FISIKA UNTUK UNIVERSITAS JILID I

ROSYID ADRIANTO

DEPARTEMEN FISIKA
UNIVERSITAS AIRLANGGA, SURABAYA
E-mail address, P. Carlson: i_an_cakep@yahoo.co.id
URL: http://www.rosyidadrianto.wordpress.com

Puji syukur atas kehadirat Allah swt yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga dapat diterbitkannya buku "FISIKA UNTUK UNIVERSITAS JILID I" ini.

Ringkasan. Buku Fisika untuk Universitas Jilid I ini diterbitkan untuk menunjang materi kuliah Rosyid Adrianto, S.Si., di kelas.

Daftar Isi

BAB 1

Pengukuran dan Vektor

Fisika adalah ilmu yang mempelajari keadaan dan sifat-sifat benda serta perubahannya, mempelajari gejala-gejala alam serta hubungan antara satu gejala dengan gejala lainnya. Fisika berhubungan dengan materi dan energi, dengan hukum-hukum yang mengatur gerakan partikel dan gelombang, dengan interaksi antar partikel, dan dengan sifat-sifat molekul, atom dan inti atom, dan dengan sistem-sistem berskala lebih besar seperti gas, zat cair, dan zat padat. Beberapa orang menganggap fisika sebagai sains atau ilmu pengetahuan paling fundamental karena merupakan dasar dari semua bidang sains yang lain [**5**].

Dalam bidang sains dan teknologi sering kali dilakukan riset-riset yang tidak lepas dari berbagai macam pengukuran yang memerlukan beberapa macam alat ukur. Dalam pengukuran ini sering melibatkan besaran-besaran penting yang memiliki satuan dan dimensi. Besaran-besaran dalam fisika tidak hanya memiliki satuan melainkan ada beberapa di antaranya yang memiliki arah. Besaran fisis yang memiliki satuan dan arah disebut besaran vektor.

Oleh sebab itu, dalam bab ini dibahas beberapa macam besaran beserta satuan dan dimensinya. Selain itu, dibahas pula beberapa macam alat ukur beserta penggunaannya dan analisis matematika suatu vektor.

1. Besaran dan Dimensi

Besaran adalah keadaan dan sifat-sifat benda yang dapat diukur. Besaran fisika dibedakan menjadi dua yaitu besaran pokok dan besaran turunan.

1.1. Besaran pokok. Besaran pokok adalah besaran yang paling sederhana yang tidak dapat dinyatakan dengan besaran lain yang lebih sederhana. Dalam fisika dikenal tujuh macam besaran pokok yaitu panjang, massa, waktu, arus listrik, suhu, jumlah zat dan intensitas cahaya. Untuk memudahkan pernyataan suatu besaran dengan besaran pokok, dinyatakan suatu simbol yang disebut dimensi. Untuk besaran pokok mekanika (panjang, massa, dan waktu) berturut-turut mempunyai dimensi [L], [M], dan [T]. Besaran pokok ini hanya memiliki besar dan tidak memiliki arah. Tabel 1 menunjukkan satuan, simbol dan dimensi dari besaran pokok.

1.2. Besaran turunan. Besaran turunan adalah besaran yang dapat atau bisa diturunkan dari besaran pokok. Besaran turunan ini memiliki besar dan arah.

TABEL 1. Besaran turunan

Besaran Fisika	Satuan	Simbol	Dimensi
Panjang	meter	m	L
Massa	kilogram	kg	M
Waktu	sekon	s	T
Arus listrik	ampere	A	I
Suhu termodinamika	kelvin	K	θ
Jumlah zat	mol	mol	N
Intensitas cahaya	kandela	cd	J

BAB 2

Kinematika

Gambaran mengenai gerakan benda merupakan bagian yang penting dalam penggambaran alam semesta secara fisis. Masalah ini merupakan inti pengembangan sains dari Aristoteles hingga Galileo. Hukum tentang pergerakan benda-benda yang jatuh telah dikembangkan jauh sebelum Newton mengemukakan gagasannya tentang benda-benda jatuh. Salah satu fenomena ilmiah pada masa awal adalah mempersoalkan gerakan matahari melintasi langit dan gerak revolusi planet serta bintang. Keberhasilan mekanika newton adalah penemuan bahwa gerakan bumi dan planet-planet lain mengelilingi matahari dapat dijelaskan lewat gaya tarik antara matahari dan planet-planet itu.

1. Gerak Satu Dimensi

Kita akan mulai dengan benda-benda yang posisinya dapat digambarkan dengan menentukan posisi satu titik agar pembahasan tentang gerak dapat dipahami secara mudah. Benda semacam itu dinamakan partikel. Sebagai contoh, kita anggap bumi sebagai partikel yang bergerak mengelilingi matahari dalam lintasan yang menyerupai lingkaran. Dalam kasus itu, kita hanya fokus terhadap gerakan pusat bumi, sehingga ukuran bumi dan rotasinya dapat diabaikan. Dalam bidang astronomi, keseluruhan tata surya atau bahkan seluruh galaksi kadang-kadang diperlakukan sebagai partikel. Jika kita menganalisis rotasi atau struktur internal sebuah benda maka kita tidak dapat lagi memperlakukannya sebagai sebuah partikel tunggal. Akan tetapi, materi kita tentang gerakan partikel tetap berguna, bahkan untuk kasus yang kompleks sekali pun, karena setiap benda dapat dianggap sebagai kumpulan atau "sistem partikel".

1.1. Kelajuan, Perpindahan, dan Kecepatan. Kelajuan rata-rata partikel disefinisikan sebagai perbandingan jarak total yang ditempuh terhadap waktu total yang dibutuhkan:

$$\text{Kelajuan rata-rata} = \frac{\text{jarak total}}{\text{waktu total}} \,.$$

Satuan SI kelajuan rata-rata adalah meter per sekon (M/s), dan satuan yang biasanya dipakai di Amerika adalah feet per sekon (ft/s). Secara internasional, satuan yang lebih umum adalah kilometer per jam km/jam.

Konsep kecepatan serupa dengan konsep kelajuan akan tetapi berbeda karena kecepatan mencakup *arah* gerakan. Agar dapat memahami konsep ini, terlebih dahulu kita bahas konsep perpindahan. Pertama, kita buat sistem koordinat dengan memilih titik acuan pada sebuah garis untuk titik asal O. Untuk tiap titik lain pada garis itu kita tetapkan sebuah bilangan x yang menunjukkan seberapa jauhnya titik itu dari titik asal. Tanda x bergantung pada posisi relatifnya terhadap titik asal O. Kesepakatan yang biasa digunakan adalah titik-titik di kanan titik asal diberi nilai positif dan titik-titik di kiri diberi nilai negatif.

Sebagai contoh, ada sebuah mobil yang berada pada posisi x_1 saat t_1 dan pada posisi x_2 saat t_2. Perubahan posisi mobil $(x_2 - X_1)$ dinamakan perpindahan. Dalam fisika biasanya ditulis : $\Delta x = x_2 - x_1$.

Sementara kecepatan adalah laju perubahan posisi. Kecepatan rata-rata partikel didefinisikan sebagai perbandingan antara perpindahan Δx dan selang waktu Δt:

$$v_{\text{rata-rata}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \ .$$

BAB 3

Hukum I Newton

Mekanika klasik atau mekanika Newton adalah teori tentang gerak yang didasarkan pada konsep massa dan gaya serta hukum - hukum yang menghubungkan konsep - konsep fisis ini dengan besaran kinematika (perpindahan, kecepatan, dan percepatan) yang telah dibahas sebelumnya. Semua gejala mekanika klasik dapat digambarkan dengan menggunakan tiga hukum sederhana yang dinamakan hukum Newton tentang gerak. Hukum Newton menghubungkan percepatan sebuah benda dengan massanya dan gaya - gaya yang bekerja padanya [**1**].

Hukum - hukum Newton

- **Hukum I.** "Benda berada pada kondisi tetap seperti keadaan awalnya yang diam atau bergerak dengan kecepatan sama (kecuali jika benda dipengaruhi oleh gaya yang tidak seimbang atau gaya eksternal neto) pada kerangka acuan yang tetap seperti keadaan awalnya pula (diam atau bergerak dengan kecepatan sama)".

  Gaya neto yang bekerja pada sebuah benda disebut juga gaya resultan yaitu jumlah vektor semua gaya yang bekerja pada benda:

  $F_{\text{neto}} = \sum F$.

  Sementara pada hukum pertama ini besar gaya resultan adalah nol ($\sum F = 0$).
- **Hukum II.** "Percepatan sebuah benda berbanding terbalik dengan massanya dan sebanding dengan gaya eksternal neto yang bekerja":

$$a = \frac{F_{\text{neto}}}{m} \text{ , atau } \sum F = ma$$

- **Hukum III.** "Gaya - gaya selalu terjadi berpasangan. Jika benda A memberikan gaya pada benda , gaya yang besarnya sama tetapi arahnya berlawanan diberikan oleh benda B kepada benda A ($F_{\text{aksi}} = -F_{\text{reaksi}}$)".

1. Hukum Pertama Newton : Hukum Kelembaman

Hukum pertama Newton menyatakan bahwa sebuah benda dalam keadaan diam atau bergerak dengan kecepatan konstan akan tetap diam atau terus bergerak dengan kecepatan konstan kecuali ada gaya eksternal yang bekerja pada benda itu. Kecenderungan ini digambarkan dengan mengatakan bahwa benda mempunyai kelembaman. Sehubungan dengan itu, hukum pertama Newton sering disebut dengan hukum kelembaman.

2. Gaya, Massa, dan Hukum Kedua Newton

Hukum pertama dan kedua Newton dapat dianggap sebagai definisi gaya. Gaya adalah suatu pengaruh pada sebuah benda yang menyebabkan benda mengubah kecepatannya (dipercepat atau diperlambat). Arah gaya adalah arah percepatan yang disebabkannya jika gaya itu merupakan satu - satunya gaya yang bekerja pada benda tersebut. Besarnya gaya adalah hasil kali massa benda dan besarnya percepatan yang dihasilkan gaya.

Massa adalah sifat intrinsik sebuah benda yang mengukur resistansinya terhadap percepatan. Jika gaya F dikerjakan pada benda bermassa m_1, dan menghasilkan percepatan a_1, maka $F = m_1\ a_1$. Jika gaya yang sama dikerjakan pada benda kedua yang massanya m_2, dan menghasilkan suatu percepatan a_2, maka $F = m_2\ a_2$. Dengan menggabungkan persamaan - persamaan ini didapatkan

$$F = m_1\ a_1 = m_2\ a_2$$

atau

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \tag{2.1}$$

Benda standar internasional adalah sebuah silinder campuran platinum yang disimpan di Bureau of Weights and Measures di Severes, Perancis. Satuan SI untuk massa benda adalah 1 kilogram. Gaya yang diperlukan untuk menghasilkan percepatan 1 m/s^2 pada benda standar adalah 1 newton (N).

BAB 4

Hukum II Newton

Bab keempat ini membahas penggunaan hukum Newton pada contoh kasus kehidupan sehari - hari yang lebih nyata. Bab ini juga membahas secara singkat gerakan benda yang dipengaruhi gaya hambat, yang tidak konstan tetapi bergantung pada kecepatan benda. Oleh sebab itu, diperlukan suatu kemampuan untuk mendekati persoalan yang diawali dengan membuat gambar dan kemudian menunjukkan gaya - gaya penting yang bekerja pada tiap benda dalam diagram benda bebas.

1. Gesekan

Jika Anda ingin memindahkan lemari pakaian besar yang diam di atas lantai dengan gaya horizontal yang kecil, maka mungkin saja lemari itu tidak bergerak sama sekali. Mengap ini terjadi? Alasannya sederhana yaitu karena lantai juga melakukan gaya horizontal terhadap lemari yang dinamakan gaya gesek statis f_s. Gaya gesek ini disebabkan oleh ikatan molekul - molekul lemari dan lantai di daerah terjadinya kontak yang sangat erat antara kedua permukaan. Gaya ini berlawanan arah dengan gaya luar yang dikerjakan. Gaya gesek statis agak mirip dengan gaya pendukung yang dapat menyesuaikan dari nol sampai suatu gaya maksimum $f_{\mathbf{s,maks}}$, bergantung seberapa kuat Anda mendorong. Jika kotak meluncur, ikatan molekuler secara terus - menerus dibentuk dan dipecah, sementara potongan - potongan kecil permukaan berpecahan. Hasilnya adalah sebuah **gaya gesek kinetik** f_k (gesekan luncuran) yang melawan gerakan. Untuk mempertahankan kotak agar meluncur dengan kecepatan konstan, Anda harus mengerjakan gaya yang sama besar dan berlawanan arah dengan gaya gesek kinetik ini.

Mari kita lanjutkan contoh kasus di atas. Misalkan lemari yang Anda pindahkan tadi bermassa 10 kg dengan luas sisi 1 m^2 dan luas ujun 20 cm^2. Jika lemari berada dengan sisinya di atas lantai, hanya sebagian kecil dari total 1 m^2 yang benar - benar dalam kontak mikroskopik dengan lantai. Jika lemari ditempatkan dengan ujungnya di atas lantai, bagian luas total yang benar - benar dalam kontak mikroskopik bertambah dengan faktor 50 karena gaya normal per satuan luas 50 kali lebih besar. Namun, karena luas ujung adalah seperlima puluh luas sisi, maka luas kontak mikroskopik yang sesungguhnya tidak berubah. Jadi gaya gesekan statis maksimum $f_{\mathbf{s,maks}}$ sebanding dengan gaya normal antara permukaan - permukaan :

$$f_{\mathrm{s,maks}} = \mu_s F_n \ ,$$

dengan μ_s dinamakan **koefisien gesek statis**. Koefisien gesek statis ini bergantung pada sifat permukaan lemari dan lantai. Jika Anda mengerjakan gaya horizontal yang lebih kecil dari $f_{\mathbf{s,maks}}$ pada lemari maka gaya gesek akan tepat mengimbangi gaya yang Anda kerjakan pada lemari tersebut. Sera matematis, dapat kita tulis sebagai berikut:

$$f_{\mathrm{s,maks}} \leq \mu_s \, F_n \ . \tag{1.1}$$

Selain itu, gaya gesek kinetik juga berlawanan arah dengan arah gerakan. Seperti gaya gesek statis, gaya gesek kinetik merupakan gejala yang kompleks dan sulit untuk dimengerti secara utuh. **Koefisien gesek kinetik** μ_k didefinisikan sebagai rasio antara besar gaya gesek kinetik f_k dan gaya normal F_n atau kita tulis sebagai berikut:

$$f_k = \mu_k F_n \ . \tag{1.2}$$

Secara eksperimen dibuktikan bahwa:

(1) μ_k lebih kecil dari μ_s
(2) μ_k bergantung pada kelajuan relatif permukaan, akan tetapi untuk kelajuan sekitar 1 cm/s hingga beberapa meter per sekon μ_k hampir konstan
(3) μ_k (seperti μ_s) bergantung pada sifat permukaan - permukaan yang bersentuhan akan tetapi tidak bergantung pada luas kontak (makroskopik)

BAB 5

Kerja dan Energi

Pada bab ini dibahas dua konsep penting dalam mekanika yaitu kerja dan energi. Istilah kerja hanya digunakan dalam arti yang khusus. Pada setiap kerja selalu terdapat dua hal sekaligus, yaitu gaya dan perpindahan.

Bab ini juga membahas beberapa macam bentuk energi pada bidang mekanika. Selain itu, juga diberikan beberapa latihan soal yang melibatkan konsep hukum kekekalan energi.

Ada beberapa macam bentuk energi dalam kehidupan sehari - hari. Beberapa macam bentuk energi seperti energi gerak, energi listrik, energi magnet, energi cahaya, energi kimia, energi nuklir, energi radiasi, energi termal, energi kosmik dan masih banyak lagi. Akan tetapi kita tidak bisa menciptakan beberapa energi tersebut melainkan kita hanya bisa mengubah suatu bentuk energi ke bentuk energi yang lain.

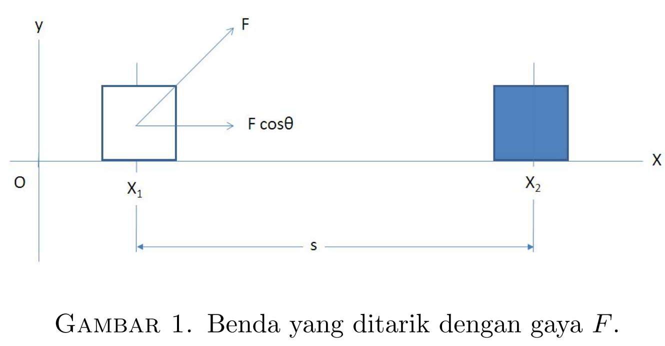
1. Kerja oleh Gaya yang Konstan

Pada Sebuah benda bekerja sebuah gaya F yang konstan dan benda tersebut bergerak lurus dalam arah gaya. Sehingga kerja yang dilakukan oleh gaya terhadap benda dapat didefinisikan perkalian skalar besar gaya F dengan jarak perpindahan yang ditempuh benda s. Secara matematis ditulis sebagai

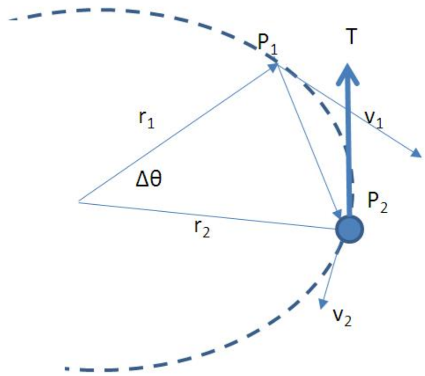
$$W = F \cdot s \tag{1.1}$$

Jika gaya konstan yang bekerja pada benda tidak searah dengan arah gerak benda (lihat Gambar 1), maka gaya yang dilakukan terhadap benda merupakan perkalian komponen gaya ke arah gerak benda dengan jarak perpindahan yang ditempuh benda s. Secara matematis ditulis sebagai

$$W = F\cos(\theta) \cdot s \tag{1.2}$$



Gambar 1. Benda yang ditarik dengan gaya F.



GAMBAR 2. Gaya yang berarah vertikal pada benda yang bergerak melingkar.

Jika sudut $\theta = 90^o$ maka gaya tidak memiliki komponen ke arah horizontal sehingga benda mengalami gerakan ke atas. Contoh dari gaya ini ditunjukkan pada Gambar 2 yaitu tegangan tali pada arah vertikal yang bekerja pada benda yang melakukan gerak melingkar. Satuan dari kerja secara internasional adalah Joule

Contoh Soal E.1

Sebuah balok dengan massa 10 kg dinaikkan sepanjang bidang miring dari dasar sampai ke puncak sejauh 5 meter. Jika puncak memiliki tinggi 3 meter dan aumsikan permukaan licin maka hitung kerja yang harus dilakukan oleh gaya yang sejajar dengan bidang miring untuk mendorong balok ke atas dengan kelajuan konstan ($\theta = 37^o$).

JAWAB :

Karena gerak benda merupakan gerak lurus yang beraturan dengan kelajuan konstan maka resultan gaya yang bekerja adalah

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \\ F - m\,g\sin(\theta) &= 0 \\ F &= m\,g\sin(\theta) \\ &= (10 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)\left(\frac{3}{5}\right) = 58,86 \text{ N} \end{aligned}$$

Kerja yang dilakukan oleh gaya adalah

$$\begin{aligned} W &= F \cdot s \\ &= (58,86 \text{ N})(\text{ m}) = 294,3 \text{ J} \end{aligned}$$

Nilai ini akan sama dengan nilai kerja jika benda tidak melewati bidang miring

2. Kerja karena gaya yang berubah

Agar memudahkan dalam menganalisis kerja yang dilakukan oleh gaya yang tidak konstan, akan ditinjau gaya yang berubah hanya besarnya saja. Misal gaya bervariasi terhadap posisi $F(x)$ dan arah gaya searah dengan arah gerak x maka kerja yang dilakukan oleh gaya berubah dari x_1 sampai dengan x_2 dapat dihitung cara sebagai berikut.

BAB 6

Sistem Partikel dan Kekekalan Momentum

Dalam bab ini, kita akan meninjau benda yang besar sebagai sistem partikel - partikel titik dan menganggap bahwa hukum Newton berlaku untuk tiap partikel. Akan ditunjukkan bahwa ada satu titik dalam sistem yang disebut pusat massa, yang bergerak seakan - akan massa sistem terpusat di titik itu. Gerakan setiap benda atau sistem partikel dapat dianggap sebagai gerakan pusat massa ditambah gerakan masing - masing partikel dalam sistem relatif terhadap pusat massa. Untuk materi pertama akan dibahas tentang daya.

1. Daya

Daya adalah laju energi dari sistem ke sistem lain. Misal sebuah partikel dengan kecepatan sesaat v. Dalam selang waktu yang singkat $\mathrm{d}t$ partikel mengalami perpindahan $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$. Usaha yang dilakukan oleh gaya F yang bekerja pada partikel selama selang waqktu ini adalah

$$\mathrm{d}W = F \cdot \mathrm{d}s = F \cdot v\,\mathrm{d}t$$

Laju usaha yang dilakukan gaya adalah daya masukan P gaya tersebut

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = F \cdot v \tag{1.1}$$

Satuan SI untuk daya adalah satu joule per sekon dinamakan satu watt (1 J/s = 1 W) .

Daya tidak dapat disamaartikan dengan usaha atau energi. Sebuah mobil dikatakan berdaya tinggi jika dapat mengubah energi kimia bahan bakarnya menjadi energi kinetik (atau energi potensial jika mobil menaiki bukit) dalam periode waktu yang singkat. Contoh yang lain adalah rekening listrik. Jika Anda membayar biasanya ditagih sejumlah kilowatt-jam (kwh). Satu kilowatt jam energi adalah

$$\begin{aligned} 1 \text{ kW . h} &= (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) \\ &= 3,6 \cdot 10^6 \text{ W . s} = 3,6 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Contoh Soal F.1

Sebuah motor kecil digunakan untuk memberi daya pada sebuah lift yang menaikkan beban bata yang beratnya 800 N sampai ketinggian 10 m dalam 20 s. Berapakah daya minimal yang harus disediakan motor tersebut?

JAWAB :

Kelajuan bata adalah

$$\frac{10 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 0,5 \text{ m/ s}$$

Karena gaya luar searah dengan gerakan maka daya masukan gaya ini adalah

$$\begin{aligned} P = F\,v &= (800 \text{ N})(0,5 \text{ m/ s}) \\ &= 400 \text{ N.m/s} = 400 \text{ J/s} = 400 \text{ W} \end{aligned}$$

2. Pusat Massa

Ambil contoh sistem sederhana dua partikel dalam satu dimensi. Misal x_1 dan x_2 sebagai koordinat partikel relatif terhadap suatu pilihan titik asal sembarang. Koordinat pusat massa x_{cm} selanjutnya didefinisikan

$$M\,X_{cm} = m_1\,x_1 + m_2\,x_2 \;, \tag{2.1}$$

dengan $M = m_1 + m_2$ adalah massa total sistem. Untuk kasus hanya dua partikel ini, pusat massa terletak di suatu titik pada garis yang menghubungkan kedua partikel itu. Hal ini dapat dilihat dengan mudah jika titik asal kita pilih berimpit dengan salah satu partikel, misal m_1 maka d adalah jarak antara partikel - partikel. Koordinat pusat massa untuk pilihan titik asal ini selanjutnya diperoleh dari Persamaan (2.1)

$$\begin{aligned} M\,X_{cm} &= m_1\,x_1 + m_2\,x_2 \\ &= m_1(0) + m_2\,d \\ X_{cm} &= \frac{m_2}{M}\,d = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,d \;. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Untuk partikel - partikel dengan massa yang sama, pusat massa ada di tengah antara kedua partikel itu. Jika massa tidak sama maka pusat massa lebih dekat ke partikel dengan massa yang lebih besar.

Dari kasus istimewa dua partikel dalam satu dimensi ini kita dapat membuat ungkapan umum untuk banyak partikel dalam tiga dimensi. Jika kita mempunyai N partikel, koordinat x pusat massa X_{cm} didefinisikan oleh

$$M\,X_{cm} = m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + m_3\,x_3 + \cdots + m_N\,x_N = \sum_i m_i\,x_i \;, \tag{2.3}$$

sekali lagi $M = \sum m_i$ adalah massa total sistem. Persamaan - persamaan serupa mendefinisikan koordinat y dan z pusat massa:

$$M\,Y_{cm} = \sum_i m_i\,y_i \tag{2.4}$$

$$M\,Z_{cm} = \sum_i m_i\,z_i \;. \tag{2.5}$$

Dalam notasi vektor, jika $\vec{r}_i = x_i\,\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$ adalah vektor posisi partikel ke-i maka vektor pusat $\vec{R}_{cm}$ diberikan oleh

$$M\,\vec{R}_{cm} = \sum_i m_i\,\vec{r}_i \;, \tag{2.6}$$

dengan $\vec{R}_{cm} = X_{cm}\hat{\imath} + Y_{cm}\hat{\jmath} + Z_{cm}\hat{k}$.

Untuk benda kontinu, jumlahan di Persamaan (2.6) diganti oleh integral

$$M\,\vec{R}_{cm} = \int r\,\mathrm{d}m \;, \tag{2.7}$$

dengan dm adalah elemen massa yang berada di posisi $\vec{r}$.

BAB 7

Dinamika Rotasi

Dalam benda tegar jarak antar massa partikel penyusun dan jarak antara partikel penyusun dengan massanya selalu tetap. Jika sistem benda tegar ini dipengaruhi oleh gaya yang bekerja pada setiap partikel penyusun (bukan pada titik pusat massanya), maka akan terjadi dua kemungkinan

(a) jika $\sum \vec{F} = 0$, maka titik pusat massa akan bergerak lurus beraturan, namun benda tegar dapat melakukan gerakan rotasi terhadap pusat massa.

(b) jika $\sum \vec{F} \neq 0$, maka titik pusat massa di samping akan bergerak dipercepat, benda tegar juga akan melakukan gerakan rotasi. Jadi benda tegar akan melakukan gerakan kombinasi rotasi dan translasi.

Pada pembahasan di atas, benda tegar yang ditinjau tersusun dari partikel yang diskrit, sehingga disebut *sistem diskrit*. Jika benda tegar tersusun dari partikel banyak sekali, sehingga partikel memenuhi suatu ruang, maka sistem ini disebut *sistem kontinu* atau disebut sistem pejal.

1. Pernyataan Vektor dan Gerak Rotasi

Dalam membahas gerak rotasi, besaran pergeseran sudut, kecepatan sudut dan percepatan sudut selalu dinyatakan dalam bentuk vektor, masing - masing dilambangkan dengan $\vec{\theta}$, $\vec{\omega}$, dan $\vec{\alpha}$. Pergeseran sudut adalah positif jika gerak rotasi (melingkar atau berputar) berlawanan dengan putaran jarum jam, sedangkan arah vektornya sejajar dengan sumbu rotasi (sumbu putar) yaitu arah maju sekrup putar kanan (bisa juga menggunakan kaidah tangan kanan).

2. Momentum Sudut dan Momen Gaya

3. Momen Inersia

3.1. Momen Inersia Sistem Sederhana dan Homogen.

3.2. Dalil Sumbu Sejajar.

4. Gerak Benda Tegar

5. Gerak Menggelinding

Gerak menggelinding suatu benda merupakan gerak campuran, yaitu gerakan translasi pusat massa dan gerak rotasi. Jika ditinjau hanya gerakan translasinya saja, kecepatan linier pada ketiga titik dasar tersebut sama dengan kecepatan pusat massanya di O yaitu v_O. Sedangkan jika ditinjau gerak rotasinya, silinder berotasi terhadap sumbu putar di O dengan kecepatan sudut ω, karenanya kecepatan tangensial di P dan di Q sama besar yaitu $v_T = \omega\, R$, yang besarnya sama dengan kecepatan linier pusat massanya, sehingga $v_O = v_T = \omega\, R$. Jika gerak translasi dan rotasi tersebut digabung (melkukan superposisi kecepatan linier dan tangensial pada ketiga titik dasar tersebut) maka diperoleh kecepatan linier di Q, O dan P adalah $2\,v_O$, v_O dan nol.

Energi kinetik yang dimiliki oleh silinder yang menggelinding adalah jumlahan dari energi kinetik translasi pusat massa dan energi kinetik rotasi silinder

$$E_k = \frac{1}{2}\,M\,v_O^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

6. Gerak Gasing

Gaya yang bekerja pada gasing adalah gaya berat $m\,g$ dan gaya ke atas pada tumpuan O karenanya momen gaya terhadap titik O adalah

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\,g \tag{6.1}$$

arah momen gaya ini tegak lurus terhadap $m\,g$ dan $\vec{r}$. Akibat adanya momen gaya ini maka gasing akan bergerak presisi. Dengan demikian terdapat perubahan momentum $\mathrm{d}\vec{L}$ terhadap waktu, yaitu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau} \tag{6.2}$$

setelah selang $\mathrm{d}t$, momentum sudut gasing merupakan penjumlahan antara $\vec{L}$ dengan $\mathrm{d}\vec{L}$. Dalam hal ini $\mathrm{d}\vec{L}$ kecil dan arahnya tegak lurus pada $\vec{L}$, karenanya besar $\vec{L}$ tetap tetapi arahnya berubah. Ujung vektor $\vec{L}$ berotasi pada bidang horizontal membentuk lintasan lingkaran dengan kecepatan sudut ω_p (berarah ke atas) sebesar

$$\begin{aligned} \omega_p &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}L}{L\sin(\theta)}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\frac{\tau\,\mathrm{d}t}{L\sin(\theta)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau}{L\sin(\theta)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

7. Kekekalan momentum Sudut

Pada Sub bab 7.2 telah dijelaskan bahwa

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

Jika $\vec{\tau} = 0$, maka $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$ sehingga $\vec{L} =$ konstan. Jadi, jika resultan momen gaya eksternal yang bekerja sama dengan nol, maka momentum sudut total sistem tetap (konstan). Prinsip ini dikenal sebagai prinsip kekekalan momentum sudut.

Tinjau suatu benda tegar berotasi mengelilingi sumbu z yang tetap, momentum sudut benda tersebut adalah

$$\vec{L}_z = I\,\vec{\omega}$$

dengan I adalah momen inersia benda, sedangkan ω adlah kecepatan sudutnya. Jika tak ada momen gaya eksternal yang bekerja, maka L_z tetap, sehingga jika I berubah maka ω harus berubah agar efek perubahannya saling meniadakan. Kekekalan momentum sudut akan berbentuk

$$I\,\omega = I_0\,\omega_0$$

dengan I_0 dan ω_0 adalah momen inersia dan kecepatan sudut awal. Prinsip ini sering dipakai oleh penari balet, peloncat indah atau pemain ski untuk dapat berputar lebih cepat, yaitu dengan mengatur rentangan tangan maupun kakinya.

BAB 8

Getaran

Getaran (*oscillation*) merupakan salah satu bentuk gerak benda yang cukup banyak dijumpai gejalanya. Contohnya, bandul jam yang berayun, piringan dalam jam beker yang memuntir, botol yang timbul tenggelam dalam air, balok yang digantungkan pada sebuah pegas, dan senar gitar yang dipetik. Getaran juga dijumpai secara analogis pada rangkaian listrik yang melibatkan induktor dan kapasitor. Dalam getaran, sebuah benda melakukan gerak bolak - balik menurut lintasan tertentu melalui titik setimbangnya. Waktu yang diperlukan untuk melakukan satu gerakan bolak - balik dinamakan periode (dilambangkan dengan T, satuannya sekon [s]). Simpangan maksimum getaran dinamakan amplitudo.

Bab ini membahas aspek mengenai getaran, dimulai dari formulasi matematika getaran beserta penjelasan skematik yang menggambarkan simpangan, kecepatan dan percepatan getaran.

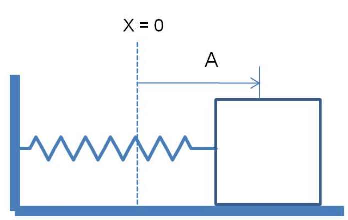
1. Formulasi Matematika

Persamaan gerak getaran dapat diturunkan dari dua buah hukum gerak, yaitu Hukum II Newton dan Hukum Hooke. Coba pandang sebuah benda yang dikaitkan dengan sebuah pegas Gambar 1. Jika pegas tidak tertarik atau tertekan maka simpangan benda adalah nol (benda dalam titik keseimbangan). Jika pegas tertarik maka terdapat simpangan benda (misal bernilai positif).

Pada saat itu pegas memberikan gaya kepada benda yang besarnya sebanding dengan simpangannya namun berlawanan arah dengan pergeseran benda. Kenyataan ini diungkapkan oleh Hooke dalam hukumnya yang berformulasi

$$F = -k\,x \,, \tag{1.1}$$

dengan F adalah gaya pegas (gaya pemulih atau *restoring force*) dan k adalah tetapan pegas. Rumus ini menyatakan bahwa gaya yang dikerjakan oleh sebuah pegas pada sebuah benda berbanding lurus dengan pergeseran benda namun berlawanan



Gambar 1. Getaran selaras dianalogikan pada gerak benda yang dikaitkan pada pegas. Titik kesetimbangan dinyatakan sebagai $x = 0$, disebut amplitudo.

arah dengannya. Jika gaya pegas adalah satu - satunya gaya luar yang bekerja pada benda, maka pada benda berlaku Hukum II Newton

$$F = m\,a$$

atau

$$-\,k\,x = m\,a\ . \tag{1.2}$$

Pada Bab III telah didefinisikan bahwa percepatan bergerak lurus (misal ke arah x) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0\ . \tag{1.3}$$

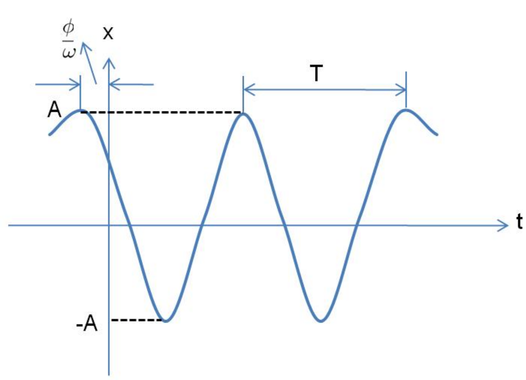
Persamaan (1.2) merupakan persamaan gerak getaran selaras (*simple harmonic motion*). Dalam getaran selaras, benda berosilasi di antara dua posisi dalam waktu (periode) tertentu dengan asumsi tanpa kehilangan tenaga mekaniknya. Dengan kata lain, simpangan maksimum (amplitudo) getaran tetap.

Persamaan (1.3) disebut persamaan diferensial, karena mengandung suku yang berupa diferensial $\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)$. Pembahasan persamaan diferensial memerlukan pengetahuan matematika tingkat lanjut yang belum memungkinkan dibahas pada tingkat ini. Namun, aspek penting yang perlu dilihat dalam persoalan ini adalah bahwa suatu persamaan diferensial memiliki penyelesaian (*solution*). Dalam persoalan getaran di atas, penyelesaian harus dinyatakan dalam x sebagai fungsi t, dan harus memenuhi suku kiri sama dengan suku kanan. Dengan kata lain, penyelesaian harus menyebabkan suku kiri Persamaan (1.3) sama dengan nol.

Tanpa menunjukkan langkah - langkah perhitungannya penyelesaian dari Persamaan (1.3) dapat berbentuk

$$x(t) = A\sin(\omega\,t + \phi)\ , \tag{1.4}$$

dengan A, ω, dan ϕ adalah tetapan. Konstanta A disebut amplitudo, ω adalah frekuensi sudut (dalam Persamaan (1.3) bernilai $\sqrt{\frac{k}{m}}$), dan ϕ adalah sudut fase awal. Besaran $\omega\,t + \phi$ disebut fase getaran. Sudut fase awal (ϕ) adalah faktor dalam persamaan yang dilibatkan untuk menggambarkan posisi awal benda yang beosilasi. Persamaan (1.4) sering dinamakan persamaan simpangan getaran. Gambar 2 menunjukkan gambar simpangan getaran selaras sederhana.



Gambar 2. Simpangan versus waktu sebuah partikel yang berisolasi.

Perhatikan bahwa fungsi x periodik dan berulang pada simpangan yang sama dengan keanikan $\omega\, t$ sebesar $2\,\pi$. Periode getaran T adalah waktu yang diperlukan benda untuk menjalani gerakan satu putaran (*cycle*). Ini berarti nilai x pada saat t sama dengan nilai x pada saat $t + T$. Berdasarkan kenyataan ini bahwa

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}\ . \tag{1.5}$$

Kebalikan dari periode dinamakan f. Frekuensi menyatakan jumlah getaran per satuan waktu. Satuannya adalah hertz (Hz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\,\pi}\ . \tag{1.6}$$

Dari Persamaan (1.5) dan Persamaan (1.6) dapat disusun bentuk frekuensi sudut ω yaitu

$$\omega = 2\,\pi\, f = \frac{2\,\pi}{T}\ . \tag{1.7}$$

Untuk membutikkan bahwa Persamaan (1.4) merupakan penyelesaian diferensial Persamaan (1.3), akan diambil turunan pertama dan kedua Persamaan (1.4) dan kemudian mensubstitusikannya ke Persamaan (1.3),

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,\omega\cos(\omega\, t + \phi) \tag{1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\,\omega^2\sin(\omega\, t + \phi)\ . \tag{1.9}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} -A\,\omega^2\sin(\omega\, t + \phi) + \frac{k}{m}\,A\sin(\omega\, t + \phi) = 0 \\ -A\,\omega^2\sin(\omega\, t + \phi) + \omega^2\,A\sin(\omega\, t + \phi) = 0\ . \end{aligned}$$

Terbukti bahwa suku kiri sama dengan suku kanan. Dengan kata lain , Persamaan (1.4), merupakan peyelesaian Persamaan (1.3).

Penyelesaian persamaan gerak getaran di atas dapat juga dinyatakan dalam cosinus, yaitu

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi')\ , \tag{1.10}$$

Yang kebenarannya dapat dibukttikan dengan langkah - langkah seperti ditunjukkan oleh Persamaan (1.8) dan Persamaan (1.9). pada Persamaan (1.10), ϕ adalah sudut fase awal .dalam getaran selaras, pemailihan bentuk sinus atau cosinus tidak perlu dipermasalahkan. Suatu getaran memiliki persamaan simpangan unik yang bentuk definitifnya ditentukan oleh posisi awal dan kecepatan awal (keduabya sering disebut sebagai syarat awal).

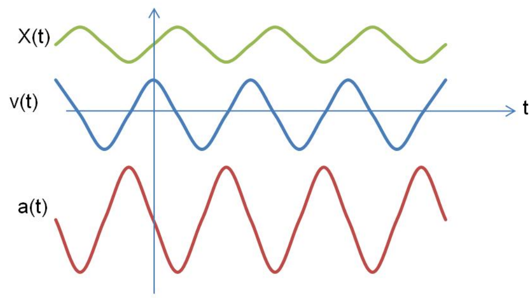
Persamaan (1.8) juga merupakan persamaan kecepatan getaran benda, sedangkan Persamaan (1.9) merupakan persamaan percepatannya. Secara lengkap, jika simpangan getaran adalah

$$x(t) = A\sin(\omega\, t + \phi)\ ,$$

maka kecepatan v dan percepatan a adalah

$$v = A\,\omega\cos(\omega\, t + \phi) \tag{1.11}$$

$$a = -A\,\omega^2\sin(\omega\, t + \phi)\ . \tag{1.12}$$



Gambar 3. Skema grafik persamaan simpangan (garis warna hijau), kecepatan (biru), dan percepatan (merah) getaran selaras sederhana. Amplitudo disesuaikan dengan asumsi bahwa $\omega > 1$.

Tabel 1. Rangkuman keadaan khusus simpangan, kecepatan, dan percepatan getaran selaras sederhana.

Simpangan	Kecepatan	Percepatan
+	+/-	-
-	-/+	+
maksimum	nol	maksimum
nol	maksimum	nol

Skema grafik persamaan simpangan, kecepatan, dan percepatan getaran selaras sederhana ditunjukkan Gambar 3. Rangkuman keadaan khusus simpangan, kecepatan, dan percepatan getaran selaras sederhana dalam Tabel 1 dengan asumsi + menyatakan vektor posisi dengan arah $x+$. Pada waktu simpangan getaran positif, percepatan benda negatif. Sebaliknya ketika simpangan negatif, percepatan positif. Keduanya menyiratkan keberlakuan Hukum Hooke. Nilai kecepatan benda minimum (nol) ketika simpangannya maksimum (senilai amplitudo). Sebaliknya, nilai kecepatan maksimum ketika simpangannya minimum (nol).

Dari Persamaan (1.4) dan Persamaan (1.12) dapat ditunjukkan bahwa simpangan dan percepatan memiliki hubungan

$$a = -\omega^2 x \ . \tag{1.13}$$

Sedangkan dari Persamaan (1.11) dan Persamaan (1.12) dapat diketahui amplitudo dari kecepatan dan percepatan getaran yaitu

$$v_{\text{maks}} = \omega A \tag{1.14}$$

$$a_{\text{maks}} = -\omega^2 A \ . \tag{1.15}$$

Berikut ini akan ditunjukkan cara menentukan amplitudo dan sudut fase dengan menggunakan syarat awal. Misal posisi awal benda adalah x_0 dan v_0 (dengan kata lian, saat $t = 0$, $x = x_0$ dan $v = v_0$). Substitusikan $t = 0$ maka Persamaan (1.4) dan Persamaan (1.11) menjadi

$$x_0 = A \sin(\phi) \tag{1.16}$$

$$v_0 = -\omega A \sin(\phi) \ . \tag{1.17}$$

Bagi Persamaan (1.16) pada Persamaan (1.17), sehingga A tereliminasi dan diperoleh

$$\frac{x_0}{v_0} = -\frac{\tan(\phi)}{\omega}$$

atau,

$$\tan(\phi) = -\frac{\omega\, x_0}{v_0} \; . \tag{1.18}$$

Nilai amplitudo diperoleh dengan cara mengkuadratkan Persamaan (1.16) dan Persamaan (1.17), lalu menjumlahkannya dan menentukan nilai A

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \; . \tag{1.19}$$

Jadi, nilai ϕ dan A dapat ditentukan jika x_0, ω dan v_0 diketahui.

Dari uraian di atas dapat diambil kesimpulan tentang sifat - sifat pentingbenda bergetar selaras sederhana sebagai berikut:

a. Simpangan, kecepatan, dan percepatannya bervariasi secara sinusoidal terhadap waktu tetapi tidak dengan fase yang sama.

b. Percepatan benda bergetar berbanding lurus dengan simpangannya namun dengan arah berlawanan.

c. Frekuensi dan periode getaran tidak bergantung pada amplitudo.

Contoh Soal H.1

Sebuah mobil bermassa 1300 kg memiliki empat buah pegas penyangga. Tiap - tiap pegas mempunyai nilai tetapan pegas 20 000 N/m. Berat diasumsikan tersebar secara merata. Jika dua orang menaiki mobil tersebut, dengan masing - masing bermassa 80 kg, tentukan frekuensi getaran mobil ketika dikendarai melaluijalan yang berlubang.

JAWAB :

Masing - masing pegas menanggung seperempat berat total, yang besarnya $w = (1460 \text{ kg})\ g$. Dengan demikian, tiap - tiap pegas menanggung $w = (365 \text{ kg})\ g$. Alhasil menurut Persamaan (1.6) dan karena $\omega^2 = \frac{k}{m}$, frekeuensi getarannya adalah

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{20000 \text{ N/m}}{365 \text{ kg}}} = 1,18 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Jadi tiap 10 detik para penumpang bergerak bolak - balik hampir sebanyak 12 kali.

2. Tenaga Getaran Selaras

Dalam getaran selaras, tenaga mekanik sistem tidak berubah karena tidak terdapat gaya luar tak konservatif. Ada dua macam tenaga mekanik dalam getaran ini, yaitu:

(a) tenaga kinetik, berbanding lurus dengan massa dan kuadrat kecepatan

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}\, m\, v^2 \\ &= \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 A^2 \cos^2(\omega\, t + \phi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

(b) tenaga potensial (pegas), berbanding lurus dengan tetapan pegas dari kuadrat simpangan

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{2}\,k\,x^2 \\
&= \frac{1}{2}\,k\,A^2\sin^2(\omega\,t+\phi) \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

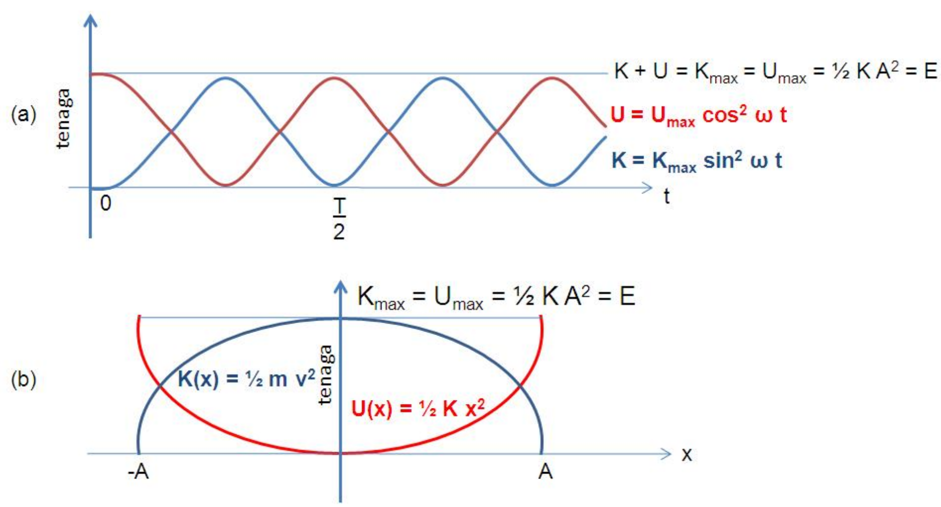
Karena $\omega^2 = \frac{k}{m}$ maka Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi

$$E_p = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2\sin^2(\omega\,t+\phi)\ .$$

Tenaga kinetik maupun potensial senantiasa bernilai positif. Nilai maksimum kedua tenaga itu sama, yaitu $\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2$ atau $\frac{1}{2}\,k\,A^2$, dan ini merupakan tenaga total sistem, karena tenaga total E adalah penjumlahan $E_k + E_p$ maka

$$
\begin{aligned}
E &= E_k + E_p \\
&= \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2\cos^2(\omega\,t+\phi) + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2\sin^2(\omega\,t+\phi) \\
&= \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2\ . \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Jadi, tenaga total sistem getaran selaras bernilai konstan sepanjang waktu dan berbanding lurus dengan kuadrat amplitudo. Tenaga mekanik sistem getaran secara kontinu bertransformasi antara tenaga potensial yang disimpan di dalam pegas dan tenaga kinetik benda seperti yang ditunjukkan Gambar 4.

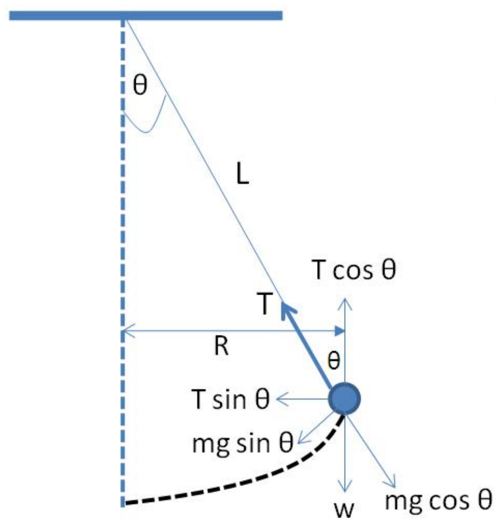


Gambar 4. (a) Jumlah tenaga kinetik (warna biru) dan potensial (warna merah) getaran selaras senantiasa $\frac{1}{2}\,kA^2$. (b) Tenaga kinetik dan tenaga potensial sistem getaran selaras yang saling bertransformasi.

3. Bandul (Pendulum)

Bandul merupakan salah satu contoh benda bergetar selaras. Bagian ini akan membahas tiga jenis bandul, yaitu bandul sederhana (matematis), bandul fisis, dan bandul puntir.

3.1. Bandul Sederhana (Matematis). Bandul sederhana terdiri atas titik massa m yang digantung menggunakan seutas tali tak bermassa dengan ujung atasnya diikatkan dinding diam seperti yang terlihat pada Gambar 5. Gerak benda terjadi pada bidang vertikal dan dikendalikan oleh gaya gravitasi. Asal sudut simpangan θ kecil maka gerak benda adalah getaran selaras sederhana.



Gambar 5. Pada sistem bandul sederhana, benda bergerak pada bidang vertikal dan gerak benda hanya dikendalikan oleh gravitasi bumi.

Gaya - gaya yang bekerja pada bandul adalah gaya tegang tali T dan gaya gravitasi $m\,g$. Komponen radial $T = m\,g\cos(\theta)$ tidak mengakibatkan percepatan pada titik massa. Komponen tangensial gaya gravitasi $m\,g\sin(\theta)$ selalu bekerja dengan arah menuju $\theta = 0$, berlawanan arah dengan simpangannya. Jadi, komponen gaya merupakan gaya pemulih (lihat Persamaan (1.1)) dan persamaan gerak bandul ke arah tangensial ini dapat ditulis

$$F = -m\,g\sin(\theta) = m\,\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\ . \tag{3.1}$$

Mengingat $s = L\theta$, maka $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = L\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$. Sehingga Persamaan (3.1) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\,\sin(\theta)\ . \tag{3.2}$$

Suku kanan Persamaan (3.2) berbanding lurus dengan $\sin(\theta)$, bukan θ. Persamaan ini bukan persamaan diferensial linier seperti Persamaan (1.3). Sehingga, persamaan simpangan bandul matematis ini tidak mengikuti getaran selaras sederhana, karena solusinya tidak berbentuk Persamaan (1.4). Namun, jika diambil nilai θ yang kecil maka dapat dilakukan pendekatan $\sin(\theta) \approx \theta$, dengan θ diukur dalam radian. Dengan pendekatan ini, persamaan gerak bandul matematis menjadi

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\theta = 0\ . \tag{3.3}$$

Persamaan ini memiliki bentuk yang mirip dengan diferensial pada Persamaan (1.3) yaitu menggantikan θ dengan x dan menggantikan $\frac{g}{L}$ dengan $\frac{k}{m}$. Dengan demikian, solusi persamaan getaran bandul sederhana dengan simpangan kecil dapat dibentuk

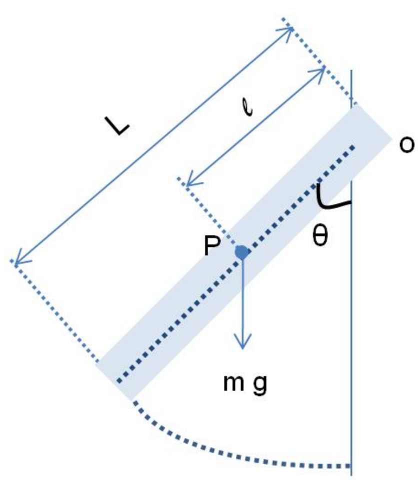
$$\theta = \theta_0 \sin(\omega\, t + \phi)\ , \tag{3.4}$$

dengan $\omega^2 = \frac{g}{L}$. Periode getaran bandul dapat ditentukan dari frekuensi sudut, yaitu

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ . \tag{3.5}$$

Perhatikan bahwa periode (dan frekuensi) bandul sederhana hanya bergantung pada panjang tali dan nilai g. Karena periode tidak bergantung pada massa benda, maka dapat disimpulkan bahwa semua bandul sederhana dengan panjang tali yang sama akan memberikan nilai periode yang sama di suatu tempat yang ketinggia dari permukaan air laut dan kondisinya sama. Dengan demikian, bandul ini dapat digunakan sebagai *timekeeper*. Sifat ini sangat berguna dalam teknologi eksplorasi sumber daya alambawah tanah, seperti minyak, air dan sebagainya.

3.2. Bandul Fisis. Jenis bandul yang kedua adalah bandul fisis. Bandul ini berupa sebuah benda tegar yang diayunkan pada suatu sumbu ayun tertentu (lihat Gambar 6). Titik sumbu ayun pada benda sering dinamakan *pivot* (titik O pada Gambar 6). Yang menyebabkan bandul berayun adalah torsi pemulih (*restoring*



GAMBAR 6. Skema bandul fisis. Titik O adalah sumbu bandul, P adlah pusat massa, L adalah panjang benda, sedangkan l adalah jarak O ke P.

torque), yaitu

$$\tau = -m\,g\,l\sin(\theta)\ , \tag{3.6}$$

dengan m adalah massa benda tegar, g percepatan gravitasi, dan l adalah jarak sumbu putar terhadap pusat massa benda tegar. Seperti pada kasus bandul sederhana, jika simpangan bandul kecil, maka $\sin(\theta) \approx \theta$. Ingat pula bahwa $\tau = I\,\alpha = I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ (menurut teori kinematika rotasi) maka Persamaan (3.6) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m\,g\,l}{I}\,\theta = 0\ , \tag{3.7}$$

dengan I adalah momen inersia benda tegar tersebut.

Persamaan (3.7) merupakan persamaan gerak bandul fisis yang berupa getaran harmonik sederhana. Penyelesaian persamaan gerak (persamaan simpangan) bandul ini adalah

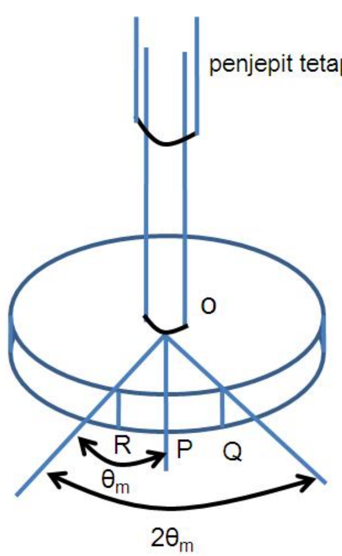
$$\theta = \theta_0 \sin(\omega\,t + \phi)\ , \tag{3.8}$$

dengan $\omega^2 = \frac{m\,g\,l}{I}$. Periode getaran bandul fisis ini dapat ditentukan dari frekuensi sudutnya, yaitu

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,l}}\ . \tag{3.9}$$

Dengan demikian, besar periode ini bergantung bentuk bandul yang digunakan.

3.3. Bandul Puntir. Skema bandul puntir ditunjukka oleh Gambar 7. Cakram diputar, misalnya sejauh θ_m tegak lurus terhadap kawat penggantungnya kemudian dilepas. Cakram akan berputar bolak - balik searah dan berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu. Gerak inilah yang dikategorikan sebagai bandul puntir.



Gambar 7. Skema bandul puntir. Titik O adalah sumbu puntir.

Pada gerak ini, jika simpangan cukup kecil, maka torsi pemulih yang bekerja adalah

$$\tau = -\kappa\,\theta\ , \tag{3.10}$$

dengan κ adalah torsi yang bergantung pada sifat kawat. Sekali lagi gunakan identitas kinematika rotasi $\tau = I\,\alpha = I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$, diperoleh

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\kappa}{I}\,\theta = 0\ . \tag{3.11}$$

Sehingga, persamaan simpangan dan periode getaran bandul puntir untuk simpangan kecil adalah

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega\,t + \phi) \tag{3.12}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{I}{k}}\ . \tag{3.13}$$

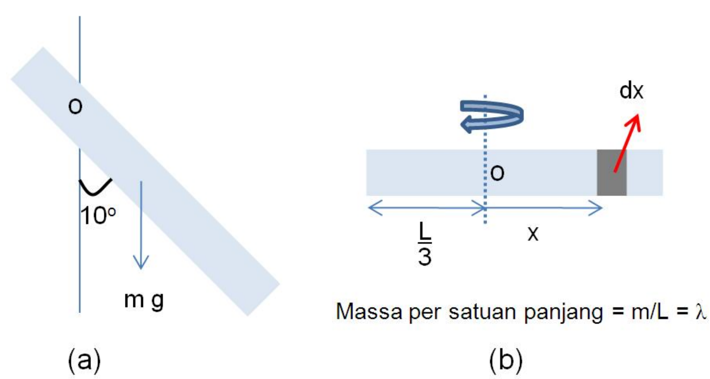
Kali ini. nilai periode bergantung pada bentuk cakaram dan sifat kawat.

Contoh Soal H.2

Sebuah batang homogen dengan panjang 1,2 m dan massa 2,4 kg diayunkan melalui sebuah sumbu yang berjarak $\frac{1}{3}$ dari panjang pada salah satu ujungnya. Awalnya batang diberi simpangan 10^o terhadap vertikal lalu dilepaskan. Tentukan persamaan simpangan batang dan frekuensi ayunan tersebut.

JAWAB :

Persoalan ini dapat digambarkan seperti Gambar 8a di bawah ini. Konstanta L adalah panjang batang. Titik O terletak $\frac{L}{3}$ dari ujung kiri batang.



Gambar 8. Sistem batang berayun yang melakukan gerak harmonik sederhana.

Batang yang berayun merupakan bandul fisis. Persamaan getarannya mengikuti Persamaan (3.7), yaitu

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m\,g\,l}{I}\,\theta = 0\ ,$$

dengan I adalah momen inersia batang terhadap sumbu putar, m adalah massa batang dan l adalah jarak sumbu putar ke pusat mssa. Persimpangan bandul ini adalah

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega\,t + \phi)$$

dengan $\omega^2 = \frac{m\,g\,l}{I}$. Dari soal diketahui bahwa $m = 2,4$ kg, sedangkan $l = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6} = 0,2$ m karena batang homogen. Nilai momen inersia batang homogen ini ditentukan dengan menggunakan identitas yang telah diturunkan pada Bab 7 sebelumnya. Dari Gambar 8b,

$$\begin{aligned} I &= \int x^2\,\mathrm{d}m = \int x^2\,\lambda\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\,\lambda\,x^3\Big|_{-\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\,\lambda\,\big(\frac{8}{27}\,L^3 + \frac{1}{27}\,L^3\big) = \frac{1}{9}\,\lambda\,L^3 \\ &= \frac{1}{9}\,m\,L^2 \\ &= \frac{1}{9}\,(2,4\text{ kg})\,(1,2\text{ m})^2 = 0,384\text{ kg}\cdot\text{m}^2\ . \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\omega = \frac{m\,g\,l}{I} = \frac{(2,4\text{ kg})\,(9,81\text{ m/s}^2)\,(0,2\text{ m})}{0,384\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 12,25\text{ rad/s}\ .$$

Karena bandul disimpangkan 10^o (θ_0, misal diambil positif) kemudian dilepaskan, maka $\phi = -90^o$ (perhatikan bentuk persamaan adalah sinus). Dengan demikian persamaan simpangan bandul fisis batang ini adalah

$$\theta(t) = 10^o \sin(12,25\,t - 90^o)\ .$$

Frekuensi getaran bandul dapat ditentukan dari frekuensi sudutnya, yaitu

$$f = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{12,25}{2\,\pi} \approx 1,95\text{ Hz}\ .$$

Yang artinya setiap detik bandul akan kembali ke posisinya sebanyak hampir dua kali.

4. Soal Latihan

FORMULASI MATEMATIKA

Soal 8.1

Sebuah benda berosilasi secara harmonik sepanjang sumbu x. Simpangan berubah menurut persamaan

$$x = (4\text{ m})\cos\big(4\,\pi\,t + \frac{\pi}{4}\big)$$

dengan t dalam sekon dan sudut dalam radian.

(a) Tentukan amplitudo, frekuensi, dan periode getar.

(b) Hitung kecepatan dan percepatan benda setiap saat.

(c) Menggunakan hasil (b), tentukan posisi, kecepatan, dan percepatan pada $t = 1$ s.

(d) Hitung kecepatan dan percepatan maksimum benda.

(e) Hitung fase gerak benda saat $t = 2$ s.

Soal 8.2

Sebuah partikel memiliki simpangan x yang diberikan oleh

$$x = 0,3\cos\big(2\,t + \frac{\pi}{6}\big)\ ,$$

dengan x dalam meter dan t dalam sekon.

(a) Berapakah frekuensi, periode, amplitudo, frekuensi sudut, dan konstanta fase gerak?

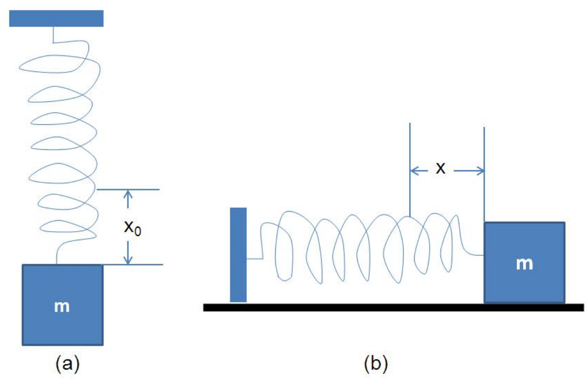
(b) Di manakah partikel pada $t = 1$?

(c) Carilah kecepatan dan percepatan pada setiap t.

(d) Carilah posisi dan kecepatan awal partikel

Soal 8.3

Sebuah benda 2 kg meregangkan sebuah pegas sepanjang 10 cm ketika digantungkan secara vertikal pada kesetimbangannya (lihat Gambar 9a). Benda kemudian dipasang pada pegas yang sama sementara benda berada di atas meja tanpa gesekan dan salah satu ujung pegas dijadikan ujung sementara seperti yang ditunjukkan Gambar 9b. Benda ditarik sehingga berjarak 5 cm dari posisi kesetimbangannya dan dilepas pada $t = 0$. Carilah amplitudo A, frekuensi sudut ω, frekuensi f, dan periiode T.



Gambar 9. (a) Sebuah benda digantung pada kesetimbangan dari sebuah pegas untuk soal 8.3. (b) Kemudian benda yang terhubung pada pegas itu di taruh di atas meja dan ditarik lalu dilepaskan.

Soal 8.4

Berapakah kecepatan maksimum benda pada pegas dalam soal 8.3 dan kapan kecepatan maksimum ini pertama kali tercapai?

Soal 8.5

Sebuah pegas kedua, yang identik dengan pegas pada soal 8.3, dihubungkan ke benda kedua, yang juga bermassa 2 kg. Pegas ini diregangkan sejauh 10 cm dari kesetimbangannya dan dilepas saat bersamaan dengan pegas yang pertama, yang sekali lagi diregang sejauh 5 cm. Benda mana yang terlebih dahulu mensapai posisi kesetimbangan?

Soal 8.6

Jika benda pada soal 8.3 mula - mula berada di $x_0 = 3$ cm dan memiliki kecepatan awal $v_0 = -25$ cm/s, maka carilah amplitudo dan konstanta fase gerak.

Soal 8.7

Sebuah pegas yang panjangnya 20 cm digantungkan vertikal. Kemudian ujung bawahnya diberi beban 200 gram sehingga panjangya bertambah 10 cm. Beban ditarik 5 cm ke bawah kemudian dilepas hingga beban bergetar harmonik. Jika $g = 9,81$ m/s^2, maka frekuensi getaran adalah ....

Soal 8.8

Suatu partikel bergetar harmonis, mempunyai kecepatan 9 m/s pada jarak 2 m dari pusat dan 4m/s pada jarak 3 m dari pusat. Amplitudo getarannya adalah ....

Soal 8.9

Sebuah partikel bergetar harmonik dengan periode 6 detik dan amplitudo 10 cm. Kelajuan partikel pada saat berada 5 cm dari titik setimbangnya adalah ....

....

TENAGA GETARAN SELARAS

Soal 8.10

Sebuah benda yang massanya 100 gram bergetar harmonik dengan periode 0,2 detik dan amplitudo 2 cm. Berapakah besar energi kinetik dan energi potensialnya pada saat simpangan 1 cm?

Soal 8.11

Sebuah pegas tergantung tanpa beban panjangnya 30 cm. Kemudian ujung bawah pegas digantungi beban 100 gram sehingga panjang pegas menjadi 35 cm. Jika beban tersebut ditarik ke bawah sejauh 5 cm, maka hitung energi potensial elastik pegas.

Soal 8.12

Sebuah benda 3 kg yang dihubungkan pada sebuah pegas berosilasi dengan amplitudo 4 cm dan periode 2 s.

(a) Berapakah energi total sistem?

(b) Berapakah kecepatan maksimum benda?

Soal 8.13

Untuk menarik suatu pegas agar bertambah panjang dengan 0,25 m dibutuhkan gaya sebesar 18 N, maka

(1) Besar konstanta gaya pegas adalah 72 N/m.

(2) Panjang pegas menjadi 0,25 m.

(3) Besar energi potensial pegas menjadi 2,25 Joule

(4) Besar usaha untuk menarik pegas tersebut adalah 4,5 Joule.

JAWAB ....

Soal 8.14

Benda yang massanya b^{-2} kg bergetar selaras sederhana dengan frekuensi b Hz dan amplitudo π^{-1} m, maka

(1) Laju maksimum benda adalah $2\,b$ m/s.

(2) Periode getaran benda adalah b^{-1} s.

(3) Energi kinetik maksimum adalah 2 Joule.

(4) Percepatan maksimum benda adalah $4\,\pi$ m/s^2.

JAWAB ....

....

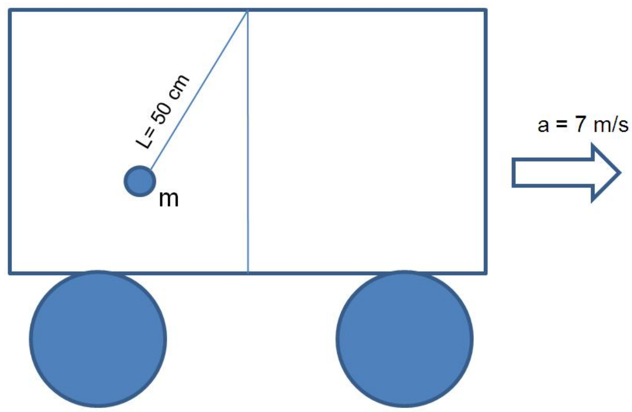
BANDUL (PENDULUM)

Soal 8.15

Sebuah bandul yang panjangnya 100 cm dibawa ke planet Mars. Jika berat benda di Mars adalah 0,4 beratnya di bumi, maka tentukan frekuensi getarnya.

Soal 8.16

Sebuah bandul sederhana yang digantung pada atap sebuah gerobak yang bergerak dengan percepatan $a = 7$ m/s^2 (lihat Gambar 10). Tentukan periode bandul sederhana ini jika bandul digantung pada tali sepanjang 50 cm.



Gambar 10. Sebuah bandul sederhana yang digantung pada atap sebuah gerobak yang bergerak dengan percepatan a.

Soal 8.17

Sebuah bandul dengan panjang 2,5 cm digetarkan harmonis dengan amplitudo 1 cm. Pada saat simpangannya $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ berapakah kecepatan yang terjadi?

Soal 8.18

Carilah periode bandul sederhana yang panjangnya (a) 1 m, (b) 2 m, (c) 3 m dan (d) 4 m.

Soal 8.19

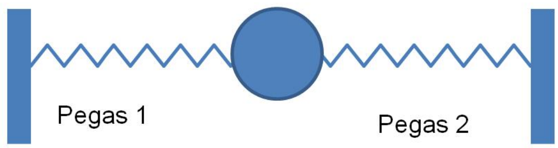
Sebuah jam bandul sederhana dikalibrasi untuk menunjukkan waktu yang akurat pada amplitudo sudut $\phi_0 = 10^o$. Ketika amplitudo berkurang ke suatu titik dengan perubahan yang sangat kecil, berapakah banyak kelebihan waktu yang dihasilkan dalam satu hari?

Soal 8.20

Berapakah periode untuk simpangan sudut kecil dari tongkat homogen yang berporos pada suatu ujung dengan panjang (a) 1 m, (b) 2 m, (c) 3 m dan (d) 4 m.

5. Gabungan Dua Getaran Selaras

5.1. Kombinasi 2 Getaran Selaras Searah Berfrekuensi Sama. Ada kalanya sebuah titik massa melakukan 2 macam gerakan harmonis seperti sebuah massa yang terikat pada ujung-ujung 2 pegas dan disimpangkan (lihat dengan seksama pada Gambar 11). Titik massa ini menjalani getaran selaras gabungan searah dengan simpangan total setiap saat dapat ditentukan dengan menjumlahkan simpangan masing-masing getaran seperti menjumlah 2 (dua) bersaran vektor.



GAMBAR 11. Ilustrasi mengenai dua getaran searah yang digabungkan. Kedua getaran diasumsikan berasal dari 2 buah sistem pegas-benda.

Tinjau dua buah getaran dengan frekuensi getar sama (ω), yaitu x_1 dan x_2 persamaan getaran selaras pertama

$$x_1 = A_1 \cos(\omega\, t + \phi_1)\ . \tag{5.1}$$

Persamaan getaran selaras kedua

$$x_2 = A_2 \cos(\omega\, t + \phi_2)\ . \tag{5.2}$$

Persamaan getaran selaras gabungan adalah

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega\, t + \phi)\ . \tag{5.3}$$

Gunakan identitas trigonometri

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\big(\sin(\omega\, t)\sin(\phi_1) - \cos(\omega\, t)\cos(\phi_1)\big) \\ x_2 &= A_2\big(\sin(\omega\, t)\sin(\phi_2) - \cos(\omega\, t)\cos(\phi_2)\big) \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A_1\big(\sin(\omega\, t)\sin(\phi_1) - \cos(\omega\, t)\cos(\phi_1)\big) \\ &\quad + A_2\big(\sin(\omega\, t)\sin(\phi_2) - \cos(\omega\, t)\cos(\phi_2)\big) \end{aligned}$$

Padahal

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega\, t + \phi) \\ &= A\big(\sin(\omega\, t)\sin(\phi) - \cos(\omega\, t)\cos(\phi)\big) \end{aligned}$$

Bandingkan dua suku $\sin(\omega\, t)$ yang sama

$$\begin{aligned} A\ \sin(\omega\, t)\sin(\phi) &= \big(A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)\big)\ \sin(\omega\, t) \\ A\ \sin(\phi) &= A_1\ \sin(\phi_1) + +A_2\sin(\phi_2) \end{aligned}$$

Demikian pula untuk suku $\cos(\omega\, t)$

$$\begin{aligned} A\ \cos(\omega\, t)\cos(\phi) &= \big(A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)\big)\ \cos(\omega\, t) \\ A\ \cos(\phi) &= A_1\ \cos(\phi_1) + +A_2\cos(\phi_2) \end{aligned}$$

Bandingkan suku $A\sin(\omega\, t)$ dan $A\cos(\omega\, t)$ di atas diperoleh

$$\begin{aligned}
\tan(\phi) &= \frac{A\ \sin(\phi)}{A\ \cos(\phi)} = \frac{A_1\ \sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\ \cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)} \\
\phi &= \arctan\left(\frac{A_1\ \sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\ \cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}\right) \ . \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Besar fase getaran gabungan ini dapat diketahui jika amplitudo dan fase getaran pertama serta kedua telah ditentukan. Sedangkan amplitudo getaran gabungan adalah

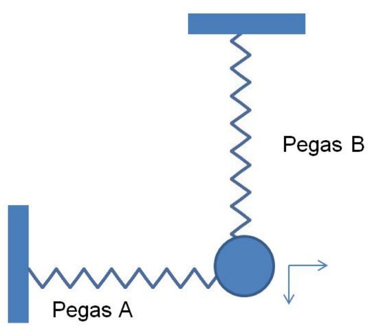
$$\begin{aligned}
A^2 &= (A\ \sin(\phi))^2 + (A\ \cos(\phi))^2 \\
&= (A_1\ \sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2))^2 + (A_1\ \cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2))^2 \\
&= A_1^2\ \sin^2(\phi_1) + 2\,A_1\,A_2\sin(\phi_1)\sin(\phi_2) + A_2^2\sin^2(\phi_2) \\
&\quad + A_1^2\ \cos^2(\phi_1) + 2\,A_1\,A_2\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) + A_2^2\cos^2(\phi_2) \\
&= A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\big(\sin(\phi_1)\sin(\phi_2) + \cos(\phi_1)\cos(\phi_2)\big)
\end{aligned}$$

atau

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)\ . \qquad (5.5)$$

Dengan demikian, amplitudo getaran gabungan dapat diketahui jika amplitudo dan fase getaran pertama serta kedua telah ditentukan.

5.2. Gabungan 2 getaran selaras yang saling tegak lurus. Dua getaran selaras yang saling tegak lurus dapat juga digabungkan (lihat Gambar 12). Hasilnya adalah suatu gerak yang merupakan resultan kedua getaran tersebut. Akan ditunjukkan bahwa gerak yang dibentuk oleh gabungan getaran selaras tegak lurus ini tidak lagi sesederhana gabungan getaran selaras searah frekuensi dan beda fase merupakan faktor-faktor penting bentuk gerak resultan.



GAMBAR 12. Ilustrasi mengenai dua getaran tegak lurusyang digabungkan. Pegas A bergerak horizontal, pegas B bergerak vertikal.

Tinjau 2 getaran saling tegak lurus, masing - masing adalah

$$x = A_x\cos(\omega_1\, t + \phi_x) \qquad (5.6)$$

$$y = A_y\cos(\omega_2\, t + \phi_y) \qquad (5.7)$$

(1) Misalkan kedua getaran tersebut mempunyai frekuensi yang sama, yaitu

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ dan sudut fase yang sama $\phi_x = \phi_y = \phi$. Dengan demikian berlaku

$$\cos(\omega\, t + \phi) = \frac{x}{A_x} \quad \text{dan} \quad y = \frac{A_y}{A_x}\, x \; . \tag{5.8}$$

Persamaan (5.8) ini menunjukkan bahwa resultan dua buah getaran selaras dengan frekuensi dan sudut fase sama yang digabung secara tegak lurus akan membentuk lintasan garis lurus.

(2) Untuk $|\phi_x - \phi_y| = \phi$ dan freekuensi kedua getaran sama (ω) berlaku

$$\cos(\omega\, t) = \frac{x}{A_x} \quad \text{dan} \quad \cos(\omega\, t + \phi) = \frac{y}{A_y}$$

$$\begin{aligned}
-\cos(\omega\, t + \phi) &= \sin(\phi)\sin(\omega\, t) - \cos(\phi)\cos(\omega\, t) \\
&= \sin(\phi)\sqrt{1 - \cos^2(\omega\, t)} - \cos(\phi)\frac{x}{A_x} \\
-\frac{y}{A_y} &= \sin(\phi)\sqrt{1 - \cos^2(\omega\, t)} - \cos(\phi)\frac{x}{A_x} \\
&= \sin(\phi)\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_x^2}} - \cos(\phi)\frac{x}{A_x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{y}{A_y} + \cos(\phi)\,\frac{x}{A_x}\right)^2 &= \left(\sin(\phi)\,\sqrt{\frac{A_x^2 - x^2}{A_x^2}}\,\right)^2 \\
\frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2\,x\,y}{A_x\,A_y}\cos(\phi) + \frac{x^2}{A_x^2}\cos^2(\phi) &= \sin^2(\phi)\,\frac{A_x^2 - x^2}{A_x^2} \\
\frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2\,x\,y}{A_x\,A_y}\cos(\phi) + \frac{x^2}{A_x^2}\left(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right) &= \sin^2(\phi)
\end{aligned}$$

$$\frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2\,x\,y}{A_x\,A_y}\cos(\phi) + \frac{x^2}{A_x^2} = \sin^2(\phi) \; . \tag{5.9}$$

Persamaan (5.9) adalah persamaan ellips dalam bidang $x - y$. Asal nilai A_x, A_y dan ϕ diketahui, maka gambar ellips dapat dibentuk. Selanjutnya, Persamaan (5.9) ini menggambarkan bahwa lintasan gabungan dua getaran yang tegak lurus berfrekuensi sama namun berbeda fase berbentuk ellips. Perlu dicatat bahwa ellips memiliki bentuk - bentuk khusus berupa garis (misal jika $\phi = 0$ atau π dan amplitudo sama) dan lingkaran (jika $\phi = \frac{\pi}{2}$ dan amplitudo sama).

Beberapa kasus khusus

a. Untuk $\phi = 0$, $A_x = A_y$ (amplitudo sama) pola getaran ini dapat dilihat di Gambar 13. Pada kondisi ini berlaku

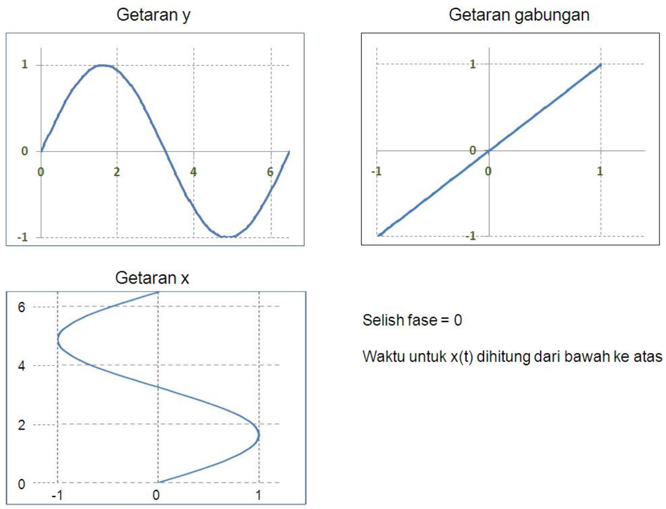
$$\frac{y^2}{A^2} - \frac{2\,x\,y}{A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 0 \longrightarrow (y - x)^2 = 0 \; , \tag{5.10}$$

maka $x = y$ menunjukkan persamaan garis lurus.

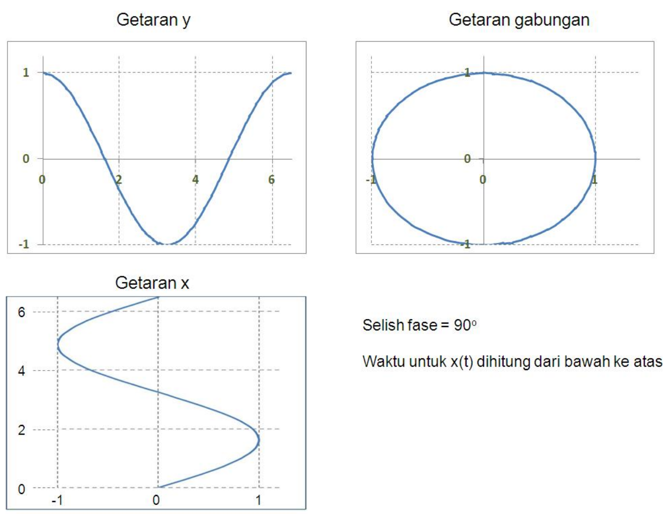
b. Untuk $\phi = \frac{\pi}{2}$ maka $\sin^2(\phi) = 1$ dan Persamaan (5.9) menjadi

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = A^2 \; , \tag{5.11}$$

menunjukkan persamaan lingkaran pola getaran ini dapat dilihat di Gambar 14.



GAMBAR 13. Gambar Lissayous untuk gabungan dua getaran dengan $\phi = 0$, $A_x = A_y = A$.



GAMBAR 14. Gambar Lissayous untuk gabungan dua getaran dengan $\phi = \frac{\pi}{2}$, $A_x = A_y = A$.

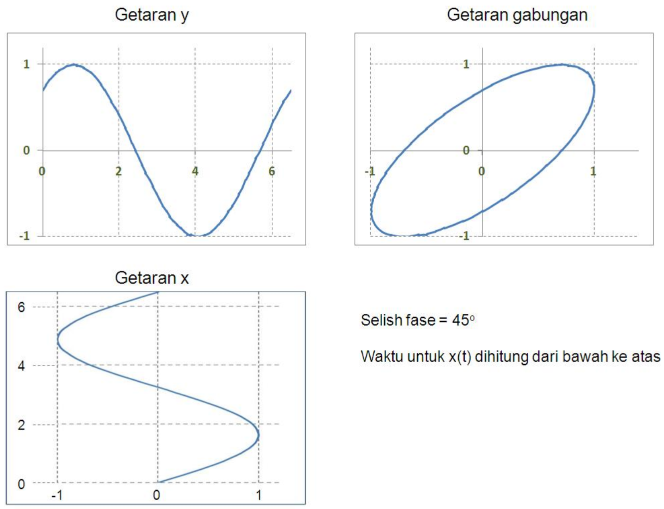
c. Untuk $\phi = \frac{\pi}{4}$ atau $\phi_y = \phi_x + \frac{\pi}{4}$, maka berlaku

$$\frac{y^2}{A^2} - \frac{2\,x\,y}{A^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{x^2}{A^2} = \frac{1}{2}\ , \tag{5.12}$$

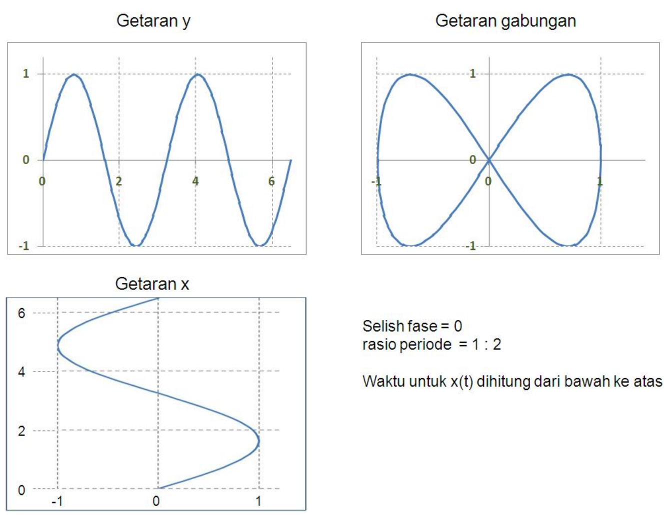
menunjukkan persamaan ellips pola getaran ini dapat dilihat di Gambar 15.

d. Untuk $\phi = \pi$, maka berlaku

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{2\,x\,y}{A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 0 \longrightarrow (y + x)^2 = 0\ , \tag{5.13}$$



GAMBAR 15. Gambar Lissayous untuk gabungan dua getaran dengan $\phi = \frac{\pi}{4}$, $A_x = A_y = A$.



GAMBAR 16. Gambar Lissayous untuk gabungan dua getaran dengan$\phi = 0$, $A_x = A_y = A$ dan $\omega_y = 2\,\omega_x$.

maka $x = -y$ menunjukkan persamaan garis lurus.

Gabungan dua getaran selaras saling tegak lurus dengan frekuensi yang tidak sama dapat dilihat pada Gambar 16. Pola getaran gabungan Gambar 13 hingga Gambar 16 sering disebut Gambar Lissayous.

Contoh Soal H.3

Dua buah getaran yang bergerak saling tegak lurus, yaitu

$$x = 4\sin(10\,t) \quad \text{dan} \quad y = 3\cos(10\,t) \ ,$$

disuperposisikan. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

JAWAB :

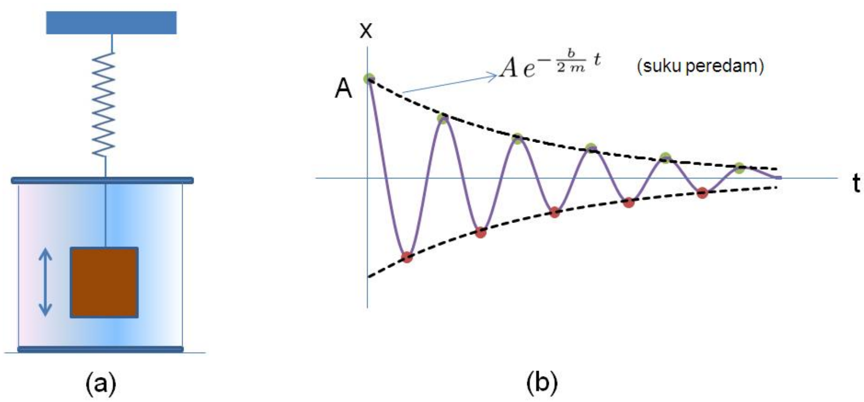
Persoalan ini dapat diselesaikan menggunakan Persamaan (5.9)

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2\,x\,y)}{A_x\,A_y}\cos(\phi + \frac{x^2}{A_x^2} &= \sin^2(\phi) \\
\frac{y^2}{3^2} - \frac{2\,x\,y}{4\cdot 3}\cos(90^o) + \frac{x^2}{4^2} &= \sin^2(90^o) \\
\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} &= 1\ .
\end{aligned}$$

Persamaan terakhir ini adalah getaran resultan hasil gabungan kedua getaran. Bentuk resultannya adalah ellips.

6. Getaran Selaras Teredam

Dalam pembahasan yang terdahulu, masih dianggap bahwa titik massa yang melakukan getaran selaras (dapat berupa bandul atau beban pada pegas), tidak mengalami redaman karena gaya gesekan, sehingga dapat berosilasi terus menerus. Pada kenyataannya, amplitudo osilasi makin lama makin berkurang hingga akhirnya menjadi nol. Hal ini terjadi karena pengaruh gaya gesekan. Contoh gesekan ini misalnya gesekan oleh udara, hembusan angin, gesekan dengan air seperti pada sistem nassa pegas yang ditunjukkan oleh Gambar 17a dan lainnya. Osilasi yang demikian disebut gerak harmonis (getaran) selaras teredam.



Gambar 17. (a) Getaran selaras teredam sistem massa - pegas yang dibenamkan ke dalam air. (b) Kurva peredaman pada sistem itu.

Pada umumnya gaya gesek yang dialami titik massa yang berosilasi ini berbanding lurus dengan kecepatannya dan ditulis sebagai berikut

$$F_{\text{gesekan}} = b\,v\ , \tag{6.1}$$

dengan b adalah tetapan redaman dan v adalah kecepatan. Substitusikan gaya gesekan ini sebagai gaya luar selain gaya pegas ke Persamaan (1.2)

$$\sum F = m\,a = -k\,x - b\,v\ ,$$

atau

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = 0 \;. \tag{6.2}$$

Untuk b yang kecil $\left(\frac{b^2}{4\,m^2} < \frac{k}{m}\right)$, Persamaan (6.2) mempunyai penyelesaian

$$x = A\,e^{-\frac{b}{2\,m}\,t}\,\cos(\omega'\,t + \phi) \;, \tag{6.3}$$

dengan

$$\omega' = 2\,\pi\,f' = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right) - \left(\frac{b}{2\,m}\right)^2} \tag{6.4}$$

$$f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.5}$$

Jika $b = 0$ atau tanpa gesekan, maka $\omega' = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, yaitu frekuensi sudut getaran tanpa teredam. Salah satu contoh getaran selaras teredam adalah suatu sistem massa pegas yang dibenamkan ke dalam air (lihat Gambar 17a). Yang mana grafik kurva peredaman pada sistem itu ditunjukkan oleh Gambar 17b.

Masih pada keadaan redaman kecil dan dengan asumsi $\omega' \approx \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Seperti yang telah dipahami di atas amplitudo getaran alan berkurang secara lambat. Dalam gerak harmonik sederhana, energi meaknik total potensial dan energi kinetik untuk satu siklus adalah sama, dan energi total sama dengan dua kali rata - rata energi potensial maupun energi kinetik. Oleh karena itu, kita dapat menulis:

$$E = 2\Big(\frac{1}{2}\,m\,v^2\Big)_{\text{rata - rata}} = m\,(v^2)_{\text{rata - rata}} \;. \tag{6.6}$$

Untuk osilator yang teredam sedikit, hanya energi mekanik yang hilang selama satu siklus sehingga energi total berkurang secara lambat terhadap waktu. Laju perubahan sesaat dari energi mekanik total sama dengan daya masukan dari gaya redaman:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \\ &= F_d\,v = -b\,v^2 \;. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Daya masukan bertanda negatif menunjukkan bahwa energi meninggalkan sistem. Jika kita mengganti nilai v^2 pada Persamaan (6.7) dengan $v^2_{\text{rata - rata}} = \frac{E}{m}$ maka kita akan memperoleh

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\,E \;. \tag{6.8}$$

Persamaan (6.8) menggambarkan suatu penurunan eksponensial. Laju penurunan energi berbanding lurus dengan energi, sehingga penurunan fraksional

$$\frac{\mathrm{d}E}{E} = -\frac{b}{m}\,\mathrm{d}t \;, \tag{6.9}$$

sama untuk sembarang selang waktu.

Persamaan (6.8) dapat diselesaikan dengan integrasi langsung Persamaan (6.9) kita akan memperoleh

$$\ln E = -\frac{b}{m}\,t + C \;,$$

dengan C adalah suatu konstanta integrasi sembarang. Tuliskan bentuk eksponensial pada kedua ruas, kita akan memperoleh

$$\begin{aligned} E &= e^{-\frac{b}{m}\,t+C} \\ &= e^{C}\,e^{-\frac{b}{m}\,t} = E_0\,e^{-\frac{b}{m}\,t}\ , \end{aligned}$$

dengan $E_0 = e^C$ adalah suatu konstanta lain, yang merupakan energi pada waktu $t = 0$. Dengan demikian, penyelesaian Persamaan (6.8) adalah

$$E = E_0\,e^{-\frac{b}{m}\,t} = E_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}\ , \tag{6.10}$$

dengan konstanta waktu

$$\tau = \frac{m}{b}\ , \tag{6.11}$$

merupakan waktu yang diperlukan energi untuk berkurang sebesar faktor $\frac{1}{e}$. Jika redaman kecil, maka b kecil, dan osilator hanya akan kehilangan sebagian energinya selama satu osilasi. Dalam kasus ini, kita dapat mencari kehilangan energi per periode ddengan diferensial dE diganti dt pada Persamaan (6.10) dengan ΔE diganti Δt dan menetapkan $\Delta t = T$, yakni satu periode. Kita akan memperoleh

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{b}{m}\,T\ , \tag{6.12}$$

Peredaman dari osilator yang tredam sedikit biasanya dinyatakan dengan suatu besaran tak berdimensi Q yang disebut fator kualitas atau faktor Q. Jika E adalah energi total dan $|\Delta E|$ menyatakan kehilangan energi dalam satu periode, faktor Q didefinisikan sebagai

$$Q = 2\,\pi\,\frac{E}{\Delta E}\ . \tag{6.13}$$

Dengan demikian, faktor Q berbanding terbalik dengan kehilangan energi fraksional per siklus

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{2\,\pi}{Q}\ . \tag{6.14}$$

Gunakan Persamaan (6.12) dan Persamaan (6.13), kita dapat menghubungkan faktor Q dengan konstanta redaman dan konstanta waktu

$$\begin{aligned} Q &= 2\,\pi\,\frac{E}{\Delta E} \\ &= 2\,\pi\,\frac{m}{b\,T} = 2\,\pi\,\frac{\tau}{T}\ . \end{aligned} \tag{6.15}$$

Contoh Soal H.4

Suatu bandul sederhana kehilangan 1 % energinya setiap osilasi. Berapakah faktor Q?

JAWAB :

Karena kehilangan energi 1 persen maka

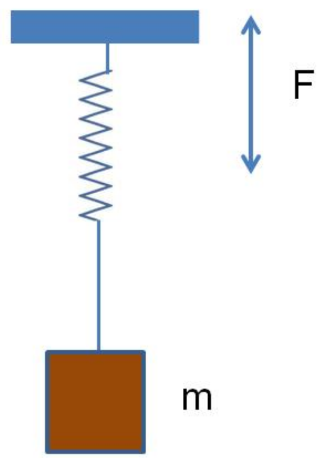
$$\frac{|\Delta E|}{E}\,\frac{1}{100}$$

Oleh karena itu, faktor Q adalah

$$\begin{aligned} Q &= 2\,\pi\,\frac{E}{\Delta E} \\ &= 2\,\pi\,100 = 628 \end{aligned}$$

7. Osilasi Terpaksa dan Resonansi

Kita telah melihat bahwa osilasi teredam, energi terdisipasi secara kontinu dan amplitudo berkurang. Untuk mempertahankan satu sistem teredam agar tetap berosilasi, energi harus diberikan ke dalam sistem. Jika hal ini dilakukan, maka osilator dikatakan digerakkan atau dipaksa.



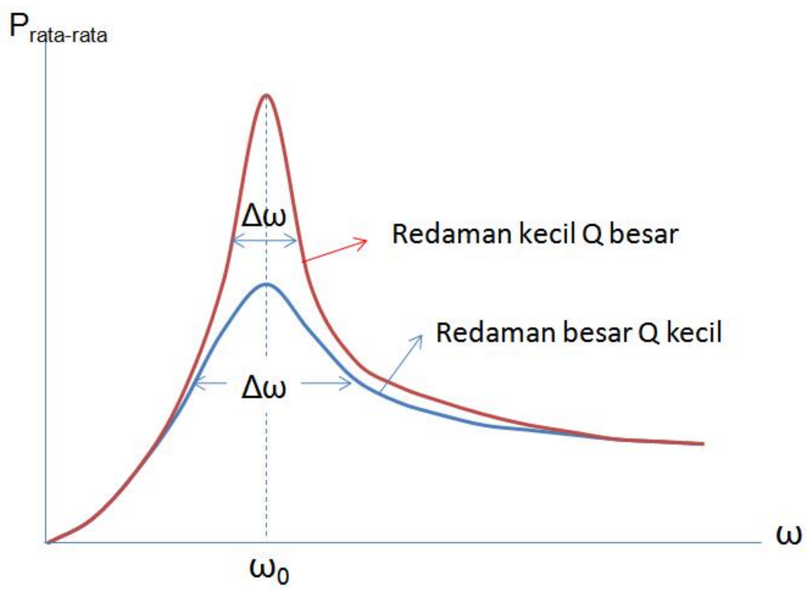
GAMBAR 18. Sebuah benda pada pegas vertikal dapat digerakkan dengan pemberian gaya ke atas maupun ke bawah secara periodik.

Gambar 18 menunjukkan sistem yang terdiri dari sebuah benda pada pegas yang digerakkan dengan titik gantung digerakkan ke atas dan ke bawah. Dengan cara yang sama bandul sederhana dapat digerakkan dengan menggerakkan pengantung maju dan mundur. Anda perlu melakukan beberapa eksperimen untuk mengakrabkan diri dengan sifat - sifat osilator paksa. Jika titik gantung sebuah benda pada pegas atau bandul sederhana digerakkan dengan gerak harmonik sederhana dengan amplitudo kecil dan frekuensi sudut ω, maka sistem akan mulai berosilasi. Pada mulanya, geraknya rumit, namun akhirnya suatu keadaan tunak (konstan) dicapat ketika sistem berosilasi dengan frekuensi sama dengan penggerak dan amplitudo konstan sehingga energi juga konstan.

Amplitudo dan energi sistem dalam keadaan tunak (*steady state*) tidak hanya bergantung pada amplitudo penggerak, tapi juga pada frekuensinya. Frekuensi alami sebuah osilator didefinisikan sebagai frekuensi osilator tersebut ketika tak ada gaya paksa atau redaman. Frekuensi sudut alami pegas, misalnya $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Jika frekuensi paksa sama (atau hampir sama) dengan frekuensi alami sistem, maka sistem akan berosilasi dengan suatu amplitudo yang jauh lebih besar dari pada amplitudo gaya paksa. Fenomena ini disebut Resonansi. Jika frekuensi paksa sama dengan frekuensi alami osilator tersebut, maka energi yang diserap oleh osilator bernilai maksimum. Dengan demikian, frekeuensi alami disebut frekuensi resonansi sistem.

Laju rata - rata penyerapan energi selama satu siklus sama dengan daya rata-rata yang diberikan oleh gaya paksa. Gambar 19 memperlihatkan kurva daya rata-rata yang diberikan pada sebuah osilator sebagai fungsi frekuensi paksa untuk dua nilai redaman berbeda. Kurva ini disebut kurva resonansi.



Gambar 19. Kurva daya rata - rata yang diberikan ke suatu osilator oleh gaya paksa sinusoida versus frekuensi sudut paksa ω untuk nilai redaman yang berbeda. Resonansi terjadi ketika frekuensi (sudut) gaya sama dengan frekuensi (sudut) alami sistem ω_0. Resonansi tajam terjadi jika redaman kecil.

Jika redaman kecil (Q besar), osilator akan menyerap jauh lebih banyak energi dari gaya paksa atau dekat frekuensi resonansi dari pada yang diserap pada frekuensi lain. Lebar puncak kurva resonansi yang bersangkutan adalah sempit dan kita mengatakan bahwa resonansinya tajam. Jika redaman besar (Q kecil), osilator tetap menyerap lebih banyak energi pada saat dekat resonansi denngan frekuensi lain. Lebar puncak masing - masing kurva resonansi $\Delta\omega$ ditunjukkan dalam gambar. Untuk redaman yang relatif kecil, rasio frekuensi resonansi ω_c, terhadap lebar resonansi dapat ditunjukkan sama dengan faktor Q.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \; . \tag{7.1}$$

Jadi, faktor Q merupakan ukuran langsung dari ketajaman resonansi.

Kita dapat memperlakukan osilator paksa secara matematis dengan menganggap bahwa (di samping gaya pemulih dan gaya redaman) osilator mengalami gaya eksternal, gaya paksa, yang berubah secara harmonis terhadap waktu menurut persamaan

$$F_{\text{eks}} = F_0 \cos(\omega\, t) \; , \tag{7.2}$$

dengan ω merupakan frekuensi sudut gaya paksa, yang umumnya tidak berhubungan dengan frekuensi sudut alami sistem ω_0.

Sebuah benda bermassa dipasang pada pegas dengan konstanta gaya k dan dikenai gaya redaman $-bv$ dan gaya eksternal $F_0 \cos(\omega\, t)$ yang mengikuti persamaan gerak yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} \sum F &= m\, a \\ -k\, x - b\, v F_0 \cos(\omega\, t) &= m\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

atau

$$m\, \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + b\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\, \omega^2\, x = F_0 \cos(\omega\, t)\ . \tag{7.3}$$

Pada Persamaan (7.3) digunakan $k = m\, \omega^2$ dan $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$

Kita tidak akan berusaha menyelesaikan Persamaan (7.3). Sebagai gantinya kita akan mebicarakan penyelesaian umumnya secara kualitatif. Penyelesaian Persamaan (7.3) terdiri dari dua bagian, penyelesaian transien dan penyelesaian keadaan tunak. Bagian penyelesaian transien identik dengan penyelesaian untuk osilator teredam yang diberikan oleh Persamaan (6.3). Konstanta dalam bagian penyelesaian ini bergantung pada syarat - syarat awal. Setelah berlalu, bagian penyelesaian ini menjadi diabaikan karena penurunan eksponensial amplitudo. Kemudian kita tinggal memperoleh penyelesaian keadaan tunak yang tidak bergantung pada syarat - syarat awal. Penyelesaian itu dapat ditulis sebagai

$$x = A \cos(\omega\, t - \delta)\ , \tag{7.4}$$

dengan frekuensi sudut ω sama seperti frekuensi sudut gaya paksa. Sementara itu, amplitudo A dan konstanta fase δ diberikan oleh

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\, (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\, \omega^2}}\ , \tag{7.5}$$

dan

$$\tan(\delta) = \frac{b\, \omega}{m\, (\omega_0^2 - \omega^2)}\ . \tag{7.6}$$

Kecepatan benda dalam keadaan tunak diperoleh dengan mendiferensialkan Persamaan (7.4) terhadap waktu

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\, \omega \sin(\omega\, t - \delta)$$

Pada resonansi kecepatan sefase dengan gaya paksa

$$= -A\, \omega \sin\big(\omega\, t - \frac{\pi}{2}\big) = A\, \omega \cos(\omega\, t)$$

Jadi pada resonansi benda selalu bergerak searah dengan gaya penggerak, seperti yang diharapkan untuk masukan daya maksimum.

8. Soal - Soal

Soal 8.2.1

Dua buah getaran selaras searah disuperposisikan. Keduanya memiliki frekuensi sama, sedangkan amplitudo dan sudut fase untuk getaran 1 adalah 2 cm dan $\frac{\pi}{4}$ untuk getaran 29 cm dan π. Tentukan amplitudo dan persamaan getaran resultan.

Soal 8.2.2

Dua buah getaran selaras searah disuperposisikan. Keduanya memiliki frekuensi sama, sedangkan amplitudo dan sudut fase untuk getaran 1 adalah 8 cm dan $\frac{\pi}{4}$ untuk getaran 9 cm dan $\frac{\pi}{6}$. Tentukan amplitudo dan persamaan getaran resultan.

Soal 8.2.3

Dua buah getaran yang bergerak saling tegak lurus, yaitu

$$x = 5\sin(20\,t) \quad \text{dan} \quad y = 4\cos(20\,t)\ ,$$

disuperposisikan. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

Soal 8.2.4

Dua buah getaran yang bergerak saling tegak lurus, yaitu

$$x = 8\sin(16\,t) \quad \text{dan} \quad y = 10\cos(16\,t)\ ,$$

disuperposisikan. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

Soal 8.2.5

Dua buah getaran dengan frekuensi sama dan amplitudo sama yaitu $A_x = A_y = 2$ namun berbeda fase 90^o cm digabung. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

Soal 8.2.6

Dua buah getaran dengan frekuensi sama dan amplitudo sama yaitu $A_x = A_y = 5$ namun berbeda fase 450^o cm digabung. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

Soal 8.2.7

Dua buah getaran dengan frekuensi sama, amplitudo sama yaitu $A_x = A_y = 10$ dan sefase 90^o cm digabung. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

Soal 8.2.8

Dua buah getaran dengan fase sama dan amplitudo sama yaitu $A_x = A_y = 6$ namun berbeda frekuensi yaitu $\omega_x = 3\,\omega_y$ cm digabung. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

Soal 8.2.9

Dua buah getaran dengan frekuensi sama dan amplitudo sama yaitu $A_x = A_y = 4$ namun berbeda fase 180^o cm digabung. Tentukan persamaan getaran gabungannya dan sebutkan apa bentuknya.

Soal 8.2.10

Suatu sistem pegas digantungkan pada suatu dinding kemudian ujungnya yang bebas diberi beban yang memiliki massa 1 kg menyebabkan pegas meregang sejauh 1 cm. Jika benda ini dijatuhkan dalam air maka mengalami kecepatan terminal sebesar 10 m/s. Tentukan persamaan getaran yang terjadi jika sistem massa pegas dibenamkan dalam air dan awalnya massa ditarik 10 cm dari keadaan setimbangnya setelah dalam air ini.

Soal 8.2.11

Suatu sistem pegas digantungkan pada suatu dinding kemudian ujungnya yang bebas diberi beban yang memiliki massa 2 kg menyebabkan pegas meregang sejauh 5 cm. Jika benda ini dijatuhkan dalam air maka mengalami kecepatan terminal sebesar 20 m/s. Tentukan persamaan getaran yang terjadi jika sistem massa pegas dibenamkan dalam air dan awalnya massa ditarik 5 cm dari keadaan setimbangnya setelah dalam air ini.

Soal 8.2.12

Suatu bandul sederhana kehilangan 10 % energinya setiap osilasi. Berapakah faktor Q?

Soal 8.2.13

Suatu bandul sederhana kehilangan 5 % energinya setiap osilasi. Berapakah faktor Q?

Soal 8.2.14

Sebuah osilator mempunyai faktor $Q = 200$. Berapa persenkah energinya berkuran selama satu periode?

Soal 8.2.15

Sebuah benda 2 kg berosilasi dengan amplitudo awal 3 cm pada pegas yang berkonstanta gaya $k = 400$ N/m. Carilah (a) periode dan (b) total energi awal (c) Jika energi berkurang sebesar 1 persen per periode, maka hitung konstanta redaman b dan faktor Q.

Soal 8.2.16

Suatu osilator teredam kehilangan 2 persen energinya selama masing - masing siklus

(a) Berapakah faktor Q-nya?

(b) Jika frekuensi resonansi 300 Hz, maka hitung lebar kurva resonansi $\Delta\omega$ bila osilator digerakkan (dipaksa)?

Soal 8.2.17

Sebuah benda 2 kg bverosilasi pada sebuah pegas yang mempunyai konstanta pegas $k = 400$ N/m. Konstanta redaman $b = 2$ kg/s. Sistem digerakkan oleh suatu gaya sinusoidal bernilai maksimum 10 N dan frekuensi sudut $\omega = 10$ rad/s.

(a) Berapakah amplitudo osilasi?

(b) Jika frekuensi penggerak berubah, pada frekuensi berapakan resonansi terjadi?

(c) hitunglah amplitudo osilasi pada resonansi

(d) Berapakah lebar kurva resonansi $\Delta\omega$?

Soal 8.2.18

$$\begin{aligned} A &= A_0 \sin(\omega_1 t + \phi) \\ B &= B_0 \sin(\omega_2 t + \phi) \\ C &= C_0 \sin(\omega_3 t + \phi) \end{aligned}$$

Tentukan persamaan gelombang resultannya

Soal 8.2.19

Pada soal 2.18 diketahui bahwa $\phi = 30^o$, $A_0 = 2$ cm, $B_0 = 3$ cm, $C_0 = 4$ cm, sementara $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = \pi$, dan $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$. Tentukan persamaan gelombang resultannya

Soal 8.2.20

Dambar resultan 10 gelombang yang amplitudo, frekuensi, dan fasenya berbeda semua. Tentukan persamaan resultannya.

Bibliografi

[1] P. A. Tipler, 1991, *Fisika untuk Sains dan Teknik Edisi Ketiga Jilid 1*, Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] F. W. Sears, M. W. Zemansky, 1982, *Fisika untuk Universitas 1: Mekanika, Panas, Bunyi*, Penerbit Binacipta, Bandung.

[3] G. Woan, 2000, *The Cambridge Handbook of Physics Formulas*, Cambridge University Press, Cambridge.

[4] R. Feynman, 1964, *The Feynman Lectures on Physics Volume 1*, Addison-Wesley Publishing Company, London.

[5] Tim Dosen ITS, 2006, *Fisika I: Kinematika, Dinamika, Getaran, Panas*, FMIPA, ITS