KELUARGA EKSPONENSIAL

Untuk Memenuhi Tugas Mata Kuliah Statistika Inferensial

Dosen Pengampu: Nendra Mursetya Somasih Dwipa, M.Pd

Disusun Oleh :

V A4

Kelompok 2

1. Nunuk Rohaningsih (14144100119)
2. Rochayati (14144100120)
3. Siam Tri Khasanah (14144100122)
4. Emi Suryani (14144100126)
5. Punika Dwi Yanti (14144100143)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS PGRI YOGYAKARTA

2016

KELUARGA EKSPONENSIAL

A. Keluarga Eksponensial

Keluarga fungsi kepadatan probabilitas yang tergantung pada parameter θ dan berbentuk

$$f(x;\theta) = C(\theta)e^{[Q(\theta)T(x)]}h(x)$$

Dengan $x \in \boldsymbol{R}, \theta \in \Omega(\subseteq \boldsymbol{R})$ dan $C(\theta) > 0$ serta $h(x) > 0$ untuk $x \in S$ dinamakan keluarga eksponensial. Jika variabel random saling bebas dan berdistribusi identik dengan $f(x;\theta)$ dengan $\theta \in \Omega \subseteq \boldsymbol{R}$ maka fungsi kepadatan probabilitas dari X sebagai

$$f(x;\theta) = C(\theta)e^{[Q(\theta)T(x)]}h(x).$$

Contoh 1:

Misalkan $f(x;\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}I_A(x)$ dengan $A = \{0,1,2, \ldots n\}$.

Fungsi probabilitas tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}I_A(x) \\ &= (1-\theta)^n\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^x\binom{n}{x}I_A(x) \\ &= (1-\theta)^n e^{\left[log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right]}\binom{n}{x}I_A(x) \end{aligned}$$

maka fungsi probabilitas dari distribusi binomial $f(x;\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}I_A(x)$ adalah $f(x;\theta) = (1-\theta)^n e^{\left[log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right]}\binom{n}{x}I_A(x)$.

Sehingga distribusi Binomial merupakan anggota keluarga eksponensial dengan

$C(\theta) = (1-\theta)^n, Q(\theta) = log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right), T(x) = x, h(x) = \binom{n}{x}I_A(x)$.

Contoh 2:

Misalkan variabel random X berdistribusi $N\ (\mu,\sigma^2)$. Jika σ diketahui $\mu = \theta$ maka fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(x^2-2x\theta+\theta^2)}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]} e^{\left[\frac{2x\theta}{2\sigma^2}\right]} e^{\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right]} e^{\left[\frac{\theta}{\sigma^2}x\right]} e^{\left[-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right]}$$

dengan $\theta \in \mathbf{R}$ sehingga distribusi tersebut merupakan anggota keluarga eksponensial dengan

$c\ (\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{\theta^2}{\sigma^2}\right]}$, $Q\ (\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2,}$, $T(x) = x$, $h\ (x) = e^{\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]}$.

Jika μ diketahui dan $\sigma^2 = \theta$ maka fungsinkepadatan probabilitas dari X adalah

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta}\right]}$$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{\left[-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2\right]}$$

Dengan $\theta \in (0,\infty)$ sehingga distribusi tersebut merupakan anggota keluarga eksponensial dengan

$$c(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}, Q(\theta) = -\frac{1}{2\theta}, T(x) = (x-\mu)^2, h(x) = 1.$$

Jika ruang parameter dari keluarga fungsi kepadatan eksponensial 1 parameter mengandung interval *non degenerate* maka keluarga tersebut lengkap.

Teorema 1.6

Misalkan X variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x;\theta)$ dengan $\theta \in \Omega \subseteq \boldsymbol{R}$ seperti tersebut diatas. Keluarga

$$G = \{g(x;\theta) | \theta \in \Omega\}$$

merupakan fungsi kepadatan probabilitas dari $T\ (X)$ maka G lengkap asalkan Ω mengandung interval *non degenerate*.

Teorema 1.7

Misalkan $X_1, X_{2,}, \ldots \ldots X_n$ variabel random saling bebas dan berdistribusi identik dengan fungsi kepadatan probabilitas merupakan anggota keluarga eksponensial 1 parameter.

1. Statistik $T^* = \sum_{i=1}^{n} T\ (X_1)$ merupakan statistik cukup untuk θ.
2. Fungsi kepadatan probabilitas dari T* selalu berbentuk

$$g(t;\theta) = [c(\theta)]^n e^{[Q(\theta)t]} h*(t)$$

3. Jika variabel random kontinu maka fungsi kepadatan probilitasnya dapat dinyatakan sebagai

$$g(t;\theta) = [c(\theta)]^n e^{[Q(\theta)t]} h*(t)$$

Teorema berikut ini menyatakan sifat kelengkapan dari suatu keluarga distribusi.

Teorema 1.8

Keluarga $G = \{g(x;\theta) | \theta \in \Omega\}$ lengkap asalkan Ω mengandung interval non degenerate.

Dalam hal ini $G = \{g(x;\theta) | \theta \in \Omega\}$ dengan $g(x;\theta)$ adalah keluarga fungsi kepadatan probabilitas dari statistik cukup T^*

Teorema 1.9

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ variabel random saling bebas dan berdistribusi identik dengan fungsi kepadatan probabilitas merupakan anggota keluarga eksponensial dan T^* seperti didefinisikan pada Teorema 1.7.1. Jika V sebarang statistik yang lain, V saling bebas jika dan hanya jika distribusi dari V dan T^* tidak tergantung pada θ

Contoh 3:

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ variabel random saling bebas dengan funsi kepadatan $N(\mu, \sigma^2)$ yang merupakan anggota keluarga eksponensial dalam $\theta = \mu$.

Statistik

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Merupakan statistik cukup untuk θ sedangkan

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}$$

merupakan statistik lain yang tidak tergantung pada θ maka dengan menggunakan Teorema 1.9 diperoleh bahwa x dan S^2 saling bebas.

B. Generalisasi dari Keluarga Eksponensial

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabel random saling bebas dan $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$. Fungsi kepadatan probabilitas bersama dari merupakan anggota keluarga eksponensial r parameter jika mempunyai bentuk

$$f(x;\theta) = c(\theta)e^{\left[\sum_{i=1}^{n} Q_i(\theta) T_i(x)\right]} h(x)$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ untuk $i = 1,2, \dots., k$ dan $k \geq 1$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^t \epsilon\, \Omega \subseteq R^r$,

$C(\theta) > 0, \theta\, \epsilon\, \Omega$ dan $h(x) > 0$ untuk $x\, \epsilon\, S$ himpunan nilai positif dari $f(x;\theta)$ yang saling bebas terhadap θ.

Contoh 4:

Misalkan variabel random X berdistribusi $N(\theta_1, \theta_2)$. Fungsi kepadatan probalitas dari X dapat dinyatakan sebagai

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{\left(x^2-2x\theta+\theta^2\right)}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]} e^{\left[\frac{2x\theta}{2\sigma^2}\right]} e^{\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right]} e^{\left[\frac{\theta}{\sigma^2}x\right]} e^{\left[-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right]}$$

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{\left[-\frac{{\theta_1}^2}{2\theta_2}x\right]} e^{\left[-\frac{\theta_1}{\theta_2}x - \frac{1}{2\theta_2}x^2\right]}$$

Hal ini berarti keluarga distribusi normal merupakan anggota keluarga distribusi eksponensial dengan

$$c(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{\left[-\frac{{\theta_1}^2}{2\theta_2}\right]}, Q_1(\theta) = \frac{\theta_1}{\theta_2}, Q_2(\theta) = \frac{1}{2\theta_2}$$

dan

$$T_1(x) = x, T_2(x) = -x, h(x) = 1$$

Dalam hal ini $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.