama, integran tak terbatas di ujung kiri; sedangkan pada integral kedua, integran tak terbatas di ujung kanan. *Apa yang membuat integral ketiga tak wajar?*

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^c f(x)dx$ dengan $f$ tak terbatas di $a$



$$\int_a^c f(x)dx := \lim_{b \rightarrow a^+} \int_b^c f(x)dx, \text{ bila limit ini ada.}$$

# Contoh/Latihan

1. Hitung  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ , bila konvergen.

Jawab:

Untuk setiap  $b > 0$ , dengan  $b < 1$ , kita hitung

$$\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_b^1 = 2 - 2\sqrt{b}.$$

Jadi

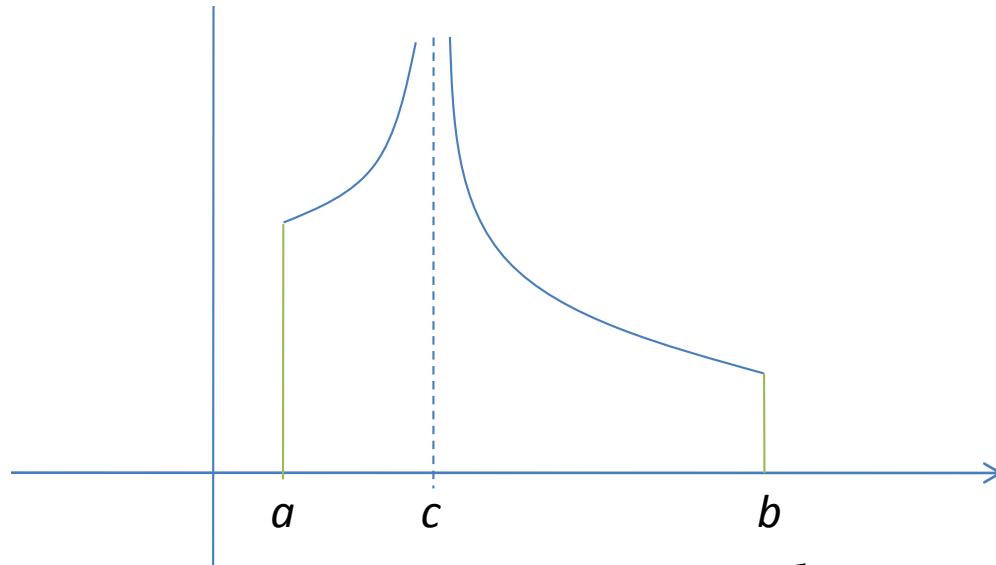
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{b}) = 2.$$

2. Hitung  $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$ , bila konvergen.  
Jawab:

3. Hitung  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x \ln x}$ , bila konvergen.  
Jawab:



Definisi Integral Tak Wajar  $\int_a^b f(x)dx$  dgn  
 $f$  tak terbatas di  $c \in (a,b)$



$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

bila kedua integral di ruas kanan konvergen.

# Contoh/Latihan

4. Hitung  $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$ , bila konvergen.

Jawab:

Integran tak terbatas di  $x = 1$ . Kita hitung dahulu:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^c = 3.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_c^2 = 3.$$

$$\text{Jadi: } \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3 = 6.$$

5. Hitung  $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx$ .

Jawab:

# Bahan Diskusi

Untuk nilai  $p$  berapakah integral tak wajar ini

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

konvergen?

Apakah ada bilangan  $p$  yang membuat integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

konvergen? [*Integral tak wajar jenis apa ini?*]