EXERCÍCIOS DE FUNDAMENTOS DA PROGRAMAÇÃO

Departamento de Engenharia Informática
Instituto Superior Técnico
Universidade Técnica de Lisboa

Índice

Capítulo 1

Computadores, Algoritmos e Programas

1. Considere a seguinte gramática em notação BNF, cujo símbolo inicial é "palavra":

   ⟨palavra⟩ ::= ⟨sílaba⟩ ⟨sílaba⟩

   ⟨sílaba⟩ ::= ⟨vogal⟩ ⟨consoante⟩ | ⟨consoante⟩ ⟨vogal⟩

   ⟨vogal⟩ ::= `a` | `e` | `i` | `o` | `u`

   ⟨consoante⟩ ::= `b` | `c` | `d` | `f` | `g` | `h` | `j` | `l` | `m` | `n` | `p` | `q` | `r` | `s` | `t` | `v` | `x` | `z`

   (a) Indique os símbolos terminais e os símbolos não terminais da gramática.

   (b) Indique, justificando, quais das expressões seguintes pertencem ou não pertencem ao conjunto de palavras da linguagem definida pela gramática.

   ```
   asno
   cria
   gato
   leao
   OVOS
   tu
   vaca
   ```

2. Considere a seguinte gramática em notação BNF, cujo símbolo inicial é "S":

   ⟨S⟩ ::= ⟨A⟩ ⟨B⟩

   ⟨A⟩ ::= ⟨x⟩ | ⟨x⟩ ⟨A⟩

   ⟨B⟩ ::= ⟨y⟩ | ⟨y⟩ ⟨B⟩

⟨x⟩ ::= A | B | C | D

⟨y⟩ ::= 1 | 2 | 3 | 4

(a) Diga quais são os símbolos terminais e quais são os símbolos não terminais da gramática.

(b) Quais das seguintes frases pertencem à linguagem definida pela gramática? Justifique a sua resposta.

ABCD
1CD
A123CD
AAAAB12

(c) Suponha que a terceira regra desta gramática era definida do seguinte modo:
⟨B⟩ ::= ⟨y⟩$^+$
Será que as frases definidas pela gramática eram as mesmas?

3. Considere a seguinte gramática em notação BNF em que o símbolo inicial é "Princ":

⟨Princ⟩ ::= a ⟨Meio⟩ a

⟨Meio⟩ ::= b ⟨Fim⟩ b

⟨Fim⟩ ::= c | c ⟨Fim⟩

(a) Diga quais são os símbolos terminais e os símbolos não-terminais desta gramática.

(b) Descreva informalmente as frases definidas pela gramática.

4. Escreva uma gramática em notação BNF para definir números inteiros positivos. Um número inteiro positivo é representado como uma sequência arbitrariamente longa de dígitos de zero a nove. Considere que, à excepção do número inteiro positivo 0, o primeiro dígito de um número inteiro positivo não poderá ser 0. Por exemplo, de acordo com esta gramática 023 não é um número inteiro positivo.

5. Considere a seguinte gramática em notacão BNF, em que o símbolo inicial é "operação":

⟨operação⟩ ::= (⟨argumento⟩ ⟨operador⟩ ⟨argumento⟩)

⟨operador⟩ ::= + | - | * | /

⟨argumento⟩ ::= ⟨dígito⟩$^+$

⟨dígito⟩ ::= 2 | 4 | 6 | 8 | 0

(a) Indique os símbolos terminais e os símbolos não terminais da gramática.

(b) Indique, justificando, quais das expressõess seguintes pertencem ou não pertencem ao conjunto de operações da linguagem definida pela gramática.

```
(1 + 2)
(2 + -)
(24 * 06)
2 * 0
(8 4 + )
(0 / 0)
```

6. Escreva uma gramática em notação BNF que gera frases constituídas pelos símbolos `c`, `a`, `r`, `d`. As frases da linguagem começam pelo símbolo `c`, o qual é seguido por uma ou mais ocorrências dos símbolos `a` e `d`, e terminam no símbolo `r`. Por exemplo `caaddaar` e `cdr` são frases da linguagem, `cd` e `cdrr` não o são.

7. Escreva uma gramática em notação BNF para definir os códigos postais de Portugal. Um código postal de Portugal corresponde a um número inteiro de 4 dígitos, o primeiro dos quais diferente de zero, seguido de um hífen ("-"), seguido de um inteiro de 3 dígitos. Por exemplo:

```
1049-001
2780-990
```

8. Considere a linguagem cujas frases são constituídas por um ou mais dos símbolos `A`, `B` e `C` (por qualquer ordem), sendo seguidas por um ou mais dos símbolos `1`, `2` e `3` (por qualquer ordem). Por exemplo, `A1`, `ABAAAAC333311` são frases da linguagem e `A` e `1A1` não o são.

   (a) Escreva uma gramática em notação BNF para a linguagem apresentada no exercício anterior.

   (b) Diga quais são os símbolos terminais e não terminais da sua linguagem.

Capítulo 2

Elementos Básicos de Programação

1. Escreva um programa em Python que pede ao utilizador que lhe forneça dois números (`x` e `y`) e que escreve o valor de `(x + 3 * y) * (x - y)`. O seu programa deve gerar uma interação como a seguinte:

   ```
   Vou pedir-lhe dois numeros
   Escreva o primeiro numero, x = 5
   Escreva o segundo numero, y = 6
   O valor de (x + 3 * y) * (x - y) e:  -23
   ```

2. Escreva um programa em Python que lê valores correspondentes a uma distância percorrida (em Km) e o tempo necessário para a percorrer (em minutos), e calcula a velocidade média em:

   (a) Km / h

   (b) m / s

3. Escreva um programa em Python que pede ao utilizador que lhe forneça um inteiro correspondente a um número de segundos e que calcula o número de dias correspondentes a esse número de segundos. O seu programa deve permitir a interação:

   ```
   Escreva um número de segundos
   ? 65432998
   O número de dias correspondentes é 757.3263657407407
   ```

4. Escreva um programa que lê um número inteiro correspondente a um certo número de segundos e que escreve o número de dias, horas, minutos e segundos correspondentes a esse número. Por exemplo,

```
Escreva o número de segundos 345678
dias: 4 horas: 0 mins: 1 segs: 18
```

5. Escreva um programa em Python que lê cinco números reais e calcula a sua média e o seu desvio padrão. A média, $\bar{x}$, e o desvio padrão, σ, de cinco números $x_1, \ldots x_5$ são dados respectivamente por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}$$

   A primeira linha do seu programa deve ser `from math import sqrt`. Esta instrução importa a função `sqrt` que calcula a raiz quadrada. Por exemplo, `sqrt(4)` tem o valor `2.0`.

6. Escreva um programa em Python que lê três números e que diz qual o maior dos números lidos.

7. Escreva um programa em Python que lê o número de horas, que um empregado trabalhou numa dada semana e o seu salário/hora e calcula o ordenado semanal tendo em conta as horas extraordinárias. O salário é calculado do seguinte modo: se o número de horas for menor que 40 então salário é dado pelo produto do número de horas pelo salário hora, em caso contrário recebe horas extraordinárias as quais são pagas a dobrar.

8. Escreva um programa em Python que pede ao utilizador que lhe forneça uma sucessão de inteiros correspondentes a valores em segundos e que calcula o número de dias correspondentes a cada um desses inteiros. O programa termina quando o utilizador fornece um número negativo. O seu programa deve possibilitar a seguinte interação:

```
Escreva um número de segundos
(um número negativo para terminar)
? 45
O número de dias correspondente é  0.0005208333333333333
Escreva um número de segundos
(um número negativo para terminar)
? 6654441
O número de dias correspondente é  77.01899305555555
Escreva um número de segundos
(um número negativo para terminar)
? -1
>>>
```

9. Escreva um programa em Python que lê uma sequência de dígitos, sendo cada um dos dígitos fornecido numa linha separada, e calcula o número inteiro composto por esses dígitos, pela ordem fornecida. Para terminar a sequência de dígitos é fornecido ao programa o inteiro -1. O seu programa deve permitir a interação:

```
Escreva um dígito
(-1 para terminar)
? 3
Escreva um dígito
(-1 para terminar)
? 2
Escreva um dígito
(-1 para terminar)
? 5
Escreva um dígito
(-1 para terminar)
? 7
Escreva um dígito
(-1 para terminar)
? -1
O número é: 3257
```

10. Escreva um programa em Python que lê um número inteiro positivo e calcula o número obtido do número lido que apenas contém os seus dígitos impares. Por exemplo,

```
Escreva um inteiro
? 785554
Resultado:  7555
```

11. Escreva um programa em Python que lê um número inteiro positivo e produz o número correspondente a inverter a ordem dos seus dígitos. Por exemplo,

```
Escreva um inteiro positivo
? 7633256
O número invertido é  6523367
```

12. Escreva um programa em Python que calcula o valor da soma.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

para um dado valor de x e de n. O seu programa deve ter em atenção que o i-ésimo termo da soma pode ser obtido do termo na posição $i-1$, multiplicando-o por x/i. O seu programa deve permitir a interação:

```
Qual o valor de x
? 2
Qual o valor de n
? 3
O valor da soma é 6.333333333333333
```

.

13. Escreva um programa em Python que pede ao utilizador que lhe forneça um número e que escreve a tabuada da multiplicação para esse número. O seu programa deve gerar uma interacção como a seguinte:

```
Escreva um numero para eu escrever a tabuada da multiplicação
Num -> 8
8 x 1=8
8 x 2 = 16
8 x 3 = 24
8 x 4 = 32
8 x 5 = 40
8 x 6 = 48
8 x 7 = 56
8 x 8 = 64
8 x 9 = 72
8 x 10 = 80
```

14. Escreva um programa que lê um inteiro e calcula a soma dos seus dígitos.

15. Escreva um programa que lê uma série de dígitos (terminando com -1) e calcula o inteiro que tem esses dígitos. Por exemplo, lendo os dígitos 1 5 4 5 8 -1, calcula o número inteiro 15458.

16. Escreva um programa que lê um número e cria uma capicua cuja primeira metade é o número lido. Por exemplo:

```
Escreva um número
-> 347
347743
```

17. Dado um conjunto de n inteiros representando notas de alunos, escreva um programa em Python para determinar quantos tiveram nota positiva. Modifique o seu programa de modo a também calcular qual a percentagem de notas positivas.

18. Escreva um programa que lê um número inteiro e determina quantas vezes aparecem dois zeros seguidos. Por exemplo:

```
Escreva um inteiro
? 98007640003
O numero tem  3  zeros seguidos
```

19. Escreva um programa em Python que lê uma quantia em Euros e calcula o número de notas de 50 €, 20 €, 10 €, 5 € e moedas de 2 €, 1 €, 50 cêntimos, 20 cêntimos, 10 cêntimos, 5 cêntimos, 2 cêntimos e 1 cêntimo, necessário para perfazer, essa quantia, utilizando sempre o máximo número de notas e moedas para cada quantia, da mais elevada, para a mais baixa.

20. Escreva um programa em Python escreve o seguinte:

```
1 x 8 + 1 = 9
12 x 8 + 2 = 98
123 x 8 + 3 = 987
1234 x 8 + 4 = 9876
12345 x 8 + 5 = 98765
123456 x 8 + 6 = 987654
1234567 x 8 + 7 = 9876543
12345678 x 8 + 8 = 98765432
123456789 x 8 + 9 = 987654321
```

Os valores do primeiro termo da multiplicação e o resultado devem ser calculados pelo seu programa.

Capítulo 3

Funções

1. Escreva a função `cinco` que tem o valor `True` se o seu argumento for 5 e `False` no caso contrário. Não pode utilizar uma instrução `if`.

2. Defina a função `horas_dias` que recebe um inteiro correspondente a um certo número de horas e que tem como valor um número real que traduz o número de dias correspondentes ao seu argumento. Por exemplo

   ```
   >>> horas_dias(48)
   2.0
   >>> horas_dias(10)
   0.4166666666666667
   ```

3. Defina a função `area_circulo` que recebe o valor do raio de um círculo e tem como valor a área do círculo. Note-se que a área do círculo cujo raio é r é dada por πr^2. Use o valor 3.14 para o valor de π.

4. Utilizando a função `area_circulo` do exercício anterior, escreva a função `area_coroa` que recebe dois argumentos, `r1` e `r2`, e tem como valor a área da coroa circular de raio interior `r1` e raio exterior `r2`. A sua função deverá gerar um erro de valor (`ValueError`) se o valor de `r1` for maior que o valor de `r2`.

5. Escreva a função `bissexto` que recebe um número inteiro correspondente a um ano e que devolve `True` se o ano for bissexto e `False` em caso contrário. Um ano é bissexto se for divisível por 4 e não for divisível por 100, a não ser que seja também divisível por 400. Por exemplo, 1984 é bissexto, 1100 não é, e 2000 é bissexto. por exemplo:

   ```
   >>> bissexto(1984)
   True
   >>> bissexto(1985)
   False
   ```

```
>>> bissexto(2000)
True
```

6. Defina a função `dias_mes` que recebe uma cadeia de caracteres, correspondentes às 3 primeiras letras (minúsculas) do nome de um mês e um ano, e tem como valor um número inteiro correspondendo ao número de dias desse mês. No caso de uma cadeia de caracteres inválida, a sua função deverá gerar um erro de valor (`ValueError`). Use a função `bissexto` do exercício anterior. A sua função deve permitir gerar a interação:

```
>>> dias_mes('jan', 2017)
31
>>> dias_mes('fev', 2016)
29
>>> dias_mes('MAR', 2017)
ValueError: Mes não existe
```

7. Quando se efectua um depósito a prazo de uma quantia q com uma taxa de juros j $(0 < j < 1)$, o valor do depósito ao fim de n anos é dado por:

$$q \times (1 + j)^n$$

   (a) Escreva a função `valor` que recebe como argumentos um número inteiro positivo q correspondente à quantia depositada, um real j no intervalo $]0, 1[$ correspondente à taxa de juros e um inteiro positivo n correspondente ao número de anos que o dinheiro está a render, e, verificando a correcção dos argumentos, devolve um real correspondente ao valor do depósito ao fim desse número de anos. Caso os argumentos não estejam correctos, deverá gerar um erro. Por exemplo,

```
>>> valor(100, 0.03, 4)
112.55088100000002
```

   (b) Usando a função da alínea anterior, escreva uma função que calcula ao fim de quantos anos consegue duplicar o seu dinheiro. Não é necessário validar os dados de entrada. Por exemplo,

```
>>> duplicar(100, 0.03)
24
```

8. Um número *primo* é um número inteiro maior do que 1 que apenas é divisível por 1 e por si próprio. Por exemplo, 5 é primo porque apenas é divisível por si próprio e por um, ao passo que 6 não é primo pois é divisível por 1, 2, 3, e 6. Os números primos têm um papel muito importante tanto em Matemática como em Informática. Um método simples, mas pouco eficiente, para determinar se um número, n, é primo consiste em testar se n é múltiplo de algum número entre 2 e $\sqrt{n}$. Usando este processo, escreva a função `primo` que recebe um número inteiro e tem o valor `True` apenas se o seu argumento for primo.

9. Um número n é o *n-ésimo primo* se for primo e existirem $n-1$ números primos menores que ele. Usando a função `primo` do exercício anterior, escreva a função `n_esimo_primo` que recebe como argumento um número inteiro, `n`, e devolve o `n`-ésimo número primo.

10. A *congruência de Zeller* é um algoritmo inventado pelo matemático alemão Julius Christian Zeller (1822–1899) para calcular o dia da semana para qualquer dia do calendário. Para o nosso calendário, o *calendário Gregoriano*, a congruência de Zeller é dada por:

$$h = \left(q + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + K + \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{J}{4} \right\rfloor - 2J\right) \mod 7$$

em que h é o dia da semana (0 = Sábado, 1 = Domingo, ...), q é o dia do mês, m é o mês (3 = março, 4 = abril, ..., 14 = fevereiro) – os meses de janeiro e fevereiro são contados comos os meses 13 e 14 do ano anterior, K é o ano do século ($ano \mod 100$), J é o século ($\lfloor ano/100 \rfloor$)[1]. Esta expressão utiliza a função matemática, *chão*, denotada por $\lfloor x \rfloor$, a qual converte um número real x no maior número inteiro menor ou igual a x. A definição formal desta função é $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$. A expressão utiliza também a função módulo, em que $a \bmod b$ representa o resto da divisão de a por b.

Escreva uma função em Python, chamada `dia_da_semana`, que recebe três inteiros correspondentes a um dia, um mês e um ano e que devolve o dia da semana em que calha essa data. A sua função deve utilizar outras funções auxiliares a definir por si. Por exemplo,

```
>>> dia_da_semana(18, 1, 2014)
'sabado'
```

11. Considere qualquer inteiro de 3 algarismos, desde que a diferença entre o seu primeiro e último dígito seja superior a 1. Seja este número n. Inverta os algarismos de n, obtendo n_i. Subtraia o maior do menor, obtendo n_s, ou seja $n_s = \mid n - n_i \mid$. Inverta os algarismos de n_s, obtendo n_{s_i}. Pode verificar que $n_s + n_{s_i} = 1089$. Por exemplo, suponhamos que $n = 246$, então $n_i = 642$, $n_s = 396$, $n_{s_i} = 693$ e $n_s + n_{s_i} = 396 + 693 = 1089$.

    (a) Escreva uma função que traduza este mistério. A sua função deve garantir que o argumento é correto. Por exemplo,

    ```
    >>> misterio(246)
    1089
    >>> misterio(131)
    'Condições não verificadas'
    ```

    (b) Explique este mistério.

[1] Este século é baseado no século zero, nesta definição, os séculos dos anos 1995 e 2000 são 19 e 20, respetivamente. Isto não deve confundido com a numeração comum do século que indica 20 para ambos os casos.

Capítulo 4

Tuplos e Ciclos Contados

1. Considere as seguintes instruções em Python:

   ```
   soma = 0
   i = 20
   while i > 0:
       soma = soma + 1
       i = i - 2
   print('Soma =', soma)
   ```

   Escreva instruções equivalentes utilizando um ciclo `for`.

2. Escreva a função `explode` que recebe um número inteiro positivo, verificando a correção do seu argumento, e devolve o tuplo contendo os dígitos desse número, pela ordem em que aparecem no número. Por exemplo

   ```
   >>> explode(34500)
   (3, 4, 5, 0, 0)
   >>> explode(3.5)
   ValueError: explode: argumento não inteiro
   ```

3. Escreva a função `implode` que recebe um tuplo contendo algarismos, verificando a correção do seu argumento, e devolve o número inteiro contendo os algarismos do tuplo, pela ordem em que aparecem. Por exemplo

   ```
   >>> implode((3, 4, 0, 0, 4))
   34004
   >>> implode((2, 'a', 5))
   ValueError: implode: elemento não inteiro
   ```

   Escreva duas versões da sua função, uma utilizando um ciclo `while` e outra utilizando um ciclo `for`.

4. Escreva a função `filtra_pares` que recebe um tuplo contendo algarismos, verificando a correção do seu argumento, e devolve o tuplo contendo apenas os algarismos pares. Por exemplo

```
>>> filtra_pares((2, 5, 6, 7, 9, 1, 8, 8))
(2, 6, 8, 8)
```

5. Recorrendo às funções `explode`, `implode` e `filtra_pares`, defina a função `algarismos_pares` que recebe um inteiro e devolve o inteiro que apenas contém os algarismos pares do número original. Por exemplo,

```
algarismos_pares(6643399766641)
6646664
```

6. Escreva a função `num_para_seq_cod` que recebe um número inteiro positivo maior do que zero e que devolve um tuplo contendo os algarismos codificados desse número do seguinte modo: (a) cada algarismo par é substituído pelo número par seguinte, entendendo-se que o número par seguinte a 8 é o 0; (b) cada algarismo ímpar é substituído pelo número ímpar anterior, entendendo-se que o número ímpar anterior a 1 é o 9. Por exemplo,

```
>>> num_para_seq_cod(1234567890)
(9, 4, 1, 6, 3, 8, 5, 0, 7, 2)
```

7. Duas palavras de igual comprimento dizem-se "amigas" se o número de posições em que os respetivos caracteres diferem for inferior a 10%. Escreva a função `amigas` que recebe como argumentos duas cadeias de caracteres e devolve verdadeiro se os seus argumentos corresponderem a palavras amigas e falso em caso contrário. Por exemplo:

```
amigas('amigas', 'amigas')
True
amigas('amigas', 'asigos')
False
```

8. Defina a função, `junta_ordenados`, que recebe dois tuplos contendo inteiros, ordenados por ordem crescente. e devolve um tuplo também ordenado com os elementos dos dois tuplos. Por exemplo,

```
>>> junta_ordenados((2, 34, 200, 210), (1, 23))
(1, 2, 23, 34, 200, 210)
```

9. Considere a gramática em notação BNF:

   ⟨idt⟩ ::= ⟨letras⟩ ⟨numeros⟩

⟨letras⟩ ::= ⟨letra⟩ |
⟨letra⟩ ⟨letras⟩

⟨numeros⟩ ::= ⟨num⟩ |
⟨num⟩ ⟨numeros⟩

⟨letra⟩ ::= `A` | `B` | `C` | `D`

⟨num⟩ ::= `1` | `2` | `3` | `4`

Escreva a função `reconhece`, que recebe como argumento uma cadeia de carateres e devolve *verdadeiro* se o seu argumento corresponde a uma frase da linguagem definida pela gramática e *falso* em caso contrário. Por exemplo,

```
>>> reconhece('A1')
True
>>> reconhece('ABBBBCDDDD23311')
True
>>> reconhece('ABC12C')
False
```

10. Um método básico para codificar um texto corresponde a isolar os caracteres nas posições pares para um lado e os caracteres nas posições ímpares para outro, juntando depois as duas partes anteriormente obtidas. Por exemplo, o texto `abcde` é codificado por `acebd`.

    (a) Defina uma função que codifica uma cadeia de caracteres de acordo com o algoritmo apresentado. Não é necessário validar os dados de entrada. Por exemplo,

    ```
    >>> codifica('abcde')
    'acebd'
    ```

    (b) Defina uma função que descodifica uma cadeia de caracteres de acordo com o algoritmo apresentado. Não é necessário validar os dados de entrada. Por exemplo,

    ```
    >>> descodifica('acebd')
    'abcde'
    ```

Capítulo 5

Listas

1. Escreva a função de dois argumentos, `lista_codigos`, que recebe uma cadeia de caracteres e que devolve a lista contendo os códigos "Unicode" de cada um dos caracteres da lista. Por exemplo:

   ```
   >>> lista_codigos('bom dia')
   [98, 111, 109, 32, 100, 105, 97]
   ```

2. Escreva a função de dois argumentos, `remove_multiplos`, que recebe uma lista de inteiros e um inteiro e que devolve a lista que resulta de remover todos os múltiplos do segundo argumento da lista original. Por exemplo:

   ```
   >>> remove_multiplos([2, 3, 5, 9, 12, 33, 34, 45], 3)
   [2, 5, 34]
   ```

3. Escreva a função, `soma_cumulativa`, que recebe uma lista de números e que devolve uma lista que contém a soma cumulativa da lista recebida, ou seja, o elemento na posição `i` da lista devolvida contém a soma de todos os elementos da lista original nas posições de `0` a `i`. Não é necessário validar os dados de entrada. Por exemplo,

   ```
   >>> soma_cumulativa([1, 2, 3, 4, 5])
   [1, 3, 6, 10, 15]
   ```

4. Uma *matriz* é uma tabela bidimensional em que os seus elementos são referenciados pela linha e pela coluna em que se encontram. Uma matriz pode ser representada como uma lista cujos elementos são listas, cada uma destas sub-listas representa uma linha. Com base nesta representação, escreva a função `elemento_matriz` que recebe três argumentos, uma matriz, uma linha e uma coluna e que devolve o elemento da matriz que se encontra na linha e coluna indicadas. A sua função deve permitir a seguinte interação:

```
>>> m = [[1, 2, 3], [4, 5, 6]]
>>> elemento_matriz(m, 0, 0)
1
>>> elemento_matriz(m, 0, 3)
ValueError: elemento_matriz: indice invalido, coluna 3
```

5. Considere uma matriz como definida no exercício anterior. Escreva uma função em Python que recebe uma matriz e que a escreve sob a forma

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

6. Considere o conceito de matriz. Escreva a função `soma_mat` que recebe como argumentos duas matrizes e devolve uma matriz correspondente à soma das matrizes que são seus argumentos. Sendo a e b as matrizes a somar, os elementos da matriz produto são dados por

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

   Por exemplo:

```
m1 = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]
m2 = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]
escreve_matriz(soma_mat(m1, m2))
2  4  6
8  10  12
14  16  18
```

7. Considere o conceito de matriz. Escreva a função `multiplica_mat` que recebe como argumentos duas matrizes e devolve uma matriz correspondente ao produto das matrizes que são seus argumentos. Sendo a e b as matrizes a multiplicar, os elementos da matriz produto são dados por

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

8. A sequência de Racamán,

$$0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 2,\ 7,\ 13,\ 20,\ 12,\ 21,\ 11,\ 22,\ 10,\ 23,\ 9,\ 24,\ \ldots$$

   é uma sequência de números inteiros não negativos, definida do seguinte modo: (1) o primeiro termo da sequência é zero; (2) para calcular o n-ésimo termo, verifica-se se o termo anterior é maior do que n e se o resultado de subtrair n ao termo anterior ainda não apareceu na sequência, neste caso o n-ésimo termo é dado pela subtração entre o $(n-1)$-ésimo termo e

n; em caso contrário o n-ésimo termo é dado pela soma do $(n-1)$-ésimo termo com n. Ou seja,

$$r(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ r(n-1) - n & \text{se } r(n-1) > n \ \wedge \ (r(n-1) - n) \notin \{r(i) : i < n\} \\ r(n-1) + n & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Escreva uma função que recebe um inteiro positivo, n, e devolve uma lista contendo os n primeiros elementos da sequência de Racamán. Por exemplo:

```
>>> seq_racaman(15)
[0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9]
```

9. Uma chave do euromilhões é constituída por cinco inteiros ordenados, entre 1 e 50 e **sem repetições** e por dois números **diferentes**, também ordenados, entre 1 e 12. Escreva uma função sem argumentos que devolve aleatoriamente uma lista contendo duas listas, cada uma delas contendo os constituintes de uma chave do euromilhões. Para a geração de números aleatórios utilize a função `random()` , existente na biblioteca `random`, que devolve aleatoriamente um real no intervalo [0, 1[. Por exemplo,

```
>>> euromilhoes()
[[8, 9, 30, 32, 37], [5, 6]]
```

Capítulo 6

Funções Revisitadas

6.1 Funções recursivas

Nota: Nos exercícios desta aula não pode utilizar a atribuição nem os ciclos `while` e `for`.

1. Escreva a função recursiva `apenas_digitos_impares` que recebe um número inteiro não negativo n, e devolve um inteiro composto apenas pelos dígitos ímpares de n. Se n não tiver dígitos ímpares, a função deve devolver zero. Não pode usar cadeias de caracteres. Por exemplo,

   ```
   >>> apenas_digitos_impares(468)
   0
   >>> apenas_digitos_impares(12426374856)
   1375
   ```

2. Escreva a função recursiva `junta_ordenadas` que recebe como argumentos duas listas ordenadas por ordem crescente e devolve uma lista também ordenada com os elementos das duas listas. Não é necessário validar os argumentos da sua função. Por exemplo,

   ```
   junta_ordenadas([2, 5, 90], [3, 5, 6, 12])
   [2, 3, 5, 5, 6, 12, 90]
   ```

3. Escreva a função recursiva `sublistas` que recebe uma lista, e tem como valor o número total de sublistas que esta contém. Por exemplo,

   ```
   >>> sublistas([[1], 2, [3]])
   2
   >>> sublistas([[[[[1]]]]])
   4
   >>>sublistas(['a', [2, 3, [[[1]], 6, 7], 'b']])
   4
   ```

4. Escreva a função recursiva `soma_n_vezes` que recebe três números inteiros, a, b e n, e que devolve o valor de somar n vezes a a b, ou seja, $b + a + a + \ldots + a$, n vezes. A sua função não pode usar a operação de multiplicação. Por exemplo,

```
>>> soma_n_vezes(3, 2, 5)
17
```

5. Escreva a função recursiva `soma_els_atomicos` que recebe como argumento um tuplo, cujos elementos podem ser outros tuplos, e que devolve a soma dos elementos correspondentes a tipos elementares de dados que existem no tuplo original. Não é necessário verificar os dados de entrada. Por exemplo,

```
>>> soma_els_atomicos((3, ((((((6, (7, ))), ), ), ), ), 2, 1))
19
>>> soma_els_atomicos(((((),),),))
0
```

6. Escreva a função recursiva `inverte` que recebe uma lista e devolve a lista invertida. Por exemplo,

```
>>> inverte([3, 4, 7, 9])
[9, 7, 4, 3]
```

7. Suponha que a operação `in` não existia em Python. Escreva a função recursiva `pertence` que recebe uma lista e um elemento e devolve `True` se o elemento pertence à lista e `False` em caso contrário. Por exemplo,

```
>>> pertence([3, 4, 5], 2)
False
>>> pertence([3, 4, 5], 5)
True
```

8. Escreva a função recursiva `subtrai` que recebe duas listas e devolve a lista que corresponde a remover da primeira lista todos os elementos que pertencem à segunda lista. Por exemplo,

```
subtrai([2, 3, 4, 5], [2, 3])
[4, 5]
subtrai([2, 3, 4, 5], [6, 7])
[2, 3, 4, 5]
```

9. Escreva a função recursiva `parte` que recebe uma lista de números e um número e que devolve uma lista de duas listas, a primeira lista contém os elementos da lista original menores que o número dado (pela mesma

ordem) e a segunda lista contém os elementos da lista original maiores ou iguais que o número dado (pela mesma ordem). Não é necessário verificar a coreção dos dados de entrada. **Sugestão**: Use uma função auxiliar. Por exemplo,

```
>>> parte([3, 5, 1, 4, 5, 8, 9], 4)
[[3, 1], [5, 4, 5, 8, 9]]
```

10. Escreva a função recursiva `maior` que recebe uma lista de números e devolve o maior número da lista. **Sugestão**: Use uma função auxiliar. Por exemplo,

```
>>> maior([5, 3, 8, 1, 9, 2])
9
```

6.2 Funções de ordem superior

1. A função `somatorio`

   ```
   def somatorio(l_inf, l_sup, calc_termo, prox):
       soma = 0
       while l_inf <= l_sup:
           soma = soma + calc_termo(l_inf)
           l_inf = prox(l_inf)
       return soma
   ```

   é apenas a mais simples de um vasto número de abstracções semelhantes que podem ser capturadas por funções de ordem superior. Por exemplo, podemos usar a função `somatorio` para somar os quadrados dos múltiplos de 3 entre 9 e 21:

   ```
   >>> somatorio(9, 21, lambda x : x * x, lambda x : x + 3)
   1215
   ```

   Diga o que fazem as seguintes utilizações da função `somatorio`:

   (a) `somatorio(4, 500, lambda x:  x, lambda x:  x + 1)`

   (b) `somatorio(5, 500, lambda x:  x * x, lambda x:  x + 5)`

   (c)
   ```
   somatorio(1,
             5,
             lambda x: somatorio(1,
                                 x,
                                 lambda x: x,
                                 lambda x: x+1),
             lambda x: x+1)
   ```

2. (a) Defina a função `piatorio` que calcula o produto dos termos de uma função entre dois limites especificados.

(b) Mostre como definir o `factorial` em termos da utilização da função `piatorio`.

3. Considere a função `soma_fn` que recebe um número inteiro positivo, `n`, e uma função de um argumento inteiro, `fn`, e devolve a soma de todos os valores da função entre `1` e `n`. A função `soma_fn` não verifica a correção do seu argumento nem usa funcionais sobre listas. Por exemplo,

```
>>> soma_fn(4, lambda x: x * x)
30
>>> soma_fn(4, lambda x: x + 1)
14
```

(a) Escreva a função `soma_fn` usando um ciclo `for`.

(b) Escreva a função `soma_fn` usando recursão.

4. Usando recursão, defina os seguintes funcionais sobre listas:

(a) `filtra(lst, tst)` que devolve a lista obtida a partir da lista `lst` que apenas contém os elementos que satisfazem o predicado de um argumento `tst`. Por exemplo,

```
>>> filtra([1, 2, 3, 4, 5], lambda x : x % 2 == 0)
[2, 4]
```

(b) `transforma(lst, fn)` que devolve a lista obtida a partir da lista `lst` cujos elementos correspondem à aplicação da função de um argumento `fn` aos elementos de `lst`. Por exemplo,

```
>>> transforma([1, 2, 3, 4], lambda x : x ** 3)
[1, 8, 27, 64]
```

(c) `acumula(lst, fn)` que devolve o valor obtido da aplicação da função de dois argumentos `fn` a todos os elementos da lista `lst`. Por exemplo,

```
>>> acumula([1, 2, 3, 4], lambda x, y : x + y)
10
```

5. Usando os funcionais sobre listas da pergunta anterior, escreva a função `soma_quadrados_impares`, que recebe uma lista de inteiros e devolve a soma dos quadrados dos seus elementos ímpares. A sua função deve conter apenas uma instrução, a instrução `return`. Não é necessário validar os dados de entrada. Por exemplo:

```
soma_quadrados_impares([1, 2, 3, 4, 5, 6])
35
```

6. Considere a seguinte definição do predicado `eh_primo` que tem o valor verdadeiro apenas se o seu argumento é um número primo:

```
def eh_primo(n):
    if n == 1:
        return False
    else:
        for i in range(2, n):
            if n % i == 0:
                return False
        return True
```

Escreva a função de ordem superior, `nao_primos` que recebe um número inteiro positivo, `n`, e devolve todos os números inferiores ou iguais a `n` que não são primos. A sua função deve conter apenas uma instrução, a instrução `return`. Por exemplo,

```
nao_primos(10)
[1, 4, 6, 8, 9, 10]
```

7. Considere a seguinte função que recebe como argumentos um número natural, `n`, e um predicado de um argumento, `p`:

```
def misterio(num, p):
    if num == 0:
        return 0
    elif p(num % 10):
        return num % 10 + 10 * misterio(num // 10, p)
    else:
        return misterio(num // 10, p)
```

   (a) Explique o que faz esta função.

   (b) Utilize a função `misterio` para escrever a função `filtra_pares` que recebe um número inteiro e devolve o número obtido a partir dele que apenas contém dígitos pares. A sua função deve conter apenas uma instrução, a instrução `return`. Por exemplo,

```
>>> filtra_pares(5467829)
4682
```

8. Usando funcionais sobre listas, escreva a função `lista_digitos`, que recebe um inteiro positivo `n` e devolve a lista cujos elementos são os dígitos de `n`. A sua função deve conter apenas uma instrução, a instrução `return`. SUGESTÃO: transforme o número numa cadeia de caracteres. Por exemplo:

```
>>> lista_digitos(123)
    [1, 2, 3]
```

9. Usando a função `lista_digitos` do exercício 8 e funcionais sobre listas, escreva a função `produto_digitos`, que recebe um inteiro positivo, `n`, e

um predicado de um argumento, `pred`, e devolve o produto dos dígitos de `n` que satisfazem o predicado `pred`. A sua função deve conter apenas uma instrução, a instrução `return`. Por exemplo:

```
>>> produto_digitos(12345, lambda x : x > 3)
    20
```

10. Usando a função `lista_digitos` do exercício 8 e funcionais sobre listas, escreva a função `apenas_digitos_impares`, que recebe um inteiro positivo, `n`, e devolve o inteiro constituído pelos dígitos ímpares de `n`. A sua função deve conter apenas uma instrução, a instrução `return`. Por exemplo:

```
>>> apenas_digitos_impares(12345)
    135
```

Capítulo 7

Recursão e Iteração

1. Considere a seguinte função:

```
def misterio(x, n):
      if n == 0:
          return 0
      else:
          return x * n + misterio(x, n - 1)
```

   (a) Explique o que é calculado pela função `misterio`.

   (b) Mostre a evolução do processo gerado pela avaliação de `misterio(2, 3)`.

   (c) De que tipo é o processo gerado pela função apresentada? Justifique.

   (d) Se a função apresentada for recursiva de cauda, defina uma nova função recursiva por transformação da primeira de modo a deixar operações adiadas; se for uma função recursiva com operações adiadas, defina uma função recursiva de cauda.

2. Suponha que as operações de multiplicação (`*`) e potência (`**`) não existiam em Python e que pretende calcular o quadrado de um número natural. O quadrado de um número natural pode ser calculado como a soma de todos os números ímpares inferiores ao dobro do número

$$n^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

   Note que o dobro de um número também não pode ser calculado recorrendo à operação de multiplicação. Escreva uma função que calcula o quadrado de um número natural utilizando o método descrito.

   (a) Usando recursão com operações adiadas.

   (b) Usando recursão de cauda.

(c) Usando um processo iterativo.

3. Escreva a função `numero_digitos` que recebe um número inteiro positivo `n`, e devolve o número de dígitos de `n`. As suas funções não podem user cadeias de caracteres. As suas funções devem validar a correção do argumento. Por exemplo,

```
>>> numero_digitos(9)
1
>>> numero_digitos(1012)
4
```

   (a) Usando recursão com operações adiadas.

   (b) Usando recursão de cauda.

   (c) Usando um processo iterativo.

4. Um número é uma capicua se se lê igualmente da esquerda para a direita e vice-versa. Escreva a função recursiva de cauda `eh_capicua`, que recebe um número inteiro positivo n, e devolve verdadeiro se o número for uma capicua e falso caso contrário. A sua função deve utilizar a função `numero_digitos` do exercício anterior. Por exemplo,

```
>>> eh_capicua(12321)
True
>>> eh_capicua(1221)
True
>>> eh_capicua(123210)
False
```

5. O espelho de um número inteiro positivo é o resultado de inverter a ordem de todos os seus algarismos. Escreva a função recursiva de cauda `espelho`, que recebe um número inteiro positivo `n`, não divisível por 10, e devolve o seu espelho. Por exemplo,

```
>>> espelho(391)
193
>>> espelho(45679)
97654
```

6. Considere a função g, definida para inteiros não negativos do seguinte modo:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ n - g(g(n-1)) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

   (a) Escreva uma função recursiva em Python para calcular o valor de $g(n)$.

(b) Siga o processo gerado por `g(3)`, indicando todos os cálculos efectuados.

(c) Que tipo de processo é gerado por esta função?

7. Escreva a função recursiva, `calc_soma`, para calcular o valor da soma.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

para um dado valor de x e de n. A sua função deve ter em atenção que o i-ésimo termo da soma pode ser obtido do termo na posição $i - 1$, multiplicando-o por x/i.

8. Escreva a função recursiva, `maior_inteiro`, que recebe um inteiro positivo, `limite`, e que devolve o maior inteiro (n) tal que $1 + 2 + \ldots + n \leq$ `limite`. Por exemplo,

```
>>> maior_inteiro(6)
3
>>> maior_inteiro(20)
5
```

9. Um número d é divisor de n se o resto da divisão de n por d for 0. Usando recursão de cauda, escreva a função `soma_divisores` que recebe um número inteiro positivo `n`, e que devolve a soma de todos os divisores de `n`.

10. Um número diz-se perfeito se for igual à soma dos seus divisores (não contando o próprio número). Por exemplo, 6 é perfeito porque $1+2+3 = 6$.

    (a) Usando recursão de cauda, escreva a função `perfeito` que recebe como argumento um número inteiro e tem o valor `True` se o seu argumento for um número perfeito e `False` em caso contrário. Não é necessário validar os dados de entrada.

    (b) Usando recursão com operações adiadas e a função `perfeito` da alínea anterior, escreva a função `perfeitos_entre` que recebe dois inteiros positivos e devolve a lista dos números perfeitos entre os seus argumentos, incluindo os seus argumentos. Por exemplo:

```
>>> perfeitos_entre(6, 30)
[6, 28]
```

Capítulo 8

Dicionários

1. Considere a seguinte lista de dicionários na qual os significados dos campos são óbvios:

   ```
   l_nomes = [{'nome':{'nomep':'Jose', 'apelido':'Silva'},
   'morada':{'rua':'R. dos douradores', 'num': 34, 'andar':'6 Esq',
   'localidade':'Lisboa', 'estado':'', 'cp':'1100-032',
   'pais':'Portugal'}}, {'nome':{'nomep':'John', 'apelido':'Doe'},
   'morada':{'rua':'West Hazeltine Ave.', 'num': 57, 'andar':'',
   'localidade':'Kenmore', 'estado':'NY', 'cp':'14217', 'pais':'USA'}}]
   ```

   Diga quais são os valores dos seguintes nomes:

   (a) `l_nomes[1]`

   (b) `l_nomes[1]['nome']`

   (c) `l_nomes[1]['nome']['apelido']`

   (d) `l_nomes[1]['nome']['apelido'][0]`

2. Escreva a função `agrupa_por_chave` que recebe uma lista de pares, contendo uma chave e uma valor, `(k, v)`, representados por tuplos de dois elementos, devolve um dicionário que a cada chave `k` associa a lista com os valores `v` para essa chave encontrados na lista que é seu argumento. Por exemplo:

   ```
   >>> agrupa_por_chave([('a', 8), ('b', 9), ('a', 3)])
   {'a': [8, 3], 'b': [9]}
   ```

3. Uma carta de jogar é caracterizada por um naipe (espadas, copas, ouros e paus) e por um valor (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K). Uma carta pode ser representada por um dicionário com duas chaves, `'np'` e `'vlr'`, sendo um conjunto de cartas representado por uma lista de cartas.

(a) Escreva uma função em Python que devolve uma lista contendo todas as cartas de um baralho. Por exemplo,

```
>>> baralho()
[{'np': 'esp', 'vlr': 'A'}, {'np': 'esp', 'vlr': '2'},
{'np': 'esp', 'vlr': '3'}, {'np': 'esp', 'vlr': '4'},
{'np': 'esp', 'vlr': '5'}, {'np': 'esp', 'vlr': '6'},
{'np': 'esp', 'vlr': '7'}, {'np': 'esp', 'vlr': '8'},
{'np': 'esp', 'vlr': '9'}, {'np': 'esp', 'vlr': '10'},
{'np': 'esp', 'vlr': 'J'}, {'np': 'esp', 'vlr': 'Q'},
{'np': 'esp', 'vlr': 'K'}, {'np': 'copas', 'vlr': 'A'},
{'np': 'copas', 'vlr': '2'}, {'np': 'copas', 'vlr': '3'},
... }
```

(b) Recorrendo à função `random()`, a qual produz um número aleatório no intervalo $[0, 1[$, escreva a função `baralha`, que recebe uma lista correspondente a um baralho de cartas e baralha aleatoriamente essas cartas, devolvendo a lista que corresponde às cartas baralhadas. SUGESTÃO: percorra sucessivamente as cartas do baralho trocando cada uma delas por uma outra carta seleccionada aleatoriamente. Por exemplo,

```
>>> baralha(baralho())
[{'np': 'esp', 'vlr': '3'}, {'np': 'esp', 'vlr': '9'},
{'np': 'copas', 'vlr': '6'}, {'np': 'esp', 'vlr': 'Q'},
{'np': 'esp', 'vlr': '7'}, {'np': 'copas', 'vlr': '8'},
{'np': 'copas', 'vlr': 'J'}, {'np': 'esp', 'vlr': 'K'},
... ]
```

(c) Escreva uma função em Python que recebe um baralho de cartas e as distribui por quatro jogadores, devolvendo uma lista que contém as cartas de cada jogador. O seu programa deve garantir que o número de cartas a distribuir é um múltiplo de 4. Por exemplo,

```
distribui(baralha(baralho()))
[[{'np': 'ouros', 'vlr': 'A'}, {'np': 'copas', 'vlr': '7'},
{'np': 'paus', 'vlr': 'A'}, {'np': 'esp', 'vlr': 'J'},
{'np': 'paus', 'vlr': '6'}, {'np': 'esp', 'vlr': '10'},
{'np': 'copas', 'vlr': '5'}, {'np': 'esp', 'vlr': '6'},
{'np': 'copas', 'vlr': '8'}, {'np': 'esp', 'vlr': '3'},
 {'np': 'ouros', 'vlr': '5'}, {'np': 'ouros', 'vlr': '8'},
{'np': 'copas', 'vlr': 'K'}],
[{'np': 'paus', 'vlr': '2'}, {'np': 'esp', 'vlr': '2'},
...]]
```

4. Considere um dicionário que contém as notas finais dos alunos de FP. O dicionário tem como chave a nota, um número natural entre 0 e 20. Para cada chave do dicionário, o seu valor é uma lista com os números dos alunos com essa nota. Por exemplo, o dicionário poderá ser:

```
notas_dict = {1 : [46592, 49212, 90300, 59312], \
              15 : [52592, 59212], 20 : [58323]}
```

Escreva a função `resumo_FP` que recebe um dicionário com as notas finais dos alunos de FP e devolve um tuplo com dois elementos contendo a média dos alunos aprovados e o número de alunos reprovados. Por exemplo:

```
>>> resumo_FP(notas_dict)
(16.666666666666668, 4)
```

5. Escreva a função, `metabolismo`, que recebe um dicionário cujas chaves correspondem a nomes de pessoas e cujos valores correspondem a tuplos, contendo o género, a idade, a altura e o peso dessa pessoa. A sua função devolve um dicionário que associa a cada pessoa o seu índice de metabolismo basal. Sendo s o género, i a idade, h a altura e p o peso de uma pessoa, o metabolismo basal, m, é definido do seguinte modo:

$$m(s,i,h,p) = \begin{cases} 66 + 6.3 \times p + 12.9 \times h + 6.8 \times i & \text{se } s = M \\ 655 + 4.3 \times p + 4.7 \times h + 4.7 \times i & \text{se } s = F \end{cases}$$

Não é necessário validar os dados de entrada. Por exemplo:

```
>>> d = {'Maria' : ('F', 34, 1.65, 64), 'Pedro': ('M', 34, 1.65, 64),
         'Ana': ('F', 54, 1.65, 120), 'Hugo': ('M', 12, 1.82, 75)}
>>> metabolismo(d)
{'Ana': 1458.955, 'Hugo': 675.078, 'Maria': 1109.755, 'Pedro': 736.685}
```

6. Escreva uma função que recebe uma cadeia de caracteres correspondente a um texto e que produz uma lista de todas as palavras que este contém, juntamente com o número de vezes que essa palavra aparece no texto. SUGESTÃO: guarde cada palavra como uma entrada num dicionário contendo o número de vezes que esta apareceu no texto. por exemplo,

```
>>> cc = 'a aranha arranha a ra a ra arranha a aranha ' \
     + 'nem a aranha arranha a ra nem a ra arranha a aranha'
>>>conta_palavras(cc)
{'aranha': 4, 'arranha': 4, 'ra': 4, 'a': 8, 'nem': 2}
```

7. Usando a ordenação por borbulhamento, escreva a função `mostra_ordenado` que apresenta por ordem alfabética os resultados produzidos pelo exercício anterior. Por exemplo,

```
>>> mostra_ordenado(conta_palavras(cc))
a 8
aranha 4
arranha 4
nem 2
ra 4
```

8. Uma matriz é dita *esparsa* (ou rarefeita) quando a maior parte dos seus elementos é zero. As matrizes esparsas aparecem em grande número de aplicações em engenharia. Uma matriz esparsa pode ser representada por um dicionário cujas chaves correspondem a tuplos que indicam a posição de um elemento na matriz (linha e coluna) e cujo valor é o elemento nessa posição da matriz. Por exemplo, `{(3, 2): 20, (150, 2): 6, (300, 10): 20}` corresponde a uma matriz esparsa com apenas três elementos diferentes de zero.

   (a) Escreva uma função em Python que recebe uma matriz esparsa e a escreve sob a forma, na qual os elementos cujo valor é zero são explicitados.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

```
>>> escreve_esparsa({(1,5): 4, (2, 3): 9, (4, 1): 1})
0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  4
0  0  0  9  0  0
0  0  0  0  0  0
0  1  0  0  0  0
```

   (b) Escreva uma função que recebe duas matrizes esparsas e devolve a sua soma. Por exemplo,

```
e1 = {(1,5): 4, (2, 3): 9, (4, 1): 1}
e2 = {(1, 6): 2, (4, 1): 2, (5,4): 2}
>>> escreve_esparsa(soma_esparsa(e1, e2))
0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  4  2
0  0  0  9  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0
0  3  0  0  0  0  0
0  0  0  0  2  0  0
```

9. Suponha que `bib` é uma lista cujos elementos são dicionários e que contém a informação sobre os livros existentes numa biblioteca. Cada livro é caracterizado pelo seus autores, título, casa editora, cidade de publicação, ano de publicação, número de páginas e ISBN. Por exemplo, a seguinte lista corresponde a uma biblioteca com dois livros:

```
[{'autores': ['G. Arroz', 'J. Monteiro', 'A. Oliveira'],
'titulo': 'Arquitectura de computadores', 'editor': 'IST Press',
'cidade': 'Lisboa', 'ano': 2007, 'numpags': 799,
'isbn': '978-972-8469-54-2'}, {'autores': ['J.P. Martins'],
'titulo': 'Logica e Raciocinio', 'editor': 'College Publications',
'cidade': 'Londres', 'ano': 2014, 'numpags': 438,
'isbn': '978-1-84890-125-4'}]
```

Escreva um programa em Python que recebe a informação de uma biblioteca e devolve o túlulo do livro mais antigo. Por exemplo:

```
>>> mais_antigo(bib)
'Arquitectura de computadores'
```

10. Um número racional na forma canónica é um número da forma n/d em que n e d são inteiros, $d \neq 0$ e n e d são primos entre si. Suponha que o número racional n/d era representado pelo dicionário `{'num':` n`, 'den':` d`}`.

    (a) Escreva a função `cria_racional` que recebe dois inteiros e devolve o dicionário correspondente ao racional cujo numerador é o primeiro inteiro e cujo denominador é o segundo inteiro. A sua função deve fazer a verificação dos dados de entrada. Por exemplo,

    ```
    >>> cria_racional(4, 6)
    {'d': 3, 'n': 2}
    >>> cria_racional(4, 0)
    ValueError: o denominador não pode ser 0
    >>> cria_racional(4.3, 2)
    ValueError: os números devem ser inteiros
    ```

    (b) Escreva a função `escreve_racional` que recebe um dicionário correspondente a um racional e escreve o racional sob a forma `n/d`. Por exemplo,

    ```
    >>> escreve_racional(cria_racional(4, 6))
    2/3
    ```

    (c) Escreva a função, `soma_racionais` que recebe dois racionais e devolve o número racional correspondente à sua soma. A soma dos racionais a/b e d/e é dada por $(a \times e + e \times b)/(b \times e)$ Por exemplo,

    ```
    >>> escreve_racional(soma_racionais(cria_racional(4, 6), \
                                        cria_racional(2, 3)))
    4/3
    ```

11. Um tabuleiro de xadrez tem 64 posições organizadas em 8 linhas e 8 colunas. As linhas são numeradas de `1` a `8` e as colunas de `A` a `H`, sendo a posição inferior esquerda a `1`, `A`. Neste tabuleiro são colocadas peças de duas cores (brancas e pretas) e de diferentes tipos (rei, rainha, bispo, torre, cavalo e peão). Um tabuleiro de um jogo de xadrez pode ser representado por um dicionário cujos elementos são do tipo `(`l`, `c`):  (`cor`, `t`)`. Por exemplo o elemento do dicionário `(5, 'C'): (branca, rainha)` indica que a rainha branca está na segunda linha, terceira coluna (Figura 8.1).

    A situação do jogo de xadrez apresentado na Figura 8.1 é representada pelo seguinte dicionário:

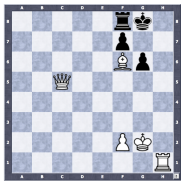


Figura 8.1: Tabuleiro de xadrez.

```
j = {(1, 'H'): ('branca', 'torre'), (2, 'F'): ('branca', 'peao'), \
     (2, 'G'): ('branca', 'rei'), (6, 'F'): ('branca', 'bispo'), \
     (5, 'C'): ('branca', 'rainha'), (6, 'G'): ('preta', 'peao'), \
     (7, 'F'): ('preta', 'peao'), (8, 'F'): ('preta', 'torre'), \
     (8, 'G'): ('preta', 'rei'), (2, 'C'): ('preta', 'peao')}
```

Num jogo de xadrez, a rainha movimenta-se na vertical, na horizontal ou nas diagonais e pode atacar qualquer peça da cor contrária que possa ser atingida num dos seus movimentos, desde que não existam outras peças no caminho. Escreva uma função em Python que recebe um tabuleiro de xadrez e determina quais as peças que podem ser atacadas pelas rainhas. Por exemplo,

```
>>> ataques_rainhas(j)
[['peao', 'preta', (2, 'C')], ['torre', 'preta', (8, 'F')]]
```

Capítulo 9

Abstração de Dados

1. Suponha que desejava criar o tipo *racional*. Um número racional é qualquer número que possa ser expresso como o quociente de dois inteiros: o numerador (um inteiro positivo, negativo ou nulo) e o denominador (um inteiro positivo). Os racionais a/b e c/d são iguais se e só se $a \times d = b \times c$.

   As operações básicas para o tipo *racional* são as seguintes:

   - *Construtores*:
     - $cria\_rac : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mapsto racional$
       $cria\_rac(n, d)$ tem como valor o número racional cujo numerador é n e cujo denominador é d ($d > 0$).
   - *Seletores*:
     - $num : racional \mapsto \mathbb{Z}$
       $num(r)$ tem como valor o numerador do racional r.
     - $den : racional \mapsto \mathbb{N}$
       $den(r)$ tem como valor o denominador do racional r.
   - *Reconhecedores*:
     - $eh\_racional : universal \mapsto lógico$
       $eh\_racional(arg)$ tem o valor $verdadeiro$ se arg é um número racional e tem o valor $falso$ em caso contrário.
     - $eh\_rac\_zero : racional \mapsto lógico$
       $eh\_rac\_zero(r)$ tem o valor $verdadeiro$ se r é o racional 0 e tem o valor $falso$ em caso contrário.
   - *Testes*:
     - $rac\_iguais : racional \times racional \mapsto lógico$
       $rac\_iguais(r_1, r_2)$ tem o valor $verdadeiro$ se r_1 e r_2 correspondem ao mesmo número racional e tem o valor $falso$ em caso contrário.

   (a) Escolha uma representação para o tipo *racional* usando dicionários.

(b) Escreva as operações básicas utilizando a representação escolhida.

(c) Escreva o transformador de saída para o tipo *racional*. Por exemplo,

```
>>> escreve_rac(cria_rac(1, 3))
'1/3'
```

(d) Escreva a função `produto_rac` que calcula o produto de dois racionais. Se $r_1 = a/b$ e $r_2 = c/d$ então $r_1 \times r_2 = ac/bd$. Por exemplo,

```
>>> escreve_rac(produto_rac(cria_rac(1,3), cria_rac(3,4)))
3/12
```

Note que esta função é uma *função de alto nível*, pois não pertence às operações básicas e, como tal, não pode usar a representação.

2. Suponha que desejava criar o tipo *relógio* para representar um instante de tempo dentro de um dia. Suponha que um relógio é caracterizado por um triplo de inteiros positivos, correspondentes às horas (entre 0 e 23), aos minutos (entre 0 e 59) e aos segundos (entre 0 e 59).

   As operações básicas para o tipo *relógio* são as seguintes:

   - *Construtores*:
     - $cria\_rel : \mathbb{N}_0^3 \mapsto relógio$
       $cria\_rel(h, m, s)$ tem como valor o *relógio* cujas horas são h, os minutos são m e os segundos são s.
   - *Seletores*:
     - $horas : relógio \mapsto \mathbb{N}_0$
       $horas(r)$ tem como valor as horas do *relógio* r.
     - $minutos : relógio \mapsto \mathbb{N}_0$
       $minutos(r)$ tem como valor os minutos do *relógio* r.
     - $segs : relógio \mapsto \mathbb{N}_0$
       $segs(r)$ tem como valor os segundos do *relógio* r.
   - *Reconhecedores*:
     - $eh\_relógio : universal \mapsto lógico$
       $eh\_relógio(arg)$ tem o valor $verdadeiro$ se arg é um *relógio* e tem o valor $falso$ em caso contrário.
     - $eh\_meia\_noite : relógio \mapsto lógico$
       $eh\_meia\_noite(r)$ tem o valor $verdadeiro$ se r corresponde à meia noite $00:00:00$ e tem o valor $falso$ em caso contrário.
     - $eh\_meio\_dia : relógio \mapsto lógico$
       $eh\_meio\_dia(r)$ tem o valor $verdadeiro$ se r corresponde ao meio dia $12:00:00$ e tem o valor $falso$ em caso contrário.
   - *Testes*:
     - $mesmas\_horas : relógio^2 \mapsto lógico$
       $mesmas\_horas(r_1, r_2)$ tem o valor $verdadeiro$ se r_1 e r_2 correspondem às mesmas horas e tem o valor $falso$ em caso contrário.

(a) Escolha uma representação interna para o tipo *relógio* recorrendo a listas.

(b) Escreva as operações básicas, utilizando a a representação escolhida.

(c) Suponha que a representação externa para os elementos do tipo *relógio* é `hh:mm:ss`, em que `hh` são os dois dígitos que representam as horas, `mm` são os dois dígitos que identificam os minutos e `ss` são os dois dígitos que identificam os segundos. Escreva o transformador de saída para o tipo *relógio*. Por exemplo,

```
>>> escreve_relogio(cria_relogio(9, 2, 34))
'09:02:34'
```

(d) Escreva o predicado `depois_rel` que recebe dois *relógios* e devolve *verdadeiro* apenas se o segundo *relógio* corresponder a um instante de tempo posterior ao primeiro *relógio*.

(e) Escreva a função `dif_segs` que calcula o número de segundos entre dois instantes, representados por dois relógios. Esta função apenas deve produzir um valor se o segundo instante de tempo for posterior ao primeiro, gerando uma mensagem de erro se essa condição não se verificar. Por exemplo,

```
>>> dif_segs(cria_rel(10, 2, 34), cria_rel(11, 21, 34))
4740
>>> dif_segs(cria_rel(10, 2, 34), cria_rel(9, 21, 34))
ValueError: dif_segs: primeiro arg posterior ao segundo
```

(f) Suponha que altera a representação interna do tipo relógio para um dicionário com as chaves `'horas'`, `'min'` e `'seg'`. O que deverá fazer às funções `escreve_relogio` e `dif_segundos` para que estas sejam usadas com esta nova representação? Justifique a sua resposta.

3. Suponha que desejava criar o tipo *data*. Uma *data* é caracterizada por um dia (um inteiro entre 1 e 31), um mês (um inteiro entre 1 e 12) e um ano (um inteiro que pode ser positivo, nulo ou negativo). Para cada *data*, deve ser respeitado o limite de dias de cada mês, incluindo o caso de Fevereiro nos anos bissextos. Recorde que um ano é bissexto se for divisível por 4 e não for divisível por 100, a não ser que seja também divisível por 400. Por exemplo, 1984 é bissexto, 1100 não é, e 2000 é bissexto.

   O tipo *data* tem as seguintes operações básicas:

   - *Construtores*:
     - $cria\_data : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mapsto data$
       $cria\_data(d, m, a)$ tem como valor a data com dia d, mês m e ano a.
   - *Seletores*:
     - $dia : data \mapsto \mathbb{N}$
       $dia(dt)$ tem como valor o dia da data dt.

  - $mes : data \mapsto \mathbb{N}$
    $mes(dt)$ tem como valor o mês da data dt.
  - $ano : data \mapsto \mathbb{Z}$
    $ano(dt)$ tem como valor o ano da data dt.

- *Reconhecedores*:
  - $eh\_data : universal \mapsto lógico$
    $eh\_data(arg)$ tem o valor $verdadeiro$ se arg é uma $data$ e tem o valor $falso$ em caso contrário.

- *Testes*:
  - $mesma\_data : data^2 \mapsto lógico$
    $mesma\_data(d_1, d_2)$ tem o valor $verdadeiro$ se d_1 e d_2 correspondem à mesma data e tem o valor $falso$ em caso contrário.

(a) Escolha uma representação interna para o tipo *data* usando dicionários.

(b) Escreva as operações básicas para a representação escolhida.

(c) Supondo que a representação externa para um elemento do tipo *data* é `dd/mm/aaaa ee` (em que `dd` representa o dia, `mm` o mês, `aaaa` o ano e `ee` representa a era, a qual é omitida se o ano for maior ou igual a 0 e é escrita `AC` se o ano for menor que zero), escreva o transformador de saída para o tipo *data*. Por exemplo,

```
>>> escreve_data (cria_data (5, 9, 2018))
'05/09/2018'
>>> escreve_data (cria_data (5, 9, -10))
'05/09/10 AC'
```

(d) Defina o predicado `data_anterior` que recebe como argumentos duas *datas* e tem o valor verdadeiro apenas se a primeira *data* é anterior à segunda.

```
>>> data_anterior(cria_data(2, 1, 2003), \
                  cria_data(2, 1, 2005))
True
```

(e) Defina a função `idade` que recebe como argumentos a data de nascimento de uma pessoa e outra data posterior e devolve a idade da pessoa, em anos, na segunda data.

```
>>> idade(cria_data(2, 1, 2003), cria_data(1, 1, 2005))
2
>>> idade(cria_data(2, 1, 2003), cria_data(1, 2, 2005))
3
>>> idade(cria_data(2, 1, 2003), cria_data(1, 2, 2000))
ValueError: idade: a pessoa ainda não nasceu
```

4. Considere o tipo *time_ stamp* para representar um instante de tempo. Um *time_ stamp* corresponde a um par constituído por uma *data* e por um *relógio*.

   As operações básicas para o tipo *time_ stamp* são:

   - *Construtores*:
     - $cria\_time\_stamp : data \times relógio \mapsto time\_stamp$
       $cria\_time\_stamp(dt, rel)$ tem como valor o *time_ stamp* com *data* dt e *relógio* rel.
   - *Seletores*:
     - $data : time\_stamp \mapsto data$
       $data(ts)$ tem como valor a *data* de ts.
     - $relógio : time\_stamp \mapsto relógio$
       $relógio(ts)$ tem como valor o *relógio* do *time_ stamp* ts.
   - *Reconhecedores*:
     - $eh\_time\_stamp : universal \mapsto lógico$
       $eh\_time\_stamp(arg)$ tem o valor $verdadeiro$ se arg é um *time_ stamp* e tem o valor $falso$ em caso contrário.
   - *Testes*:
     - $mesmo\_time\_stamp : time\_stamp^2 \mapsto lógico$
       $mesma\_time\_stamp(ts_1, ts_2)$ tem o valor $verdadeiro$ se ts_1 e ts_2 correspondem ao mesmo *time_ stamp* e tem o valor $falso$ em caso contrário.

   (a) Escolha uma representação para o tipo *time_ stamp*.

   (b) Escreva as operações básicas com base na representação escolhida.

   (c) Escreva o predicado
   $depois\_ts : time\_stamp^2 \mapsto lógico$
   $depois\_ts(ts_1, ts_2)$ tem o valor $verdadeiro$ apenas se ts_1 corresponder a um instante posterior a ts_2.

5. Suponha que desejava criar o tipo *vetor*. Um vetor num referencial cartesiano pode ser representado pelas coordenadas da sua extremidade (x, y), estando a sua origem no ponto $(0, 0)$, ver Figura 9.1. Podemos considerar as seguintes operações básicas para vetores:

   - *Construtor*:
     - $vetor : \mathbb{R}^2 \mapsto vetor$
       $vetor(x, y)$ tem como valor o vetor cuja extremidade é o ponto (x, y).
   - *Seletores*:
     - $abcissa : vetor \mapsto \mathbb{R}$
       $abcissa(v)$ tem como valor a abcissa da extremidade do vetor v.

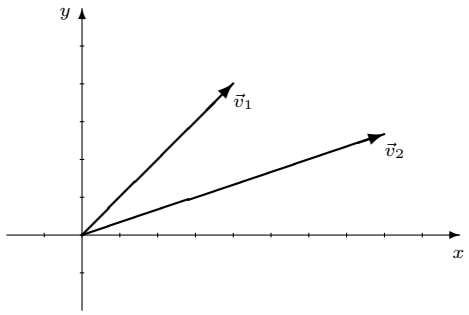


Figura 9.1: Exemplo de vetores.

  - $ordenada : vetor \mapsto \mathbb{R}$
    $ordenada(v)$ tem como valor a ordenada da extremidade do vetor v.

- *Reconhecedores*:
  - $eh\_vetor : universal \mapsto lógico$
    $eh\_vetor(arg)$ tem valor $verdadeiro$ apenas se arg é um vetor.
    $eh\_vetor\_nulo : vetor \mapsto lógico$
    $eh\_vetor\_nulo(v)$ tem valor $verdadeiro$ apenas se v é o vetor $(0, 0)$.
- *Teste*:
  - $vetores\_iguais : vetor \times vetor \mapsto lógico$
    $vetores\_iguais(v_1, v_2)$ tem valor verdadeiro apenas se os vetores v_1 e v_2 são iguais.

(a) Defina uma representação para vetores utilizando tuplos.

(b) Escreva as operações básicas, de acordo com a representação escolhida.

(c) Escreva uma função para calcular o produto escalar de dois vetores. O produto escalar dos vetores representados pelos pontos (a, b) e (c, d) é dado pelo real $a \times c + b \times d$.

Capítulo 10

Ficheiros

1. Escreva a função `conta_linhas` que dada uma cadeia de caracteres com o nome de um ficheiro, devolve o número de linhas que ocorrem no ficheiro e que não estão em branco, ou seja, apenas com o caracter de fim de linha.

2. Escreva uma função que recebe uma cadeia de caracteres, que contém o nome de um ficheiro, lê esse ficheiro, linha a linha, e calcula quantas vezes aparece cada uma das vogais. A sua função deve devolver um dicionário cujas chaves são as vogais e os valores associados correspondem ao número de vezes que a vogal aparece no ficheiro. Apenas conte as vogais que são letras minúsculas. Por exemplo,

   ```
   >>> conta_vogais('testevogais.txt')
   {'a': 36, 'u': 19, 'e': 45, 'i': 16, 'o': 28}
   ```

3. Escreva uma função que recebe como argumentos os nomes de dois ficheiros e que escreve no ficheiro correspondente ao segundo argumento o conteúdo do ficheiro correspondente ao primeiro argumento mas por ordem invertida, ou seja, a primeira linha do primeiro ficheiro será a última linha do segundo ficheiro.

4. Escreva a função `concatena` que recebe uma lista de cadeias de caracteres, cada uma correspondendo ao nome de um ficheiro, e uma cadeia de caracteres, correspondendo ao nome do ficheiro de saída, e concatena o conteúdo dos primeiros ficheiros no ficheiro de saída. Por exemplo, se o ficheiro `fich1` contiver o texto:

   ```
   Um ficheiro para fazer uns testes.
   Este ficheiro contem duas linhas.
   ```

   e o ficheiro `fich2` contiver o texto:

   ```
   Outro ficheiro para fazer os mesmos testes.
   ```

```
Este ficheiro contem mais uma linha
alem desta.
```

é produzida a seguinte interacção:

```
>>> concatena(['fich1', 'fich2'], 'saida')
>>>
```

em que o ficheiro saida contém o texto:

```
Um ficheiro para fazer uns testes.
Este ficheiro contem duas linhas.
Outro ficheiro para fazer os mesmos testes.
Este ficheiro contem mais uma linha
alem desta.
```

5. Escreva a função `procura` que recebe duas cadeias de caracteres, em que a primeira corresponde a uma palavra a procurar e a segunda contém o nome de um ficheiro. A sua função deve escrever no ecrã as linhas do ficheiro que contêm a palavra a procurar. Por exemplo, se o ficheiro `fich` contiver o texto:

   ```
   Outro ficheiro para fazer os mesmos testes.
   Este ficheiro contem mais uma linha
   alem desta.
   ```

   é produzida a seguinte interacção:

   ```
   >>> procura('ficheiro', 'fich')
   Outro ficheiro para fazer os mesmos testes.
   Este ficheiro contem mais uma linha
   >>>
   ```

6. Escreva a função `corta` que recebe duas cadeias de caracteres, uma contendo o nome de um ficheiro de entrada, outra contendo o nome do ficheiro de saída, e um número inteiro não negativo n, e escreve os n primeiros caracteres do ficheiro de entrada no ficheiro de saída, no caso de o ficheiro conter mais que n caracteres, ou todo o conteúdo do ficheiro de entrada no ficheiro de saída, no caso contrário. Por exemplo, se o ficheiro `fich` contiver o texto:

   ```
   Um ficheiro para fazer uns testes.
   Este ficheiro contem duas linhas.
   ```

   é produzida a seguinte interacção:

```
>>> corta('teste', 'saida', 20)
>>>
```

em que o ficheiro saida contém o texto:

```
Um ficheiro para faz
```

7. Escreva a função `ordena_ficheiro` que recebe como argumento uma cadeia de caracteres correspondendo ao nome de um ficheiro e escreve no ecrã as linhas do ficheiro ordenadas por ordem crescente. Por exemplo, se o ficheiro `fich` contiver o texto:

   ```
   Outro ficheiro para fazer os mesmos testes.
   Este ficheiro contem mais uma linha
   alem desta.
   ```

   é produzida a seguinte interacção:

   ```
   >>> ordena('fich')
   Este ficheiro contem mais uma linha
   Outro ficheiro para fazer os mesmos testes.
   alem desta.
   ```

8. Escreva a função `divide` que recebe uma cadeia de caracteres, que contém o nome do ficheiro de entrada, e um inteiro n e divide o ficheiro em dois ficheiros, um primeiro, cujo nome é o nome do ficheiro de entrada seguido de 0, em que cada linha contém os n primeiros caracteres da correspondente linha do ficheiro e outro, cujo nome é o nome do ficheiro de entrada seguido de 1, em que cada linha contém os restantes caracteres da linha correspondente no ficheiro original. Por exemplo, se o ficheiro `fich` contiver o texto:

   ```
   Um ficheiro para fazer uns testes.
   Este ficheiro contem duas linhas.
   ```

   é produzida a seguinte interacção:

   ```
   >>> divide('fich', 20)
   >>>
   ```

   em que o ficheiro `fich0` contém o texto:

   ```
   Um ficheiro para faz
   Este ficheiro contem
   ```

   e o ficheiro `fich1` contém o texto:

```
er uns testes.
duas linhas.
```

9. Escreva a função `separa` que recebe uma cadeia de caracteres, que contém o nome do ficheiro de entrada, outra cadeira de caracteres com apenas um caracter e um inteiro n e divide o ficheiro em dois ficheiros, um primeiro, cujo nome é o nome do ficheiro de entrada seguido de 0, e outro, cujo nome é o nome do ficheiro de entrada seguido de 1. O conteúdo do segundo ficheiro é o mesmo do ficheiro de entrada a que foi retirado o texto de cada linha entre a n-ésima ocorrência do caracter, incluindo o caracter, e a $n+1$-ésima ocorrência do caracter, excluindo o caracter. O primeiro ficheiro tem em cada linha o texto que foi retirado ao texto de entrada para produzir o primeiro texto. Por exemplo, se o ficheiro `fich` contiver o texto:

   ```
   Outro ficheiro para fazer os mesmos testes.
   alem desta.
   Este ficheiro contem mais uma linha
   ```

   é produzida a seguinte interacção:

   ```
   >>> separa('fich', 'h', 1)
   >>>
   ```

   em que o ficheiro `fich0` contém o texto:

   ```
   Outro fic
   alem desta.
   Este ficha
   ```

   e o ficheiro `fich1` contém o texto:

   ```
heiro para fazer os mesmos testes.
   heiro contem mais uma lin
   ```

Capítulo 11

Programação com Objectos

1. Defina a classe `estacionamento`, que simula o funcionamento de um parque de estacionamento. A criação de instâncias desta classe recebe um inteiro que determina a lotação do parque e devolve um objeto com os seguintes métodos: `entra()`, corresponde à entrada de um carro; `sai()`, corresponde à saída de um carro; `lugares()` indica o número de lugares livres no estacionamento. Por exemplo,

```
>>> ist = estacionamento(20)
>>> ist.lugares()
20
>>> ist.entra()
>>> ist.entra()
>>> ist.entra()
>>> ist.entra()
>>> ist.sai()
>>> ist.lugares()
17
```

2. Suponha que desejava criar a classe `racional`. Um número racional é qualquer número que possa ser expresso como o quociente de dois inteiros: o numerador (um inteiro positivo, negativo ou nulo) e o denominador (um inteiro positivo ou negativo). Os racionais a/b e c/d são iguais se e só se $a \times d = b \times c$. Assuma que a representação externa de um racional é apresentada de modo que o numerador e o denominador são primos entre si. A classe `racional` admite as operações `nume` e `deno` que devolvem, respetivamente o numerador e o denominador.

   (a) Defina a classe `racional`, incluindo o transformador de saída.

   (b) Usando operações polimórficas, escreva métodos para calcular a soma e o produto de racionais. Se $r_1 = a/b$ e $r_2 = c/d$ então $r_1 + r_2 = (ad + bc)/bd$ e $r_1 * r_2 = (a * c)/(b * d)$. Por exemplo,

```
>>> r1 = racional(2, 4)
>>> r2 = racional(1, 6)
>>> r1
1/2
>>> r2
1/6
>>> r1 + r2
2/3
>>> r1*r2
1/2
```

3. Os automóveis mais recentes mostram a distância que é possível percorrer até ser necessário um reabastecimento. Pretende-se criar esta funcionalidade em Python através da classe `automovel`. Esta classe é construída indicando a capacidade do depósito, a quantidade de combustível no depósito e o consumo do automóvel em litros aos 100 km. A classe `automovel` apresenta os seguintes métodos:

   - `combustivel` devolve a quantidade de combustível no depósito;
   - `autonomia` devolve o numero de Km que é possível percorrer com o combustível no depósito;
   - `abastece(n_litros)` aumenta em `n_litros` o combustível no depósito. Se este abastecimento exceder a capacidade do depósito, gera um erro e não aumenta a quantidade de combustível no depósito;
   - `percorre(n_km)` percorre `n_km` Km, desde que a quantidade de combustível no depósito o permita, em caso contrário gera um erro e o trajecto não é efectuado.

   Por exemplo:

```
>>> a1 = automovel(60, 10, 15)
>>> a1.combustivel()
10
>>> a1.autonomia()
66
>>> a1.abastece(45)
'366 Km até abstecimento'
>>> a1.percorre(150)
'216 Km até abstecimento'
>>> a1.percorre(250)
ValueError: Não tem autonomia para esta viagem
```

4. Suponha que desejava criar a classe `conjunto`, a qual apresenta métodos correspondentes às seguintes operações básicas:

   Construtores:

- $conjunto : elemento^n \mapsto conjunto \ \ (n \geq 0)$
  $conjunto(e_1, \ldots, e_n)$ tem como valor um conjunto com os elementos $e_1, \ldots, e_n$, $(n \geq 0)$.
- $duplica : conjunto \mapsto conjunto$
  $duplica(c)$ tem como valor um conjunto igual a c.
- $insere : elemento \times conjunto \mapsto conjunto$
  $insere(e, c)$ tem como valor o resultado de inserir o elemento e no conjunto c; se e já pertencer a c, tem como valor c.

Seletores:

- $el\_conj : conjunto \mapsto elemento$
  $el\_conj(c)$ tem como valor um elemento escolhido aleatoriamente do conjunto c; se o conjunto for vazio esta operação é indefinida.
- $retira\_conj : elemento \times conjunto \mapsto conjunto$
  $retira\_conj(e, c)$ tem como valor o resultado de retirar do conjunto c o elemento e; se e não pertencer a c, tem como valor c.
- $cardinal : conjunto \mapsto inteiro$
  $cardinal(c)$ tem como valor o número de elementos do conjunto c.

Reconhecedores:

- $e\_conj\_vazio : conjunto \mapsto lógico$
  $e\_conj\_vazio(c)$ tem o valor *verdadeiro* se o conjunto c é o conjunto vazio, e tem o valor $falso$, em caso contrário.

Testes:

- $pertence : elemento \times conjunto \mapsto lógico$
  $pertence(e, c)$ tem o valor *verdadeiro* se o elemento e pertence ao conjunto c e tem o valor $falso$, em caso contrário.

(a) Defina a classe `conjunto`, com a qual podemos obter, por exemplo, a seguinte interação:

```
>>> c1 = conjunto(1, 2, 3, 4)
>>> c1
{1,2,3,4}
>>> c1.cardinal()
4
>>> c1.retira(3)
{1,2,4}
>>> c1.el_conj()
2
```

(b) Como parte da classe `conjunto`, defina o método `subconjunto`:
subconjunto : *conjunto* × *conjunto* ↦ *lógico*
subconjunto(c_1, c_2) tem o valor *verdadeiro*, se o conjunto c_1 for um subconjunto do conjunto c_2, ou seja, se todos os elementos de c_1 pertencerem a c_2, e tem o valor $falso$, em caso contrário.
Por exemplo,

```
>>> c1 = conjunto(1, 2, 3, 4)
>>> c1
{1,2,3,4}
>>> c2 = conjunto(2, 3)
>>> c2
{2,3}
>>> c2.subconjunto(c1)
True
>>> c1.subconjunto(c2)
False
```

(c) Como parte da classe `conjunto`, defina o método `uniao`:
uniao : *conjunto* × *conjunto* ↦ *conjunto*
uniao(c_1, c_2) tem como valor o conjunto união de c_1 com c_2, ou seja, o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a c_1 ou a c_2.
Por exemplo,

```
>>> c1 = conjunto(1, 2, 3, 4)
>>> c2 = conjunto(3, 4, 5, 6)
>>> c1.uniao(c2)
{3,4,5,6,1,2}
```

(d) Como parte da classe `conjunto`, defina o método `interseccao`:
interseccao : *conjunto* × *conjunto* ↦ *conjunto*
interseccao(c_1, c_2) tem como valor o conjunto intersecção de c_1 com c_2, ou seja, o conjunto formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a c_1 e a c_2.
Por exemplo,

```
>>> c1 = conjunto(1, 2, 3, 4)
>>> c2 = conjunto(3, 4, 5, 6)
>>> c1.interseccao(c2)
{3,4}
```

(e) Como parte da classe `conjunto`, defina o método `diferenca`:
$diferenca$: *conjunto* × *conjunto* ↦ *conjunto*
$diferenca(c_1, c_2)$ tem como valor o conjunto diferença de c_1 e c_2, ou seja, o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a c_1 e não pertencem a c_2.
Por exemplo,

```
>>> c1 = conjunto(1, 2, 3, 4)
>>> c2 = conjunto(3, 4, 5, 6)
>>> c1.diferenca(c2)
{1,2}
```

5. Considere a função de Ackermann:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{se } m > 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{se } m > 0 \text{ e } n > 0 \end{cases}$$

esta função pode ser directamente escrita através da função:

```
def A(m, n):
    if m == 0:
        return n + 1
    elif m > 0 and n == 0:
        return A(m-1, 1)
    else:
        return A(m-1, A(m, n-1))
```

Como pode verificar, esta função calcula várias vezes o mesmo valor. Para evitar este problema, podemos definir uma classe, `mem_A`, cujo estado interno contém informação sobre os valores de `A` já calculados, apenas calculando um novo valor quando este ainda não é conhecido. Esta classe possui um método `val` que calcula o valor de `A` para os inteiros que são seus argumentos e um método `mem` que mostra os valores memorizados. Por exemplo,

```
>>> a = mem_A()
>>> a.val(2, 3)
9
>>> a.mem()
{(0, 1): 2,
 (0, 2): 3,
 (0, 3): 4,
 (0, 4): 5,
 (0, 5): 6,
 (0, 6): 7,
 (0, 7): 8,
 (0, 8): 9,
 (1, 0): 2,
 (1, 1): 3,
 (1, 2): 4,
 (1, 3): 5,
 (1, 4): 6,
 (1, 5): 7,
```

```
(1, 6): 8,
(1, 7): 9,
(2, 0): 3,
(2, 1): 5,
(2, 2): 7,
(2, 3): 9}
```

Defina a classe `mem_A`.

Capítulo 12

Estruturas Lineares

1. Uma *fila de prioridades* é uma estrutura de dados composta por um certo número de filas, cada uma das quais associada a uma determinada prioridade.

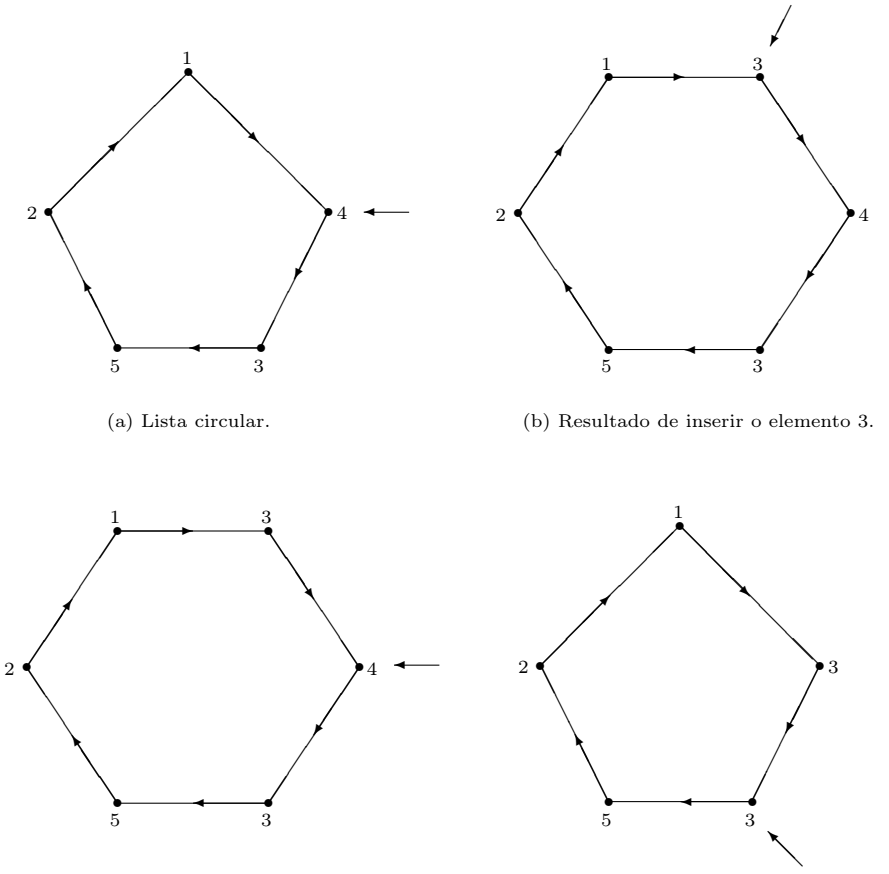
   Consideremos uma fila de prioridades com duas prioridades, urgente e normal. Nesta fila, novos elementos são adicionados, indicando a sua prioridade, e são colocados no fim da fila respetiva. Os elementos são removidos da fila através da remoção do elemento mais antigo da fila urgente. Se a fila urgente não tiver elementos, a operação de remoção remove o elemento mais antigo da fila normal. Existe uma operação para aumentar a prioridade, a qual remove o elemento mais antigo da fila normal e coloca-o como último elemento da fila urgente. As operações básicas para o tipo fila de prioridades (com prioridades urgente e normal) são as seguintes:

   - *Construtores:*
     - $nova\_fila\_2p : \{\} \mapsto fila\_2p$
       $nova\_fila\_2p()$ tem como valor uma fila de duas prioridades sem elementos.
   - *Seletores:*
     - $inicio : fila\_2p \mapsto elemento$
       $inicio(fila)$ tem como valor o elemento que se encontra no início da fila de prioridade *urgente* da *fila*; se a fila de prioridade *urgente* da *fila* não tiver elementos, tem como valor o elemento que se encontra no início da fila de prioridade *normal* da *fila*. Se as filas de prioridade *urgente* e *normal* não tiverem elementos, o valor desta operação é indefinido.
     - $comprimento\_2p : fila\_2p \times \{urgente, normal\} \mapsto \mathbb{N}_0$
       $comprimento\_2p(fila, tipo)$ tem como valor o número de elementos da fila de prioridade *tipo* da *fila*.

- *Modificadores:*
  - $coloca\_2p : fila\_2p \times \{urgente, normal\} \times elemento \mapsto fila\_2p$
    $coloca\_2p(fila, tipo, elm)$ altera de forma permanente a *fila* para a fila que resulta em inserir *elem* no fim da fila de prioridade *tipo* da *fila*. Devolve a fila resultante.
  - $retira\_2p : fila\_2p \mapsto fila\_2p$
    $retira\_2p(fila)$ altera de forma permanente a *fila* para: (1) a fila que resulta em remover o elemento que se encontra no início da fila de prioridade *urgente* da *fila*; (2) a fila que resulta em remover o elemento que se encontra no início da fila de prioridade *normal* da *fila*, se a fila de prioridade *urgente* da *fila* não tiver elementos. Se as filas de prioridade *urgente* e *normal* não tiverem elementos, o valor desta operação é indefinido. Devolve a fila resultante.
  - $aumenta\_prioridade\_2p : fila\_2p \mapsto fila\_2p$
    $aumenta\_prioridade\_2p(fila)$ altera de forma permanente a *fila* para a fila que resulta em remover o elemento que se encontra no início da fila de prioridade *normal* da *fila* e coloca-o no final da fila de prioridade *urgente* da *fila*. Se a fila de prioridade *normal* não tiver elementos, esta operação não altera a *fila*. Devolve a fila resultante.
- *Reconhecedores:*
  - $e\_fila\_2p : Universal \mapsto logico$
    $e\_fila\_2p(arg)$ tem o valor *verdadeiro*, se *arg* é uma fila de prioridades com as prioridades *urgente* e *normal*, e tem o valor *falso*, em caso contrário.
  - $fila\_2p\_vazia : fila \times \{urgente, normal\} \mapsto logico$
    $fila\_2p\_vazia(fila, tipo)$ tem o valor *verdadeiro*, se a fila de prioridade *tipo* da *fila* é a fila vazia, e tem o valor *falso*, em caso contrário.
- *Testes:*
  - $filas\_2p\_iguais : fila\_2p \times fila\_2p \mapsto logico$
    $filas\_2p\_iguais(fila_1, fila_2)$ tem o valor *verdadeiro*, se $fila_1$ é igual a $fila_2$, e tem o valor *falso*, em caso contrário.

Defina a classe `fila_2_p` com prioridades `urgente` e `normal`.

2. O tipo de dados *lista circular* corresponde a uma lista na qual, excepto no caso de ser uma lista vazia, ao último elemento segue-se o primeiro. A Figura 12.1 (a) mostra esquematicamente uma lista circular em que o primeiro elemento é 4, o segundo, 3, o terceiro, 5, o quarto, 2 e o quinto (e último) é 1. Uma lista circular tem um elemento que se designa por primeiro elemento ou elemento do início da lista. Na lista da Figura 12.1 (a), esse elemento é 4. As listas circulares aparecem em várias aplicações,



(a) Lista circular.

(b) Resultado de inserir o elemento 3.

(c) Resultado de avançar o início.

(d) Resultado de retirar um elemento.

Figura 12.1: Operações sobre listas circulares.

sendo uma delas a representação de vídeos que se repetem ao chegar ao fim.

Com listas circulares, podemos efetuar as seguintes operações, as quais estão exemplificadas na Figura 12.1.

- *insere_circ*, que insere um elemento na lista. Com esta operação, o elemento inserido passa a ser o primeiro da lista resultante, o primeiro elemento da lista original passa a ser o segundo da nova lista, e assim sucessivamente.
- *primeiro_circ*, que inspeciona o primeiro elemento da lista, sem a alterar.
- *retira_circ*, que retira um elemento da lista. Com esta operação, o elemento retirado é sempre o do início da lista, passando o início

da lista resultante a ser o segundo elemento (se este existir) da lista original.

- *avanca_circ*, a qual avança o início da lista para o elemento seguinte. Esta operação não altera os elementos da lista, apenas altera o início da lista, que passa a ser o segundo elemento da lists original, se esta tiver pelo menos dois elementos; se apenas tiver um elemento, nada se altera; se a lista circular for vazia, esta operação tem um valor indefinido.

(a) Especifique as operações básicas para listas circulares e classifique-as.

(b) Supondo que a lista circular apresentada na alínea (a) da Figura 12.1 é representada externamente por `@4, 3, 5, 2, 1@`, defina a classe `lista_circular`. Permitindo a interação:

```
>>> lc = lista_circ()
>>> lc.insere_circ(1)
@1@
>>> lc.insere_circ(2)
@2, 1@
>>> lc.insere_circ(5)
@5, 2, 1@
>>> lc.insere_circ(3)
@3, 5, 2, 1@
>>> lc.insere_circ(4)
@4, 3, 5, 2, 1@
>>> lc.primeiro_circ()
4
>>> lc.el_n_circ(11)
3
>>> lc.insere_circ(3)
@3, 4, 3, 5, 2, 1@
>>> lc.avanca_circ()
@4, 3, 5, 2, 1, 3@
>>> lc.retira_circ()
@3, 5, 2, 1, 3@
```

3. Ao passo que uma pilha permite inserções e remoções numa das extremidades e uma fila permite inserções numa das extremidades e remoções na outra, uma *fila dupla*[1] é uma estrutura linear que permite inserções e remoções em ambas as extremidades.

   (a) Especifique as operações básicas para o tipo fila dupla.

   (b) Defina a classe `fila_dupla`.

[1] Em inglês *double-ended queue* ou *deque*.