BAB 7

LIMIT FUNGSI

Kompetensi Dasar

- Siswa dapat menjelaskan limit fungsi di satu titik dan di tak hingga beserta teknis perhitungannya.
- Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari limit fungsi siswa diharapkan dapat :

- ✍ Menjelaskan arti limit fungsi di satu titik dan di tak hingga.
- ✍ Menghitung limit fungsi aljabar di satu titik dan di tak hingga.
- ✍ Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.
- ✍ Menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi.
- ✍ Menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar.
- ✍ Menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.
- ✍ Menghitung limit fungsi trigonometri di satu titik.
- ✍ Menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi trigonometri.
- ✍ Menyelesaikan permasalahan terapan dengan menggunakan kaidah limit fungsi.

A. PENDAHULUAN

Jarak yang ditempuh sebuah mobil yang bergerak selama t sekon memenuhi persamaan $s(t) = (t^2 + 4t)$ meter. Berapakah kecepatan mobil tersebut tepat pada saat $t = 3$ sekon?

Permasalahan di atas merupakan permasalahan pada bidang Fisika yang pemecahannya menggunakan bantuan konsep limit fungsi. Konsep limit fungsi ini pertama kali didefinisikan dengan sangat jelas oleh **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) yang merupakan seorang matematikawan asal Perancis (Purcell, 1994).

Limit fungsi merupakan salah satu pokok bahasan yang baru ada di tingkat pendidikan SMA. Pokok bahasan ini merupakan bagian dari pengantar kalkulus. Kalkulus sendiri merupakan salah satu cabang matematika yang sangat penting, karena di dalamnya dipelajari tentang hitung differensial dan hitung integral. Hitung differensial dan hitung integral sangat diperlukan pada cabang lain dari matematika seperti statistika maupun bidang-bidang lain di luar matematika seperti fisika, kimia dan teknik

Mengingat begitu pentingnya limit fungsi ini, maka diharapkan anda mempelajarinya dengan sungguh-sungguh. Jika anda dapat memahami bahasan limit fungsi ini, maka besar kemungkinan kalian tidak akan mengalami kesulitan pada bahasan selanjutnya, yaitu hitung differensial.

Sebelum anda mempelajari pengertian tentang limit fungsi, sebaiknya anda mengingat kembali materi-materi pelajaran yang telah lalu. Materi-materi tersebut akan kita pergunakan selama mempelajari limit fungsi. Materi-materi yang dimaksud adalah materi tentang nilai suatu fungsi, cara mensketsa grafik fungsi, pemfaktoran, bilangan sekawan dan rumus-rumus trigonometri. Latihan pada uji kompetensi berikut akan membantu anda mengingat kembali materi-materi tersebut.

UJI KOMPETENSI 1

1. Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = x^2 - 5x + 6$

   a. Hitunglah $f(2)$.

   b. Hitunglah $f(-3)$.

   c. Sketsalah grafik fungsi *f*.

2. Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$, $x \neq -3$

   a. Hitunglah $f(0)$

   b. Hitunglah $f(-1)$

   c. Sketsalah grafik fungsi *f*.

3. Faktorkanlah bentuk-bentuk di bawah ini.

   a. $2x^2 - 10x$ d. $2x^2 + x - 1$

   b. $x^2 + 2x - 8$ e. $x^3 - x^2 - 12x$

   c. $x^2 - 16$ f. $x^3 - 8$

4. a. Tentukan faktor sekawan dari bentuk-bentuk di bawah ini

   (i) $a + b$ (iii) $x - \sqrt{2x+6}$

   (ii) $2 + \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+2}$

   b. Sederhanakanlah.

   (i) $(c-d)\,(c+d)$ (iii) $\left(x - \sqrt{2x+6}\right)\left(x + \sqrt{2x+6}\right)$

   (ii) $(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})$ (iv) $\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+2}\right)\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{3x+2}\right)$

5. Lengkapi kesamaan trigonometri di bawah ini.

   a. $\sin 2x = 2\sin x$....... d. $\cos^2 x = 1-$..............

   b. $\cos 2x = 1-$........ e. $\sin 2x + \sin 3x =$.................

   c. $\tan 3x = \dfrac{.......}{\cos 3x}$ f. $\sec^2 2x = 1-$..............

B. PENGERTIAN LIMIT FUNGSI

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering mendengar kalimat-kalimat seperti :

a. Mobil itu *nyaris* masuk ke jurang.

b. Kita *hampir* memasuki kota Jakarta.

c. Kecantikannya *mendekati* sempurna.

Kata-kata yang dicetak miring pada kalimat-kalimat di atas mempunyai pengertian yang sama dengan kata "*limit fungsi*" pada matematika. Pengertian limit fungsi pada matematika dapat dibagi ke dalam dua bagian, yaitu limit fungsi di satu titik dan limit fungsi di tak hingga.

1. Pengertian limit fungsi di satu titik.

Pengertian limit fungsi di satu titik secara informal (intuisi) diberikan pada definisi di bawah ini.

Definisi

Jika nilai suatu fungsi *f* mendekati *L* untuk *x* mendekati *c* maka kita katakan bahwa *f* mempunyai limit *L* untuk *x* mendekati *c* dan ditulis $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ (dibaca *limit f untuk x mendekati c sama dengan L*). (Finney, 1994)

Pengertian *x* mendekati *c* mencakup dua hal, yaitu :

a. Nilai-nilai *x* yang dekat dengan *c* tetapi lebih kecil dari *c*, disebut *x* mendekati *c* dari kiri. Apabila *x* mendekati *c* dari kiri maka limit fungsi *f*-nya disebut limit kiri dan ditulis $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ (dibaca *limit f untuk x mendekati c dari kiri*).

b. Nilai-nilai *x* yang dekat dengan *c* tetapi lebih besar dari *c*, disebut *x* mendekati *c* dari kanan. Apabila *x* mendekati *c* dari kanan maka limit fungsi *f*-nya disebut limit kanan dan ditulis $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ (dibaca *limit f untuk x mendekati c dari kanan*).

c. Suatu fungsi *f* mempunyai limit untuk *x* mendekati *c* jika dan hanya jika limit kiri dan limit kanannya ada dan sama. (Finney, 1994)

Jadi dapat disimpulkan bahwa :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Untuk memahami definisi di atas, perhatikan contoh-contoh di bawah ini.

Contoh 1.

Misalkan fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$, $x \neq 2$.

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ jika ada.

Penyelesaian :

Fungsi *f* tidak terdefinisi di *x* = 2 karena di titik ini *f*(*x*) berbentuk $\dfrac{0}{0}$ yang tak mempunyai arti. Tetapi kita masih bisa menanyakan apa yang terjadi pada *f*(*x*) apabila *x* mendekati 2. Secara lebih tepat, apakah *f*(*x*) mendekati bilangan tertentu apabila *f*(*x*) mendekati 2?

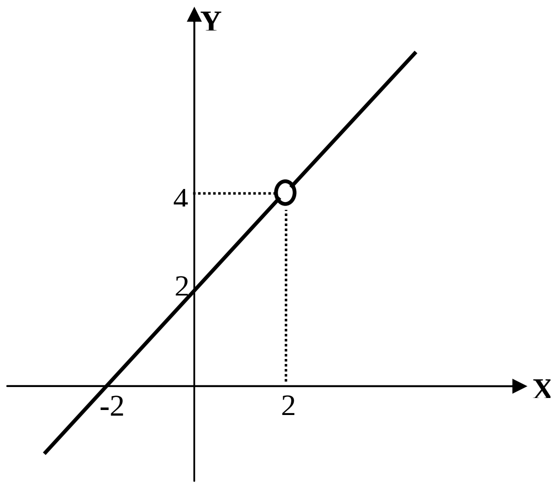
Untuk menjawab pertanyaan ini, kita dapat melakukan dua hal. Yang pertama, kita dapat mencari nilai-nilai *f*(*x*) untuk *x* yang dekat dengan 2 dan yang kedua adalah dengan mensketsakan grafik fungsi *f*.

Nilai- nilai *f*(*x*) untuk *x* yang dekat dengan 2 dapat di lihat pada tabel berikut. Anda diminta melengkapi tabel ini dengan bantuan kalkulator yang anda miliki.

x	1,75	1,9	1.99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1	2,25

$f(x)$	……	3,9	…….	3,999	…….	[redacted]	……..	4,001	….	4,1	……

Sedangkan sketsa grafik fungsi *f* adalah



Dengan memperhatikan nilai-nilai $f(x)$ pada tabel ataupun sketsa grafik fungsi *f*, dapat kita simpulkan beberapa hal, yaitu :

a. Limit *f* untuk *x* mendekati 2 dari kiri (limit kiri *f*) adalah 4 dan ditulis $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4.$

b. Limit *f* untuk *x* mendekati 2 dari kanan (limit kanan *f*) adalah 4 dan ditulis $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4.$

c. Karena $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$ maka $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4.$

Contoh 2.

Diberikan fungsi g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ untuk $x \neq 0.$

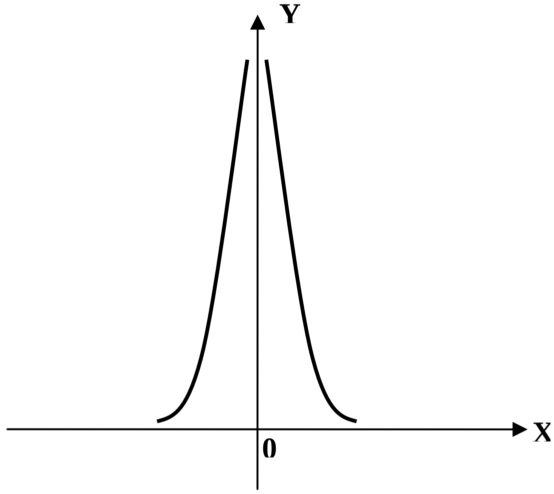
Carilah $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ jika ada.

Penyelesaian :

Nilai- nilai $g(x)$ untuk x yang dekat dengan 0 dapat di lihat pada tabel di bawah ini. Cobalah cek dan lengkapi nilai-nilai $g(x)$ pada tabel tersebut.

X	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	0	0,00001	0,0001	0,001	0,01
$g(x)$	……	……..	……..	…….		…….	………	……...	……

Sketsa grafik fungsi g adalah sebagai berikut :



Dari tabel maupun sketsa grafik fungsi g dapat kita simpulkan bahwa :

a. Nilai $g(x)$ akan terus membesar menuju ke ∞ untuk x mendekati 0 dari kiri. Jadi $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \infty$.

b. Nilai $g(x)$ juga akan terus membesar menuju ke ∞ untuk x mendekati 0 dari kanan. Jadi $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \infty$.

c. Karena $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \infty$ maka $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \infty$.

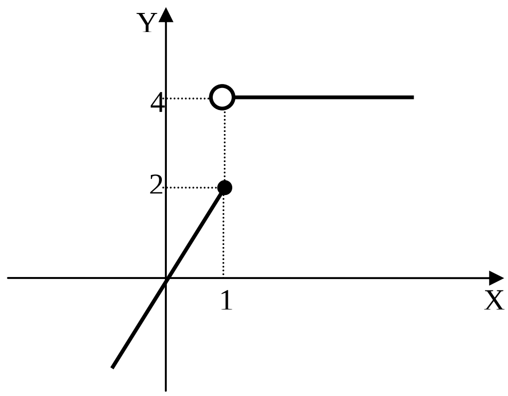
Contoh 3.

Misalkan fungsi $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $h(x) = \begin{cases} 2x & ,\text{untuk } x \le 1 \\ 4 & ,\text{untuk } x > 1 \end{cases}$

Carilah $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ jika ada.

Penyelesaian :

Sekarang kita hanya akan mensketsa grafik fungsi *h*. Sedangkan untuk tabel nilai-nilai $h(x)$ untuk x mendekati 1 silahkan anda hitung sendiri.



Dari grafik di atas dapat di simpulkan bahwa $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 2$ dan $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 4$.

Ternyata $\lim_{x \to 0^-} h(x) \neq \lim_{x \to 0^+} h(x)$. Dengan demikian $\lim_{x \to 0} h(x)$ tidak ada.

2. Pengertian limit fungsi di tak hingga.

Pengertian limit fungsi di tak hingga adalah sebagai berikut :

a. Jika nilai suatu fungsi *f* mendekati *L* untuk *x* yang terus membesar menuju ∞ maka kita katakan bahwa *f* mempunyai limit *L* untuk *x* mendekati ∞ dan ditulis $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ (dibaca *limit f untuk x mendekati* ∞ *sama dengan L*).

b. Jika nilai suatu fungsi *f* terus membesar untuk *x* menuju ∞ maka kita katakan bahwa *f* mempunyai limit ∞ untuk *x* mendekati ∞ dan ditulis $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (dibaca *limit f untuk x mendekati* ∞ *sama dengan* ∞).

c. Jika nilai suatu fungsi *f* terus mengecil untuk *x* menuju ∞ maka kita katakan bahwa *f* mempunyai limit $-\infty$ untuk *x* mendekati ∞ dan ditulis $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ (dibaca *limit f untuk x mendekati* ∞ *sama dengan* $-\infty$).

(Finney, 1994)

Untuk memahami pengertian di atas, perhatikanlah dua buah contoh berikut :

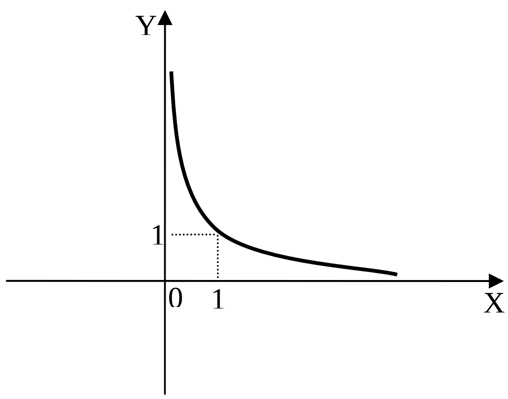
Contoh 4.

Carilah $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$

Penyelesaian :

Dengan melakukan langkah-langkah seperti pada limit di satu titik diperoleh tabel dan grafik sebagai berikut :

X	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
$\frac{1}{x}$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0.000001	0,0000001



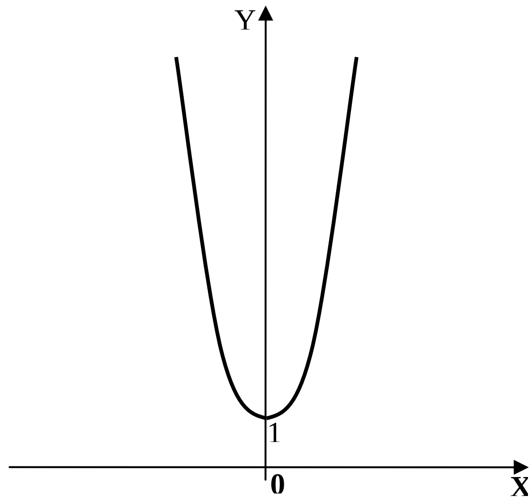
Dari tabel dan grafik terlihat bahwa jika nilai x membesar menuju ke tak hingga, maka nilai $\frac{1}{x}$ akan mendekati 0. Dengan demikian $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Contoh 5.

Carilah $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)$ dan $\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)$.

Penyelesaian :

Sekarang kita hanya akan menggunakan metode sketsa grafik fungsi.



Dari grafik di atas terlihat bahwa jika x menuju ∞ maka nilai x^2+1 juga semakin besar menuju ke tak hingga. Jadi $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1) = \infty$.

Dari grafik di atas juga terlihat bahwa jika x menuju $-\infty$ maka nilai (x^2+1) juga semakin besar menuju ke tak hingga. Jadi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) = \infty$.

UJI KOMPETENSI 2

1. Misalkan diberikan fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$.

   a. Buatlah tabel nilai-nilai *f(x)* untuk nilai-nilai *x* yang dekat dengan 2.

   b. Sketsalah grafik fungsi *f(x)*.

   c. Tentukan $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ jika ada.

   d. Tentukan $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ jika ada.

   e. Apakah $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ada? Jika ada, berapakah nilai $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2. Pertanyaan seperti nomor 1 untuk $f(x) = 2x - 3$.

3. Misalkan diberikan fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{2x}{x - 4}$, $x \neq 4$.

a. Buatlah tabel nilai-nilai *f(x)* untuk nilai-nilai *x* yang dekat dengan 4.

b. Sketsalah grafik fungsi *f(x).*

c. Tentukan $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ jika ada.

d. Tentukan $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ jika ada.

e. Apakah $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ ada? Jika ada, berapakah nilai $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

4. Diberikan fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{, untuk } x \leq 2 \\ x^2 & \text{, untuk } x > 2 \end{cases}$

Apakah $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ada? Jika ada, berapakah nilai $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

5. Diberikan fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{, untuk } x \leq 4 \\ 3 - \frac{1}{2}x^2 & \text{, untuk } x > 4 \end{cases}$

Apakah $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ada? Jika ada, berapakah nilai $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

6. Hitunglah nilai limit-limit berikut jika ada.

(a). $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 5)$

(b). $\lim\limits_{x \to 0} |x|$

(c). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

(d). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

7. Hitunglah nilai limit-limit berikut jika ada.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{3x^2}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-4}{x^2 + 1}$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x + 3)$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x - x^2\right)^2$

e. $\lim\limits_{x \to \infty} 3$

f. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{x - 2}$

KEGIATAN KELOMPOK

MENYELIDIKI SIFAT-SIFAT LIMIT FUNGSI

Petunjuk : (i) Bentuk kelompok yang masing-masing beranggotakan 3 orang.

(ii) Diskusikan dalam kelompok tentang permasalahan di bawah.

(iii) Presentasikan hasil kerja kelompok di depan kelas.

Permasalahan :

1. Diketahui f dan g adalah fungsi dari **R** ke **R** dengan f fungsi identitas dan g fungsi konstanta. Misalkan $f(x) = x$ dan $g(x) = 9$.

   a. Carilah $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$.

   b. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

   c. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} 5\, f(x)$ dan bandingkan hasilnya dengan $5 \lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

   d. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} \left[f(x) + g(x) \right]$ dan bandingkan hasilnya dengan

   $\lim\limits_{x \to 4} f(x) + \lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

   e. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} \left[f(x) - g(x) \right]$ dan bandingkan hasilnya dengan

   $\lim\limits_{x \to 4} f(x) - \lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

   f. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} f(x) g(x)$ dan bandingkan hasilnya dengan $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

   g. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dan bandingkan hasilnya dengan $\dfrac{\lim\limits_{x \to 4} f(x)}{\lim\limits_{x \to 4} f(x)}$.

   h. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} \left[f(x) \right]^3$ dan bandingkan hasilnya dengan $\left[\lim\limits_{x \to 4} f(x) \right]^3$

   i. Carilah $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{f(x)}$ dan bandingkan hasilnya dengan $\sqrt{\lim\limits_{x \to 4} f(x)}$.

2. Ambil sebarang fungsi f dan g sebagai fungsi dari **R** ke **R** dan jawab pertanyaan-pertanyaan nomor 1 untuk x mendekati suatu bilangan tertentu.

Fungsi *f* dan g yang diambil tiap kelompok harus berbeda dari kelompok lainnya.

3. Apa yang dapat anda simpulkan dari hasil nomor 1 dan nomor 2?

C. TEOREMA LIMIT

Teorema limit fungsi adalah sebagai berikut :

Jika *n* bilangan bulat positif, *k* konstanta, *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di *c*, maka sifat-sifat dibawah ini berlaku :

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to c} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to c} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap.

(Purcell, 1994)

Teorema limit ini akan mudah diingat jika kita nyatakan dalam bentuk kata-kata. Misalnya sifat 4 dapat dinyatakan sebagai *limit suatu jumlahan adalah* *jumlah dari limit-limit.* Cobalah nyatakan sifat-sifat lainnya pada teorema di atas dalam bentuk kata-kata.

Penerapan teorema limit di atas dapat dilihat pada contoh-contoh berikut.

Contoh 1.

Carilah $\lim\limits_{x \to 3} 2x^4$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} 2x^4 &= 2 \lim_{x \to 3} x^4 && \text{(sifat 3)} \\
&= 2 \left(\lim_{x \to 3} x\right)^4 && \text{(sifat 8)} \\
&= 2 \left(3\right)^4 && \text{(sifat 2)} \\
&= 162.
\end{aligned}$$

Contoh 2.

Carilah $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x) &= \lim_{x \to 4} 3x^2 - \lim_{x \to 4} 2x && \text{(sifat 5)} \\
&= 3 \lim_{x \to 4} x^2 - 2 \lim_{x \to 4} x && \text{(sifat 3)} \\
&= 3 \left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 - 2 \lim_{x \to 4} x && \text{(sifat 8)} \\
&= 3\left(4\right)^2 - 2\left(4\right) && \text{(sifat 2)} \\
&= 40.
\end{aligned}$$

Contoh 3.

Carilah $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} = \frac{\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{\lim_{x\to 4} x} \qquad \text{(sifat 7)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+9)}}{\lim_{x\to 4} x} \qquad \text{(sifat 9)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9}}{\lim_{x\to 4} x} \qquad \text{(sifat 4)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\lim_{x\to 4} x)^2 + \lim_{x\to 4} 9}}{\lim_{x\to 4} x} \qquad \text{(sifat 8)}$$

$$= \frac{\sqrt{(4)^2+9}}{4} \qquad \text{(sifat 2 dan 1)}$$

$$= \frac{5}{4}.$$

Contoh 4.

Jika $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ dan $\lim_{x\to 3} g(x) = 8$, maka carilah $\lim_{x\to 3}\left(f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}\right)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 3}\left(f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}\right) = \lim_{x\to 3} f^2(x)\ .\ \lim_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)} \qquad \text{(sifat 5)}$$

$$= \left(\lim_{x\to 3} f(x)\right)^2\ .\ \sqrt[3]{\lim_{x\to 3} g(x)} \qquad \text{(sifat 8 dan 9)}$$

$$= (4)^2\ .\ \sqrt[3]{8}$$

$$= 32.$$

UJI KOMPETENSI 3

1. Gunakan teorema limit untuk mencari tiap limit berikut. Berikan alasan tiap langkah dengan mengacu pada teorema tersebut.

a. $\lim\limits_{x \to 3}(7x-4)$

b. $\lim\limits_{x \to -1}(2x^3-5x)$

c. $\lim\limits_{x \to 2}[(x^2+1)(3x-1)]$

d. $\lim\limits_{x \to -2}\dfrac{3x^4-8}{x^3+24}$

e. $\lim\limits_{x \to -3}\sqrt{5x^2+2x}$

f. $\lim\limits_{t \to -2}(2t^3+15)^{13}$

g. $\lim\limits_{y \to 2}\left[\dfrac{4y^3+8y}{y+4}\right]^{\frac{1}{3}}$

h. $\lim\limits_{w \to 5}(2w^4-9w^3+19)^{-\frac{1}{2}}$

2. Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -1$, maka carilah limit-limit berikut :

a. $\lim\limits_{x \to -a}\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$

b. $\lim\limits_{x \to -a}\dfrac{2f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)}$

c. $\lim\limits_{x \to -a}\sqrt[3]{g(x)}\left[f(x)+3\right]$

d. $\lim\limits_{x \to -a}\left[f(x)-3\right]^4$

e. $\lim\limits_{t \to -a}\left[f(t)+(t-a)g(t)\right]$

f. $\lim\limits_{u \to -a}\left[f(u)+3g(u)\right]^3$

D. LIMIT FUNGSI ALJABAR

Limit-limit yang sampai sejauh ini telah kita bahas merupakan limit-limit fungsi aljabar. Sekarang kita akan mempelajari lebih lanjut bagaimana cara mencari nilai limit fungsi aljabar terutama yang mengandung bentuk tak tentu.

Bentuk tak tentu dari suatu limit adalah limit yang menghasilkan $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0 atau 1^∞ apabila dilakukan substitusi langsung (Purcell, 1994). Tetapi bentuk tak tentu yang akan kita pelajari hanyalah tiga bentuk yang pertama. Sedangkan bentuk-bentuk tak tentu lainnya dapat anda pelajari pada buku-buku kalkulus perguruan tinggi.

1. Limit fungsi aljabar yang tidak mengandung bentuk tak tentu.

Untuk mencari nilai limit fungsi aljabar berbentuk $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yang tidak mengandung bentuk tak tentu digunakan metode substitusi langsung. Metode ini merupakan akibat dari sifat-sifat yang ada pada teorema limit.

Contoh 1.

Carilah $\lim\limits_{x \to 1}(x^3 + 2x - 5)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 2}(x^3 + 2x - 5) = (2)^3 + 2(2) - 5$$

$$= 7.$$

Contoh 2.

Carilah $\lim\limits_{x \to 3}\sqrt{7x + 4}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 3}\sqrt{7x + 4} = \sqrt{7(3) + 4}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5.$$

Contoh 3.

Carilah $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 2}\frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8}$$

$$= \frac{224-160-26+6}{12-12-8}$$

$$= -\frac{11}{2}.$$

2. Limit fungsi aljabar yang mengandung bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$.

Secara umum, untuk mencari nilai limit fungsi aljabar berbentuk $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ yang mengandung bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ digunakan metode pemfaktoran. Jadi jika dilakukan substitusi langsung diperoleh bentuk $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$, maka kita harus mengupayakan agar $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki faktor yang sama. Jika dimisalkan faktor yang sama itu adalah $(x-a)$, maka :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh di bawah ini :

Contoh 4.

Carilah $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-4}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{4(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{4}$$

$$= \frac{2+2}{4}$$

$$= 1.$$

Contoh 5.

Carilah $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 4x - 5}$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 4x - 5} &= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x-5)}{(x+1)(x-5)} \\
&= \lim_{x \to -1} \frac{(2x-5)}{(x-5)} \\
&= \frac{2(-1)-5}{-1-5} \\
&= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

Contoh 6.

Carilah $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) \\
&= (1)^2 + 1 + 1 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Adakalanya sebuah limit fungsi aljabar berbentuk $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ yang mengandung bentuk tak tentu $\dfrac{0}{0}$ harus dikalikan dulu dengan bentuk sekawan dari $f(x)$ atau $g(x)$ sebelum dilakukan pemfaktoran. Bentuk yang memerlukan perlakuan demikian apabila $f(x)$ atau $g(x)$ mengandung bentuk akar.

Contoh 7.

Carilah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \; \frac{x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}\,(x - \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}\,(x - \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x-1)}{x\,(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{0 - 1}{\sqrt{0} - 1}$$

$$= 1.$$

Contoh 5.

Carilah $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x} \; \frac{\sqrt{x+6} + 3}{\sqrt{x+6} + 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2 - 3^2}{(x^2 - 3x)(\sqrt{x+6} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+6) - 9}{(x^2 - 3x)(\sqrt{x+6} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)}{x(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{1}{x(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \frac{1}{3\,(\sqrt{3+6}+3)}$$

$$= \frac{1}{18}.$$

Contoh 6.

Carilah $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}} \; \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{4x}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x})}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{4x}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x})}{(x+3)-(4x)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x})}{3-3x}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x})}{-3(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{4x}}{-3}$$

$$= \frac{\sqrt{1+3}+\sqrt{4\,.1}}{-3}$$

$$= -\frac{4}{3}.$$

Ada satu lagi yang berhubungan dengan bentuk $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, yaitu yang nantinya berhubungan dengan topik turunan pada bab yang akan datang. Perhatikan dua buah contoh di bawah ini.

Contoh 7.

Tentukan nilai limit dari $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ apabila

a. $f(x) = 5x$ b. $f(x) = x^2$, untuk $x = 3$

Penyelesaian :

a. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 5$$

$$= 5.$$

b. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)^2 - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6+h)$$

$$= 6 + 0$$

$$= 6.$$

3. Limit fungsi aljabar berbentuk $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Limit fungsi aljabar berbentuk $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ apabila dilakukan substitusi langsung akan menghasilkan bentuk $\dfrac{\infty}{\infty}$. Oleh karena itu untuk mencari nilai limitnya harus dilakukan manipulasi aljabar. Manipulasi aljabar yang dimaksud adalah dengan membagi setiap suku-suku pada $f(x)$ dan $g(x)$ dengan pangkat tertinggi dari *x*. Selanjutnya digunakan fakta yang diperoleh pada contoh 4 sub bab A, yaitu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ dengan *k* dan *n* suatu konstanta. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh-contoh berikut.

Contoh 8.

Carilah $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-1}{7x^2-4x+3}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-1}{7x^2-4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{7x^2}{x^2}-\dfrac{4x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{7-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}7-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{2+0-0}{7-0+0}$$

$$= \frac{2}{7}.$$

Contoh 9.

Carilah $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+10}{5x^3+3x-2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+10}{5x^3+3x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{10}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}}{5+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{0-0+0}{5+0-0}$$

$$= 0.$$

Contoh 10.

Carilah $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x+2}{3x^3+2x-2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x+2}{3x^3+2x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{3x}{x^4}+\dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{3x^3}{x^4}+\dfrac{2x}{x^4}-\dfrac{2}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^3} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^4}}$$

$$= \frac{1-0+0}{0+0-0}$$

$$= \infty.$$

> ***Cara cepat***
>
> Misalkan kita akan menyelesaikan $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^m + bx^{m-1} + ... + c}{px^n + qx^{n-1} + ... + r}$.
>
> a. Jika $m < n$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^m + bx^{m-1} + ... + c}{px^n + qx^{n-1} + ... + r} = 0.$
>
> b. Jika $m = n$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^m + bx^{m-1} + ... + c}{px^n + qx^{n-1} + ... + r} = \dfrac{a}{p}$.
>
> c. Jika $m > n$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^m + bx^{m-1} + ... + c}{px^n + qx^{n-1} + ... + r} = \infty$.

4. Limit fungsi aljabar berbentuk $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\right)$.

Limit fungsi berbentuk $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\right)$ apabila dilakukan substitusi langsung akan menghasilkan bentuk $\infty - \infty$. Oleh karena itu untuk mencari nilai limitnya harus dilakukan manipulasi aljabar. Manipulasi aljabar yang dimaksud adalah dengan mengalikannya terlebih dahulu dengan faktor sekawannya. Setelah itu barulah dilakukan langkah seperti pada bagian 3 di atas atau dengan memakai cara cepat yang sudah diperoleh. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh-contoh berikut :

Contoh 11.

Hitunglah $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-4}\right)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-4}\right)\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x-4}\right)^2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)-(3x-4)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}$$

$$= 0.$$

Contoh 12

Hitunglah $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{8x-4}-\sqrt{2x+1}\right)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{8x-4}-\sqrt{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{8x-4}-\sqrt{2x+1}\right)\frac{\sqrt{8x-4}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{8x-4}+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{8x-4}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}{\sqrt{8x-4}+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(8x-4)-(2x+1)}{\sqrt{8x-4}+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{\sqrt{8x-4}+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \infty.$$

Contoh 13.

Hitunglah $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{5x-4}\right)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{5x-4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{5x-4}\right)\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{5x-4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2 - \left(\sqrt{5x-4}\right)^2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{5x-4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)-(5x-4)}{\sqrt{x-2} + \sqrt{5x-4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x-6}{\sqrt{x-2} + \sqrt{5x-4}}$$

$$= -\infty .$$

Cara cepat

Misalkan kita akan menghitung $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax+b} - \sqrt{px+q}\right)$.

a. Jika $a = p$ maka $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax+b} - \sqrt{px+q}\right) = 0$

b. Jika $a > p$ maka $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax+b} - \sqrt{px+q}\right) = \infty$

c. Jika $a < p$ maka $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax+b} - \sqrt{px+q}\right) = -\infty$

Contoh 14

Carilah $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-4} - \sqrt{2x^2-4x-1}\right)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-4} - \sqrt{2x^2-4x-1}\right)$$

$$=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-4} - \sqrt{2x^2-4x-1}\right)\frac{\sqrt{2x^2+3x-4} + \sqrt{2x^2-4x-1}}{\sqrt{2x^2+3x-4} + \sqrt{2x^2-4x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2+3x-4}\right)^2 - \left(\sqrt{2x^2-4x-1}\right)^2}{\sqrt{2x^2+3x-4} + \sqrt{2x^2-4x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2x^2+3x-4\right) - \left(2x^2-4x-1\right)}{\sqrt{2x^2+3x-4} + \sqrt{2x^2-4x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7x-3}{\sqrt{2x^2+3x-4}+\sqrt{2x^2-4x-1}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{7}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{7}{4}\sqrt{2}.$$

Contoh 15.

Carilah $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$

Penyelesaian :

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$

$$= \lim_{x\leftarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)\frac{\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2-x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)^2}{\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3x^2-x\right)-\left(x^2+2x+3\right)}{\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-3}{\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$= \infty.$$

Contoh 16

Carilah $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{3x^2-x+1}\right)$

Penyelesaian :

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{3x^2-x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-2} - \sqrt{3x^2-x+1}\right)\frac{\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{3x^2-x+1}}{\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{3x^2-x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2+5x-2}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2-x+1}\right)^2}{\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{3x^2-x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2x^2+5x-2\right)-\left(3x^2-x+1\right)}{\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{3x^2-x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+6x-3}{\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{3x^2-x+1}}$$

$$= -\infty .$$

Cara cepat

Misalkan kita akan menghitung

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+q+r}\right)$.

a. Jika $a = p$ maka $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+q+r}\right) = \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}}$

b. Jika $a > p$ maka $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+q+r}\right) = \infty$

c. Jika $a < p$ maka $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+q+r}\right) = -\infty$

UJI KOMPETENSI 4

1. Carilah nilai limit-limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to -3}(2x-8)$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2+5x+1}{7x+3}$

c. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x-3}$

d. $\lim\limits_{t\to\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{12-t^2}}{t^4}$

2. Carilah nilai limit-limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-16x}{x^2+4x}$

e. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2-9}$

f. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2-5t+6}{t^2-t-2}$

g. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^2+6u-7}{u^2-1}$

h. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-3}$

3. Carilah nilai limit-limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{1-\sqrt{x+2}}$

b. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2}-9}$

c. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-9}$

d. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x^2+5}}$

e. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x}-\sqrt{10}}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

g. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+4x+1}}$

4. Carilah nilai limit-limit berikut :

a. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{10(x+h)-10x}{h}$

b. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h)+5-(2x+5)}{h}$

c. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2-(x-h)^2}{h}$

d. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2+5(x+h)-15-(x^2+5x-15)}{h}$

5. Carilah nilai limit-limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-5}{x^3-5x^2+10}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{3x^3-2x^2-3x-1}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+5x-6}{10x-9}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4-x^2}{2x^2-6x+7}\right)^3$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+5x-6}{\sqrt{4x^4-x}-\sqrt{x^4+5}}$

6. Carilah nilai limit-limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x-7}-\sqrt{x^2+4x+2})$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2-5x}-\sqrt{3x^2+2x-1})$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{5x^2-6}-\sqrt{x^2+2x-10}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2-\sqrt{x^2+4x-5}\ )$

e. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-5}-x+3\ )$

f. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-5}\ \ )$

E. LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Perhatikan limit – limit fungsi sebagai berikut :

i. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin 2x$

ii. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$

iii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\tan 7x}$

Limit di atas dapat di tulis sebagai $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dengan $f(x)$ adalah fungsi – fungsi yang memuat perbandingan trigonometri. Bentuk limit semacam ini disebut limit fungsi trigonometri.

Dalam beberapa kasus, penyelesaian limit fungsi trigonometri hampir sama dengan penyelesaian limit fungsi aljabar, misalnya dengan metode substitusi langsung atau metode pemfaktoran. Rumus – rumus trigonometri yang telah dipelajari pada bab sebelumnya atau pada materi trigonometri kelas X, sering digunakan dalam menyelesaikan limit fungsi trigonometri, demikian pula teorema – teorema tentang limit.

Contoh 1 .

Hitunglah nilai limit fungsi trigonometri berikut :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos x$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} (\cos x - \sin x)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin^2 x - \cos^2 x)$

Penyelesaian :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \dfrac{\pi}{2}$

$= 1.$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\ .$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} (\cos x - \sin x) = \lim\limits_{x \to \pi} \cos x - \lim\limits_{x \to \pi} \sin x$

$= \cos \pi - \sin\ \pi$

$= -1 - 0$

$= -1.$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin^2 x - \cos^2 x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin^2 x - \lim\limits_{x \to 0} \cos^2 x$

$= \sin^2 0 - \cos^2 0$

$= 0^2 - 1^2$

$= 0 - 1$

$= -1.$

Contoh 2 .

Hitunglah nilai limit fungsi trigonometri berikut :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin x}$

Penyelesaian :

Dengan substitusi langsung, penyelesaian limit di atas adalah :

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\sin 0}{\sin 0} = \frac{0}{0}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin x} = \frac{\cos 0 - 1}{\sin 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

Dengan substitusi langsung diperoleh bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Oleh karena itu cara menyelesaikannnya sebagai berikut :

a) Karena sin 2x = 2 sin x cos x, maka :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} 2\cos x \\
&= 2\lim_{x\to 0} \cos x \\
&= 2 \cos 0 \\
&= 2 \,.\, 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

b) Karena cos 2x = 1 – 2 sin^2x, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\sin^2 x - 1}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} 2\sin x \\
&= 2\lim_{x\to 0} \sin x
\end{aligned}$$

$= 2 \sin 0$

$= 2 \cdot 0$

$= 0.$

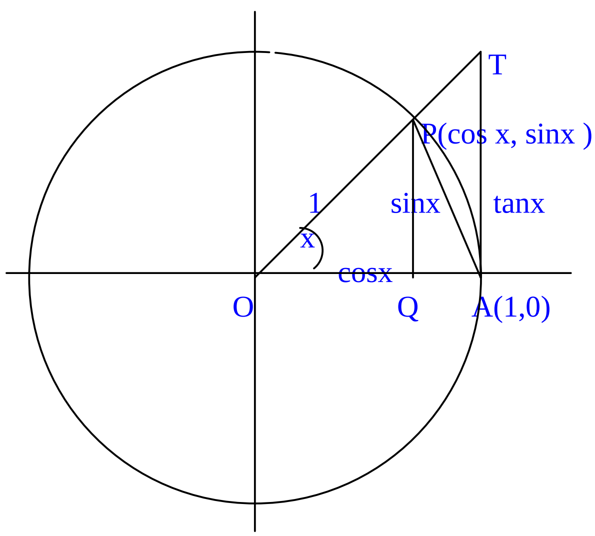
Rumus – Rumus Limit Fungsi Trigonometri

Pada pembahasan sebelumnya, dalam menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan substitusi langsung atau dengan memfaktorkan. Selain itu limit fungsi trigonometri dapat pula diselesaikan dengan menggunakan rumus. Rumus yang digunakan adalah :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

Bukti Rumus 1 :

Perhatikan gambar berikut :



Gambar di atas adalah lingkaran yang berpusat di O dan berjari – jari r = 1 satuan dengan besar $\angle$ AOP = x radian.

Berdasarkan gambar di atas , jelas bahwa :

Luas segitiga OAP ≤ Luas juring OAP ≤ Luas segitiga OAT

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\text{OA.PQ} \leq \frac{\theta}{2\pi}.\pi.r^2 \leq \frac{1}{2}.\text{OA.AT}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.1.\sin x \leq \frac{x}{2\pi}.\pi.1^2 \leq \frac{1}{2}.1.\tan x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\sin x}{\frac{1}{2}\sin x} \leq \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\sin x} \leq \frac{\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{2}\sin x}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ …………………………….(*)

Untuk x mendekati 0 , maka hubungan di atas menjadi :

$\lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{\theta\to 0}\frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$, sehingga diperoleh $1 \leq \lim_{\theta\to 0}\frac{x}{\sin x} \leq 1$.

Akibatnya :. $\lim_{\theta\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$.

Selanjutnya, bentuk (*) dapat diubah menjadi $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Untuk x mendekati 0 , maka hubungan di atas menjadi :

$\lim_{x\to 0}\cos x \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1$, sehingga diperoleh $1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Akibatnya : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Bukti Rumus 2 :

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1.1$$

$$= 1.$$

ii. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \cos x . \frac{x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \cos x \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$= 1.1$$

$$= 1.$$

Berdasarkan (i) dan (ii) di atas, terbukti bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1.$

Contoh 3.

Hitunglah nilai limit fungsi trigonometri berikut :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{6x}{\tan 6x}$

Penyelesaian :

a) Dimisalkan $2x = u$. Jika $x \to 0$, maka $u \to 0$, sehingga :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

b) Dimisalkan $6x = u$. Jika $x \to 0$, maka $u \to 0$, sehingga :

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x}{\tan 6x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\tan u} = 1.$$

Dengan menggunakan rumus limit fungsi trigonometri di atas, dapat ditunjukkan bahwa :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan ax}=1$$

Contoh 4.

Hitunglah nilai limit fungsi trigonometri berikut :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

b) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

Penyelesaian :

a) Dimisalkan $\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ = *u*. Jika *x*→ $\frac{\pi}{3}$, maka *u*→ 0, sehingga :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

b) Dimisalkan $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ = *u*. Jika *x*→ $-\frac{\pi}{4}$, maka *u*→ 0, sehingga :

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}=1\ .$$

Contoh 5.

Hitunglah nilai limit fungsi trigonometri berikut :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sin 5x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{6x}$

Penyelesaian :

a) $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 5x} &= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 5x} \cdot \frac{5x}{5x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2x}{5x} \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 5x} \\ &= \frac{2}{5} .1 \\ &= \frac{2}{5} . \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{6x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{6x} \cdot \frac{3x}{3x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{6x} \\ &= \frac{3}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} \\ &= \frac{3}{6} .1 \\ &= \frac{3}{6} . \end{aligned}$$

Contoh 6.

Hitunglah limit – limit fungsi trigonometri berikut :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

Penyelesaian :

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}.\frac{3x}{2x}.\frac{2x}{2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}.\frac{2x}{\sin 2x}.\frac{3x}{2x}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{3}{2}.1$$

$$= \frac{3}{2}.$$

b) Karena $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, maka :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= 2.1.1$$

$$= 2.$$

Contoh 7.

Hitunglah $\lim_{x\to 4}\frac{(3x+6)\tan(x-4)}{2x^2-7x-4}$.

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 4}\frac{(3x+6)\tan(x-4)}{2x^2-7x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(3x+6)\tan(x-4)}{(2x+1)(x-4)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(3x+6)}{(2x+1)}\lim_{x\to 4}\frac{\tan(x-4)}{(x-4)}$$

$$= \frac{(3.4+6)}{(2.4+1)}.1$$

$$= \frac{18}{9}.$$

UJI KOMPETENSI 5

1. Hitunglah nilai limit – limit fungsi trigonometri berikut ini :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \sin x$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos 2x$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos^2(x - \pi)$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

f. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

g. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)$

h. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x}$

i. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$

j. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x}$

2. Hitunglah nilai limit – limit berikut dengan menggunakan rumus – rumus limit fungsi trigonometri.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

b) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{2t}{\tan t}$

c) $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin \sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

d) $\lim\limits_{x \to -\pi} \frac{\sin(x+\pi)}{(x+\pi)}$

e. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(4x-4)}{\sin(2x-2)}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{kx}{\tan lx}$

g. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin px}{qx}$

h. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}{\tan 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}$

3. Hitunglah nilai limit – limit fungsi trigonometri berikut ini :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 8x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{\sin 6x}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\tan(2x-4)}{\sin(x-2)}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\tan(x-\pi)}{\tan(2x-2\pi)}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

g. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{\tan(x-1)}$

h. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2-1)\sin(x+2)}{(x^2-2x-8)\tan(x-1)}$

i. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$

j. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$

4. Hitunglah nilai limit – limit berikut :

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi + h\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{h}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x - \sin 4x \cos 2x}{5x^3}$

5. Hitunglah nilai limit – limit berikut :

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)}{(3x-3a)+\tan(x-a)}$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)}{\sin(x-a)+(4x-4a)}$

6. Untuk fungsi – fungsi $f(x)$ berikut ini, tentukanlah nilai dari $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = 2 \sin x$

d. $f(x) = \sin 2x$

e. $f(x) = 3 \cos x$

f. $f(x) = 3 \sin x + \cos x$

7. Untuk fungsi – fungsi $f(x)$ berikut ini, tentukanlah nilai dari $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$

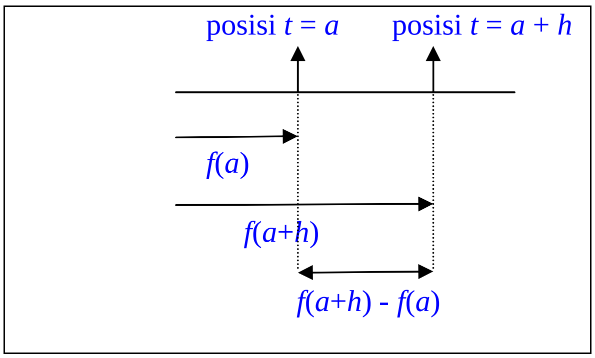
c)

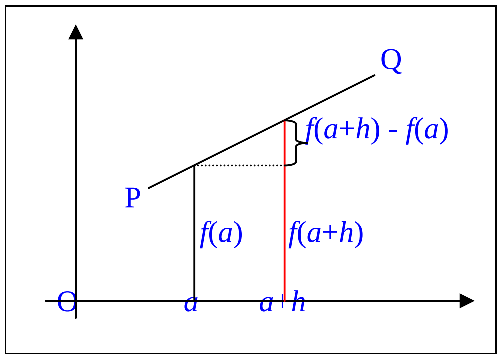
c. $f(x) = \sin 2x$

d. $f(x) = \cos 2x$

F. TERAPAN LIMIT

Misalnya suatu benda bergerak sepanjang garis lurus dengan persamaan gerak $s = f(t)$. Fungsi f menggambarkan gerakan benda dan dinamakan fungsi posisi. Perhatikan gambar berikut :





Pada selang waktu $t = a$ sampai $t = a + h$, perubahan posisi benda adalah $f(a+h) - f(a)$. Perubahan posisi benda disebut perpindahan. Kecepatan merupakan jarak yang ditempuh benda per satuan waktu. Kecepatan rata – rata pada selang waktu $t = a$ sampai $t = a + h$ adalah :

$$kecepatan\ \ rata - rata = \frac{perpindahan}{waktu}$$

Akan dicari kecepatan rata – rata selama selang waktu $[a, a+h]$ yang sangat pendek, yang berarti h mendekati nol. Untuk h mendekati nol, kecepatan rata – ratanya disebut kecepatan sesaat, yaitu kecepatan $v(a)$ pada saat $t = a$, sebagai limit dari kecepatan rata – rata.

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Contoh 1.

Sebuah benda bergerak dengan persamaan $s = 2t^2 + 2$, s dalam meter dan t dalam detik. Tentukan kecepatan benda pada $t = 2$ detik ?

Penyelesaian :

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(2+h)^2 + 2\right) - \left(2(2)^2 + 2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2\left(4 + 4h + h^2\right) + 2\right) - 10}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10 + 8h + 2h^2 - 10}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8 + 2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 8 + 2h$$

$$= 8 + 0$$

$$= 8$$

Jadi, kecepatan pada saat $t = 2$ detik adalah 8 m/detik.

Contoh 2.

Sebuah partikel bergerak dengan persamaan $s = \sqrt{5t+1}$, s dalam cm dan t dalam detik. Hitunglah kecepatan partikel pada t = 3 detik ?

Penyelesaian :

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$v(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(3+h)+1} - \sqrt{5(3)+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{16+5h} - \sqrt{16}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{16+5h} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{16+5h} - 4}{h} \cdot \frac{\sqrt{16+5h} + 4}{\sqrt{16+5h} + 4}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(16+5h) - 16}{h\left(\sqrt{16+5h} + 4\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h\left(\sqrt{16+5h} + 4\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5}{\left(\sqrt{16+5h} + 4\right)}$$

$$= \frac{5}{4+4}$$

$$= \frac{5}{8}$$

Jadi, kecepatan partikel pada saat t = 3 detik adalah $\frac{5}{8}$ cm/detik.

Kecepatan merupakan salah satu dari laju perubahan . Kecepatan merupakan laju perubahan jarak terhadap waktu. Laju perubahan yang lain misalnya kepadatan suatu kawat (laju perubahan massa terhadap jarak), pendapatan marginal (laju perubahan pendapatan terhadap beberapa jenis produksi) dan arus listrik (laju perubahan muatan listrik terhadap waktu).

UJI KOMPETENSI 6

1. Sebuah roket ditembakkan vertical ke atas dengan persamaan gerak h = 560 - 16t^2, *h* dalam meter dan *t* dalam detik. Arah positif dari gerakan adalah arah ke atas. Tentukan kecepatan sesaat roket seyelah 2 detik ditembakkan?
2. Suatu kultur bakteri berkembang sehingga mempunyai massa sebesar $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gram setelah *t* jam. Berapa laju perkembangan bakteri pada waktu $t = 2$ jam?
3. Sebuah partikel sepanjang suatu garis pada bidang koordinat. Jarak partikel itu dari titik asal pada akhir *t* detik adalah *s* meter yang memenuhi persamaan $s = 3t^2 – 2$. Setelah berapa detik partikel itu mencapai kecepatan 10 m/detik ?
4. Berat dalam gram suatu tumor yang membahayakan pada saat *t* adalah $W(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}09t$, dengan *t* diukur dalam minggu. Carilah laju pertumbuhan tumor pada $t = 10$ minggu ?
5. Sebuah kota dijangkiti epidemic influenza. Petugas menaksir bahwa hari setelah mulainya epidemic, banyaknya orang yang sakit flu diberikan dengan persamaan $p(t) = 120t^2 - 2t^3$, untuk $0 \le t \le 40$. Dengan laju berapa flu menular pada saat $t = 10$, $t = 20$, $t = 40$?

G. NILAI LIMIT FUNGSI YANG MENDEKATI BILANGAN ALAM (*e*) (MATERI PENGAYAAN)

Diberikan fungsi $f : \Re \rightarrow \Re$, dengan $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

Fungsi f tidak terdefinisi di $x = 0$, dan terdefinisi untuk semus nilai $x > 0$.

Akan dicari nilai $f(x)$ untuk x mendekati 0 dari kanan.

Perhatikan tabel berikut :

x	$(1+x)^{1/x}$
2	1.732050808
1	2
0.5	2.25
0.4	2.319103275
0.3	2.397790164
0.2	2.488320000
0.1	2.593742460
0.01	2.704813829
0.001	2.716923932
0.0001	2.718145927
0.00001	2.718268237
0.000001	2.718280469
0.0000001	2.718281694
0.00000001	2.718281786
0.000000001	2.718282052

Dari tabel di atas , tampak bahwa jika x mendekati 0 dari kanan , maka nilai $f(x)$ akan mendekati nilai 2,71828…= *e.*

Jadi, $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Selanjutnya dilihat fungsi $g : \Re \to \Re$, dengan $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Fungsi g tidak terdefinisi di $x = 0$. Akan dilihat nilai fungsinya untuk x mendekati tak hingga.

Perhatikan tabel berikut :

X	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718268237
1000000	2.718280469
10000000	2.718281694
100000000	2.718281786
1000000000	2.718282031

Dari tabel di atas , tampak bahwa jika x mendekati tak hingga , maka nilai $g(x)$ akan mendekati nilai 2,71828…= e.

Jadi, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Contoh 1.

Hitunglah $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2x)^{1/x}$.

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 0}(1 + 2x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1 + 2x)^{2.\frac{1}{2x}}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2$$

$$= e^2.$$

Contoh 2.

Hitunglah $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{3x}$.

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{18.\frac{x}{6}}$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{18}$$

$$= e^{18}.$$

UJI KOMPETENSI 7

Hitunglah nilai limit – limit berikut ini :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{5/x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{4/x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{2}{x}\right)^{3x}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{5x}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4x}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{7x}$

UJI KOMPETENSI AKHIR

I. Pilihlah satu jawaban yang benar !

1. Nilai $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}$ adalah ….

   a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{2}$ c. 0 d. 1 e. 3

2. Nilai $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ adalah ….

   a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{3}$ c. 0 d. 3 e. 6

3. Nilai $\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}$ adalah……

   a. 0 b. 5 c. 6,5 d. 8 e. $\propto$

4. Nilai $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}{x-3}$ adalah …

   a. $\frac{1}{7}\sqrt{7}$ b. $\frac{1}{14}\sqrt{7}$ c. 0 d. $-\frac{1}{14}\sqrt{7}$ e. $-\frac{1}{7}\sqrt{7}$

5. Nilai $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-2x+3}$ adalah…..

   a. 0 b. $\frac{3}{2}$ c. $\sqrt{2}$ d. 2 e. ∞

6. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5x}-x-2$ adalah …

   a. $-\frac{9}{2}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. 0 d. $\frac{1}{2}$ e. ∞

7. Nilai $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-1}$ adalah…..

   a. -1 b. 0 c. 1 d. 2 e. - ∞

8. Nilai $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$ adalah …..

   a. $-\sqrt{2}$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c. 0 d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $\sqrt{2}$

9. Nilai $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x\tan x}$ adalah….

   a. 8 b. 6 c. -4 d. -8 e. -16

10. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ adalah……..

a. - $\frac{1}{2}$ b. 0 c. $\frac{1}{2}$ d. 1 e. 2

11. Nilai $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ adalah …

a. cos x b. sin x c. tan x d. cot x e. sec x

12. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ adalah ….

a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{4}$ c. - $\frac{1}{2}$ d. $\frac{3}{4}$ e. $\frac{4}{5}$

13. Nilai $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}$ adalah…...

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{4}$ c. -$\frac{1}{2}$ d. -$\frac{1}{4}$ e. 0

14. Nilai $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 2x - 3)\sin(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$ adalah …..

a. 10 b. 5 c. 1 d. 0 e. – 1

15. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x \tan 2x}$ adalah…..

a. – 4 b. – 2 c. 4 d. 6 e. 12

16. Nilai $\lim_{x \to -2} \frac{1 - \cos(x+2)}{x^2 + 4x + 4}$ adalah…

a. 0 b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 2 e. 4

17. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2} x \tan 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ adalah ….

a. – 2 b. – 1 c. 0 d. 1 e. 2

18. Nilai $\lim_{x \to -y} \frac{(3x + 3y) + \tan(x+y)}{9x + 9y}$ adalah …

a. $\frac{1}{9}$ b. $\frac{2}{9}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{4}{9}$ e. ∞

19. Nilai $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x-a}{3x-3a+\tan(x-a)}$ adalah ….

a. 0 b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{2}$ e. 1

20. Suatu kubus mempunyai panjang rusuk *r*. Volume kubus merupakan fungsi dalam variable *r*, yaitu $f(r) = r^3$. Laju perubahan volume kubus terhadap *r*, pada saat $r = 3$ adalah …..

a. 54 b. 27 c.18 d. 9 e. 3

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan benar !

1. Tentukan nilai limit berikut :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{4x^3 + 2x^2 - x}$

b. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^3 - 343}{x - 7}$

2. Tentukan nilai limit berikut :

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^3 + x^2 + 5x}{4x^3 - 7}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4x-7)(2x+3)(5-7x)}{x^3 - 18}$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x - 3} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$

d. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}\right)$

3. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ jika diketahui

a. $f(x) = 4x - 7$

b. $f(x) = x^2 - 6x - 3$

c. $f(x) = \sqrt{x}$

4. Tentukan nilai limit berikut :

   a. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x \cos 5x}{\sin 2x}$

   b. $\lim_{x \to 3} \frac{1 - \cos^2(x^2 - 6x + 9)}{4(x-3)}$

   c. $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)\sin(x-2)}{(x^2 - x - 2)^2}$

   d. $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{(x^2 - 1)\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)}{3x + \frac{\pi}{2}}$

5. Lebar suatu persegi panjang adalah *x* cm, sedangkan panjangnya sama dengan empat kali lebarnya.

   a. Jika L menyatakan luas persegi panjang itu, nyatakan *L* sebagai fungsi dari *x*.

   b. Tentukan laju perubahan luas *L* terhadap *x* pada saat *x* = 4 cm.

KUNCI JAWABAN UJI KOMPETENSI AKHIR

I.	1. A	II.	1.	a. – 5
	3. D			b. 147
	5. B		3.	a. 4
	7. E			b. $2x - 6$
	9. D			c. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	11. A			
	13. B		5.	a. $L = 4x^2$
	15. D			b. 32 cm^2
	17. D			
	19. B			

DAFTAR PUSTAKA

Departemen Pendidikan Nasional. 2003. Kurikulum 2004: *Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matermatika untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah*. Jakarta.

Finney, Ross L. & Thomas, George B. 1994. *Calculus,* 2*nd edition*. New York: Addison – Wesley Publishing Company.

Johannes dkk. 2005. *Kompetensi Matematika*. Jakarta : Yudhistira.

Noormandiri, Endar Sucipto. 1997. *Matematika untuk SMU, Jilid* 2. Jakarta : Erlangga.

Purcell, E.J. dan Varbeg D.Terjemahan Bana Kartasasmita dkk. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid* I, *Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Sartono Wirodikromo. 2004. *Matematika untuk SMA*. Jakarta : Erlangga.

Siswanto. 2005. *Matematika Inovatif*. Solo : Tiga Serangkai.

Stewart, James. 2001. *Calculus*, 2*nd edition*. USA : Thomson Learning – Wodswort Group.

Sumadi dkk. 1995. *Matematika SMU* 2*b*. Solo : Tiga Serangkai.

Sumartono Prawirosusanto. *Catatan Kuliah Fisika Dasar* I, *MKDK Universitas Gadjah Mada*. Yogyakarta.