

INTEGRAL TAK TENTU

Definisi :

Fungsi F dikatakan anti turunan dari fungsi f pada selang I jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x di

I. Notasi : $F(x) = \int f(x) dx$

Integral tak tentu adalah Anti/Invers/Kebalikan turunan.

Contoh : $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ $\int 4x^3 dx = x^4 + c$

Integral tak tentu adalah operator linear, yaitu bersifat :

1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$
2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Rumus-rumus Dasar Integral Tak Tentu

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$
2. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
3. $\int \cos x dx = \sin x + c$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$
8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{tgn}^{-1} x + c$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$
10. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tgn} x + c$
11. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = \operatorname{ctg} x + c$
12. $\int \sec x \operatorname{tgn} x dx = \sec x + c$
13. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x dx = \operatorname{cosec} x + c$

Contoh :

$$\int (2x^3 + 5\cos x) dx = \frac{1}{2}x^4 + 5\sin x + c$$

INTEGRAL TENTU

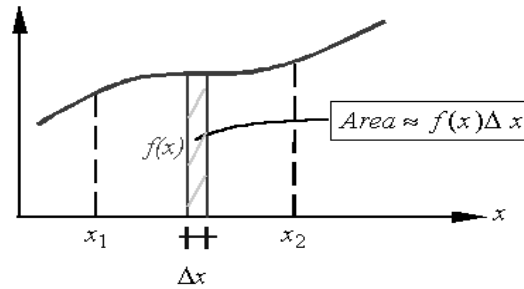
Definisi :

Misal f fungsi yang didefinisikan pada [a,b], f dikatakan terintegralkan pada [a,b] jika

$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ ada, selanjutnya $\int_a^b f(x) dx$ disebut Integral Tentu (Integral Riemann)

f dari a ke b, dan didefinisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i .$$



$\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas daerah yang tercakup diantara kurva $y = f(x)$ dan sumbu x

dalam selang $[a,b]$, jika $\int_a^b f(x)dx$ bertanda negatif maka menyatakan luas daerah yang berada dibawah sumbu x .

Definisi :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx, \quad a > b$$

Teorema Dasar Kalkulus

Teorema Dasar Kalkulus memberikan kemudahan untuk menghitung Integral Tentu, berikut teorema tersebut :

Misal f kontinu pada $[a,b]$ dan F sebarang anti turunan f , maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Selanjutnya ditulis $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Contoh :

1. Perhatikan bahwa jika $r \in \mathbb{Q}$ dan $r \neq -1$, maka

$$\int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Jawab :

Karena $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ suatu anti turunan dari $f(x) = x^r$, maka menurut TDK,

$$\int_a^b x^r dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Integral tentu sebagai operator linear, yaitu bersifat :

Misal f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan k suatu konstanta, maka kf dan $f + g$ terintegralkan, dengan

$$1. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Contoh :

Hitung $\int_{-1}^2 (4x - 6x^2)dx$

Jawab :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (4x - 6x^2)dx &= 4 \int_{-1}^2 x dx - 6 \int_{-1}^2 x^2 dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 - 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= 4 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = -12 \end{aligned}$$

Sifat-Sifat Integral Tentu

1. Sifat Penambahan Selang

Teorema :

Jika f terintegralkan pada suatu selang yang mengandung tiga titik a , b dan c , maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \text{ bagaimanapun urutan } a, b \text{ dan } c.$$

Contoh :

$$\begin{aligned} 1. \int_0^2 x^2 dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx & 2. \int_0^2 x^2 dx &= \int_0^3 x^2 dx + \int_3^2 x^2 dx \\ 3. \int_0^2 x^2 dx &= \int_0^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^2 x^2 dx \end{aligned}$$

2. Sifat Simetri

Teorema :

Jika f fungsi genap [$f(-x) = f(x)$], maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ dan

Jika f fungsi ganjil [$f(-x) = -f(x)$], maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Contoh :

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} dx = 4\sqrt{2}$$

$$2. \int_{-5}^5 \frac{x^5}{x^2 + 4} dx = 0$$

TEKNIK-TEKNIK PENGINTEGRALAN

1. Teknik Substitusi

a. Substitusi Dalam Integral Tak Tentu

Teorema :

Misal g fungsi yang terdiferensialkan dan F suatu anti turunan dari f , jika $u = g(x)$ maka $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c$

Contoh :

Hitunglah $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Jawab : Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ sehingga $du = \frac{1}{2}x^{-1/2} dx$ maka

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin \sqrt{x} \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right) dx = 2 \int \sin u du = 2 \cos u + c = 2 \cos \sqrt{x} + c$$

b. Substitusi Dalam Integral Tentu.

Teorema :

Misal g mempunyai turunan kontinu pada $[a,b]$ dan f kontinu pada daerah nilai g ,

$$\text{maka } \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Contoh :

Hitung $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)} dx$

Jawab :

Misal $u = x^2 + 2x + 6$ sehingga $du = 2x + 2 dx = 2(x+1)dx$ perhatikan $u = 6$ jika $x = 0$ dan $u = 9$ jika $x = 1$, jadi

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+6} dx = \frac{1}{2} \int_6^9 \frac{2(x+1)}{x^2+2x+6} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_6^9 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} [\ln u]_6^9 = \frac{1}{2} (\ln 9 - \ln 6) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

2. Pengintegralan Bentuk-Bentuk Trigonometri

a. $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$

Jika n bilangan bulat positif ganjil, maka keluarkan faktor $\sin x$ atau $\cos x$ dan kemudian gunakan kesamaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Jika n bilangan bulat positif genap, maka gunakan rumus setengah sudut

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Contoh :

$$1. \int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x (2) dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

b. $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Jika m atau n bilangan bulat positif ganjil dan eksponen lain sembarang, maka keluarkan faktor $\sin x$ atau $\cos x$ yang berpangkat ganjil tersebut kemudian gunakan kesamaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Jika m dan n bilangan bulat positif genap, maka gunakan rumus setengah sudut.

Contoh :

Tentukan : 1. $\int \sin^3 x \cos^{-4} x dx$ 2. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

c. $\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{cotg}^n x dx.$

Keluarkan faktor $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ dalam kasus tg atau faktor $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$ dalam kasus cotg .

Contoh :

$$\int \cotg^4 x \, dx = \int \cotg^2 x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx = \int \cotg^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \int \cotg^2 x \, dx =$$

$$-\int \cotg^2 x \, d(\cotg x) - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx = -\frac{1}{3} \cotg^3 x + \cotg x + x + c$$

d. $\int \operatorname{tg}^m x \operatorname{sec}^n x \, dx, \int \cotg^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$

Jika n genap dan m sembarang, maka keluarkan faktor $\operatorname{sec}^2 x$ atau $\operatorname{cosec}^2 x$.

Jika m ganjil dan n sembarang, keluarkan faktor $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sec} x$.

Contoh :

Tentukan : 1. $\int \operatorname{tg}^{-3/2} x \operatorname{sec}^4 x \, dx$ 2. $\int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{sec}^{-1/2} x \, dx$

e. $\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \sin nx \, dx, \int \cos mx \cos nx \, dx.$

Gunakan kesamaan :

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Contoh :

$$\int \sin 2x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 5x + \sin(-x) \, dx$$

$$= \frac{1}{10} \int \sin 5x \, d(5x) - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + c.$$

3. Pengintegralan Parsial

Pengintegralan parsial (sebagian) dapat dilakukan jika pengintegralan dengan teknik substitusi tidak memberikan hasil, dan dengan catatan bagian sisa pengintegralan lebih sederhana dari integral mula-mula.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Contoh :

1. $\int x e^x \, dx$

Misalkan $u = x, dv = e^x \, dx$ maka $du = dx, v = e^x$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c$$

4. Integral Fungsi Akar (Substitusi yang Merasionalkan).

a. Fungsi Integral yang memuat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Penyelesaian dengan menggunakan substitusi : $u = \sqrt[n]{ax+b}$

Contoh : Hitung $\int x \sqrt[3]{x-4} \, dx$

Jawab : Misalkan $u = \sqrt[3]{x-4}$ maka $u^3 = x-4$ dan $3u^2 \, du = dx$

$$\text{Shg } \int x \sqrt[3]{x-4} \, dx = \int (u^3 + 4)u \cdot 3u^2 \, du = \frac{3}{7}(x-4)^{3/7} + (x-4)^{4/3} + c$$

b. Integral yang memuat bentuk $\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$

Gunakan berturut-turut substitusi : $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$ dan $x = a \sec t$.

Contoh :

1. Tentukan $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

Jawab :

Jawab : Misalkan $x = 2 \sin t$ maka $dx = 2 \cos t dt$ dan $\sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$, shg

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{2 \cos t}{4 \sin^2 t} (2 \cos t) dt = \int \operatorname{ctg}^2 t dt = -\operatorname{ctg} t - t + c \\ &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

5. Integral Fungsi Rasional

Fungsi Rasional merupakan fungsi hasil bagi dua fungsi Polinom yang ditulis :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ P(x) dan Q(x) fungsi -fungsi Polinom dengan Q(x) } \neq 0$$

Fungsi Rasional dibedakan atas :

- Fungsi Rasional Sejati yaitu fungsi rasional dimana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih kecil dari pada derajat fungsi polinom pada penyebut.
- Fungsi Rasional Tak Sejati yaitu fungsi rasional dimana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih besar dari atau sama dengan derajat fungsi polinom pada penyebut.

Fungsi Rasional Tak Sejati dapat ditulis sebagai penjumlahan fungsi polinom dengan Fungsi Rasional Sejati dengan jalan membagi fungsi pembilang dengan fungsi penyebut.

Permasalahan mengintegrasikan fungsi rasional terletak pada bagaimana mengintegrasikan fungsi rasional sejati. Suatu fakta, bahwa fungsi rasional sejati dapat ditulis sebagai jumlah dari fungsi rasional sejati yang lebih sederhana

Contoh :

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

- Penjabaran Fungsi Rasional atas Faktor Linear yang Berbeda

Contoh :

Tentukan $\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx$

Jawab :

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

maka $5x+3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$

dengan menyamakan koefisien pada kedua polinom diruas kiri dan ruas kanan maka

diperoleh : $A = -1$, $B = -\frac{1}{2}$, dan $C = \frac{3}{2}$ sehingga

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{-1/2}{x+1} dx + \int \frac{3/2}{x-3} dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-3| + c$$

b. Penjabaran Fungsi Rasional atas Faktor Linear yang Berulang

Contoh :

Tentukan $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$

Jawab :

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \text{ maka } x = A(x-3) + B$$

dengan menyamakan koefisien pada kedua polinom diruas kiri dan ruas kanan diperoleh : A = 1 dan B = 3 sehingga

$$\int \frac{x}{(x-3)^2} dx = \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{3}{(x-3)^2} dx = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + c$$

Yang perlu diperhatikan untuk tiap faktor $(ax+b)^k$ dalam penyebut, maka ada sebanyak k suku penjabarannya, yaitu :

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

c. Penjabaran Fungsi Rasional atas Faktor Kuadrat yang Berbeda

Contoh :

Tentukan $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$

Jawab :

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

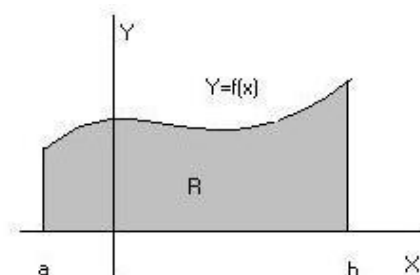
Selanjutnya tentukan A, B dan C seperti cara diatas dan kemudian hitung integral setiap sukunya.

PENGUNAAN INTEGRAL TERTENTU

1. Luas Daerah Bidang Rata

a. Daerah Antara Kurva dan Sumbu Koordinat.

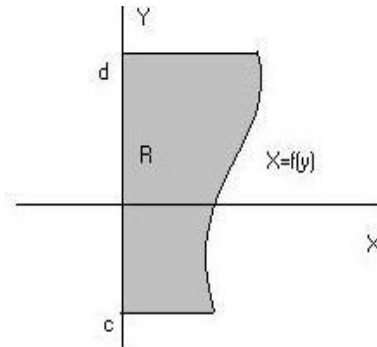
Perhatikan gambar daerah rata dibawah ini Daerah R dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$, luasnya $A(R)$ ditentukan oleh :



$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Jika gambar terletak dibawah sumbu X maka integral diatas bernilai negatif, karena luas daerah tidak mungkin bilangan negatif maka nilai integral tersebut dimutlakkan.

Perhatikan pula gambar daerah rata berikut ini :



Daerah R dibatasi oleh grafik-grafik $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ dan $x = 0$, luasnya $A(R)$

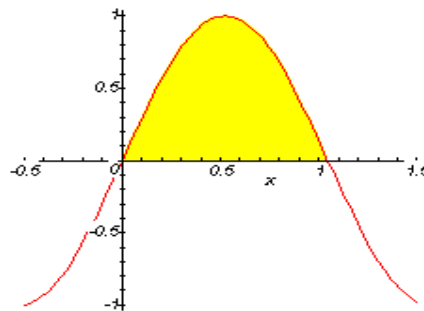
$$\text{ditentukan oleh : } A(R) = \int_c^d f(y)dy$$

Jika gambar terletak disebelah kiri sumbu Y maka integral diatas bernilai negatif, karena luas daerah tidak mungkin bilangan negatif maka nilai integral tersebut dimutlakkan.

Contoh :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh fungsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(3x) \\ g(x) &= 0 \\ 0 &\leq x \leq \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



Untuk menghitung luas daerah rata ikuti pola berfikir sebagai berikut :

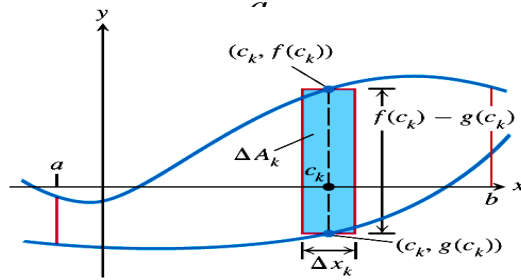
1. Gambar daerah yang bersangkutan
2. Potong daerah menjadi jalur-jalur dan beri nomor pada satu jalur tertentu
3. Hampiri luas jalur tertentu tersebut dengan luas persegi panjang
4. Jumlahkan luas jalur-jalur pada daerah tersebut
5. Ambil limit dari jumlah diatas dengan lebar jalur menuju 0, maka diperoleh integral tertentu.

b. Daerah antara 2 Kurva

Perhatikan kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $[a,b]$, sebagai gambar berikut :

$$\Delta A \approx (f(x) - g(x))\Delta x$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Kita gunakan cara : potong, aproksimasikan, dan integralkan.

Latihan Soal

1. Tentukan :

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

b. $\int (\sqrt{x} \ln x) dx$

c. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$

d. $\int \operatorname{ctg} x \operatorname{cosec}^3 x dx$

e. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

f. $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$

2. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 2$ dan $y = 2x^2 + x - 4$

3. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = x$, $y = 2x$ dan $y = 5 - x$

4. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$ dan $y = -x + 6$

5. Gambarkan daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = x + 6$, $y = x^3$ dan $2y + x = 0$. Kemudian hitunglah luasnya.