ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON CONDICIONES INICIALES

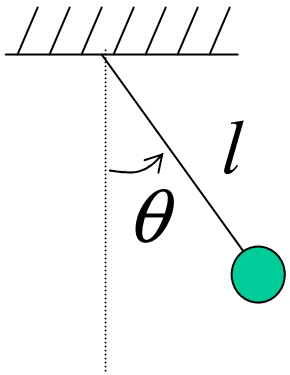
Universidad Simón Bolívar

Preliminares

El comportamiento de muchos procesos físicos, sobre todo aquellos dependientes del tiempo, puede ser descrito utilizando Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

Aunque muchos de ellos pueden ser resueltos analíticamente, una gran parte no puede ser resuelto sino con la aplicación de métodos numéricos.

Un ejemplo lo constituye el movimiento de un péndulo simple.



Si se desprecia la fricción entre la cuerda y la pared así como entre la masa y el medio ambiente, la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{l} sin\,\theta = 0 \qquad (1)$$

Si se conocen la posición y la velocidad inicial

$$\theta(t_0) = \theta_0 \qquad \theta'(t_0) = \theta'_0 \qquad (2)$$

tenemos un problema de valor inicial.

Para valores de θ pequeño podemos utilizar la aproximación

$$sin\,\theta \approx \theta \qquad (3)$$

quedándonos la ec. de movimiento

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (4)$$

Para valores de θ mayores tenemos que emplear un método numérico.

Capítulo III

Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

Sea la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (5)$$

Esta ecuación es:

- ORDINARIA ya que las derivadas que aparecen son derivadas totales (solo existe una variable independiente: x)
- de ORDEN n (orden de la mayor derivada)

Una función y(x) es *solución* de esta EDO si satisface (5). En general, existen infinitas soluciones a (5).

Para obtener una solución única de (5) es necesario conocer información adicional tal como los valores de la función en ciertos puntos o sus derivadas.

Si la ecuación es de orden n, generalmente n condiciones son suficientes para determinar la solución.

Si todas las condiciones son conocidas en un mismo valor de la variable independiente (x_0 por ejemplo), el problema es denominado un *problema de valor inicial*.

Cuando mas de un valor de x esta involucrado, el problema es denominado un *problema de valor en la frontera*.

Una EDO de orden n puede ser escrita como un sistema de n ecuaciones de 1er orden definiendo n-1 nuevas variables.

Por ejemplo, consideremos la ecuación de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - p^2\right) y = 0 \qquad (6)$$

con p constante.

Definiendo z=dy/dx, (6) puede escribirse como

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} - z = 0 \\ &x^2 \frac{dz}{dx} + xz + \left(x^2 - p^2\right) y = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

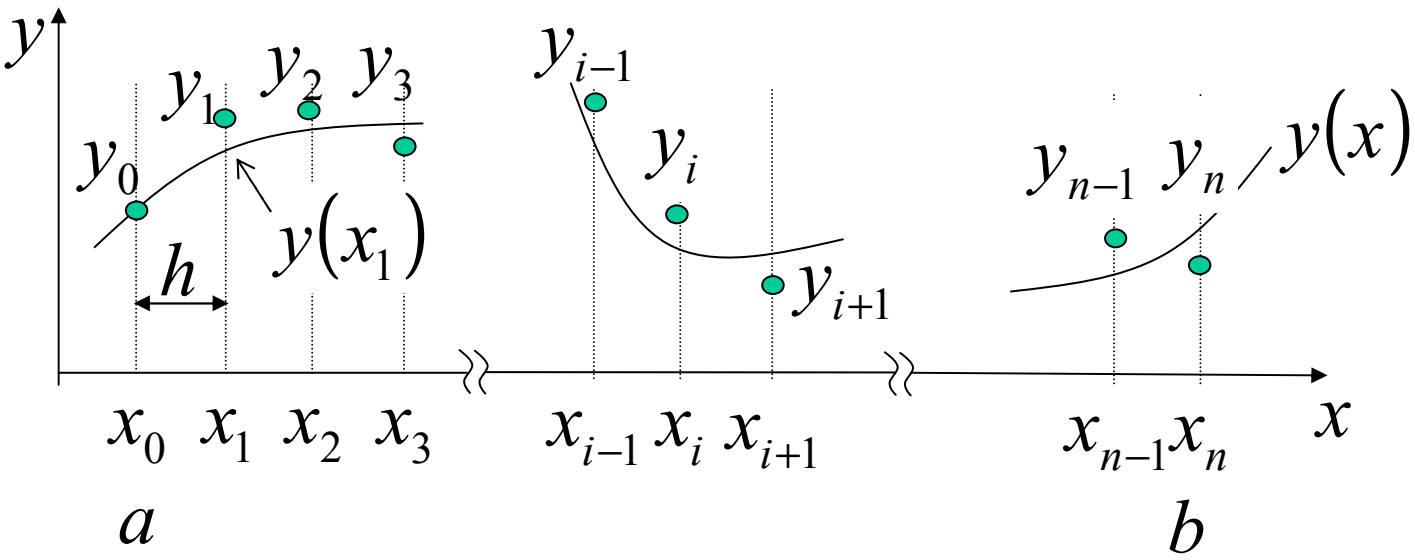
Por esta razón, nos limitaremos al estudio de métodos numéricos que permiten resolver EDO de 1er orden.

En general, una EDO de primer orden es, por definición, de la forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{8}$$

La función solución y(x), en general, no puede ser encontrada analíticamente. En ese caso, intentamos conseguir una solución numérica encontrando los valores de y(x) en algunos valores específicos de x.

El intervalo en el que se desea encontrar la solución [a,b] es dividido en n sub-intervalos o pasos. La solución numérica y_i es encontrada entonces en n+1 valores de x(=x_i).



El tamaño del paso h es dado por

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{9}$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

El desarrollo en serie de Taylor de la función $y=f(x)$ es dado por

$$y(x_0+h)=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2!}y''(x_0)+\ldots \qquad (10)$$

Tomando la definición (8) tendremos

$$y(x_0+h)=y(x_0)+hF[x_0,y(x_0)]+\frac{h^2}{2!}F'[x_0,y(x_0)]+\ldots \qquad (11)$$

Reteniendo los términos de orden 1

$$y(x_0+h)\approx y(x_0)+hF[x_0,y(x_0)] \qquad (12)$$

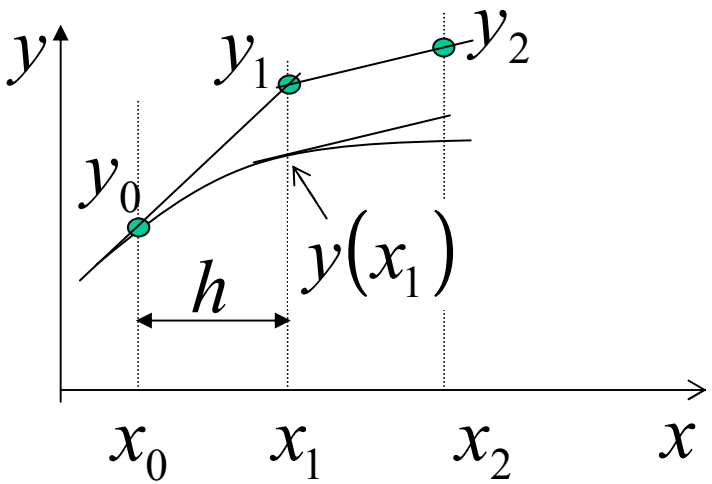
y al escribirla en términos de la discretización h nos lleva a

$$y_1 = y_0 + hF\left[x_0, y\left(x_0\right)\right] \tag{13}$$

En general, podemos escribir

$$y_{i+1} = y_i + hF\left[x_i, y\left(x_i\right)\right] \tag{14}$$

Esta relación se conoce como el método de Euler. Gráficamente tenemos



Ejemplo.

Con el método de Euler integre numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + \frac{17}{2} \qquad (15)$$

En el intervalo [0,4] con un tamaño de paso h=0.5 y con la condición inicial

$$y(x=0) = 1 \qquad (16)$$

De la ecuación (14) tenemos

$$y_{i+1} = y_i + hF[x_i, y(x_i)] \qquad (14)$$

La condición inicial se escribe como

$$y_0 = 1$$

Luego

$$y_1 = y_0 + hF[x_0, y(x_0)]$$

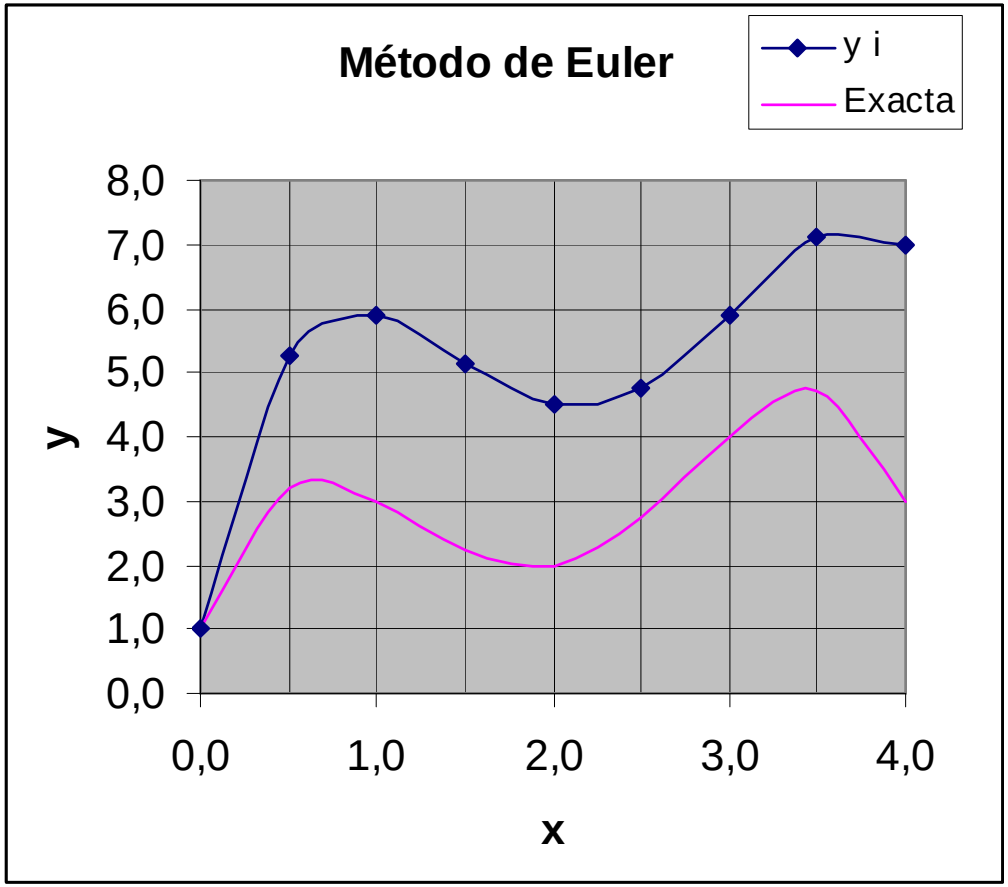
$$y_1 = 1 + (0.5)\left(-2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + \frac{17}{2}\right)$$

$$y_1 = 1 + (0.5)\left(\frac{17}{2}\right) = 5.25$$

Repitiendo el procedimiento tenemos

x i	y i	y' i	y i+1	y (exacta)	Error (%)
0,00	1,000	8,500	5,250	1,000	0
0,50	5,250	1,250	5,875	3,219	63
1,00	5,875	-1,500	5,125	3,000	96
1,50	5,125	-1,250	4,500	2,219	131
2,00	4,500	0,500	4,750	2,000	125
2,50	4,750	2,250	5,875	2,719	75
3,00	5,875	2,500	7,125	4,000	47
3,50	7,125	-0,250	7,000	4,719	51
4,00	7,000	-7,500	3,250	3,000	133

En forma gráfica tenemos



Nótese la diferencia entre la solución real y la numérica.

La solución teórica fue hallada con MATLAB utilizando el comando dsolve

```
>> y = dsolve('Dy=-2*x^3+12*x^2-20*x+17/2', 'y(0)=1','x')

y =

4*x^3 - x^4/2 - 10*x^2 + (17*x)/2 + 1
```

Si utiliza el comando *pretty* obtiene

```
>> pretty(y)

     4
    x        3        2   17 x
  - -- + 4 x  - 10 x  + ---- + 1
    2                     2
```

Para analizar la diferencia entre la solución verdadera y la numérica calculemos los términos despreciados en el desarrollo en serie (11). Para ello, obtengamos las derivadas

$$F(x,y)=\frac{dy}{dx}=-2x^3+12x^2-20x+\frac{17}{2} \qquad (15)$$

$$F'(x,y)=\frac{d^2y}{dx^2}=-6x^2+24x-20$$

$$F''(x,y)=\frac{d^3y}{dx^3}=-12x+24$$

$$F'''(x,y)=\frac{d^4y}{dx^4}=-12$$

$$F''''(x,y)=0$$

La evaluación de las derivadas en el primer punto (y_1) y el calculo del término correspondiente en la serie de Taylor arroja

$$F'(0,1) = -20 \qquad E_2 = \frac{h^2}{2!} F'[0,1] = \frac{1}{8}(-20) = -2.5$$

$$F''(0,1) = 24 \qquad E_3 = \frac{h^3}{3!} F''[0,1] = \frac{1}{48}(24) = 0.5$$

$$F'''(0,1) = -12 \qquad E_4 = \frac{h^4}{4!} F'''[0,1] = \frac{1}{384}(-12) = -0.03125$$

Luego, estos términos tienen un valor dado por

$$E_t = E_2 + E_3 + E_4 = -2.03125 \qquad (17)$$

La diferencia entre la solución numérica

$$y_1 = 1 + (0.5)\left(\frac{17}{2}\right) = 5.25$$

y la solución exacta

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 10x^2 + \frac{17}{2}x + 1$$

evaluada en x=0.5

$$y(0.5) = 3.21875$$

es justamente (17)

$$y_1 - y(0.5) = 5.25 - 3.21875 = 2.03125 = E_t$$

Este error se denomina *<u>error de truncamiento global</u>* y corresponde a los términos despreciados del desarrollo en serie de Taylor al construir el método de Euler.

Este error se escribe como

$$E_t = \frac{h^2}{2!} F'[x_0, y(x_0)] + \frac{h^3}{3!} F''[x_0, y(x_0)] + \ldots + O\left(h^{n+1}\right)$$

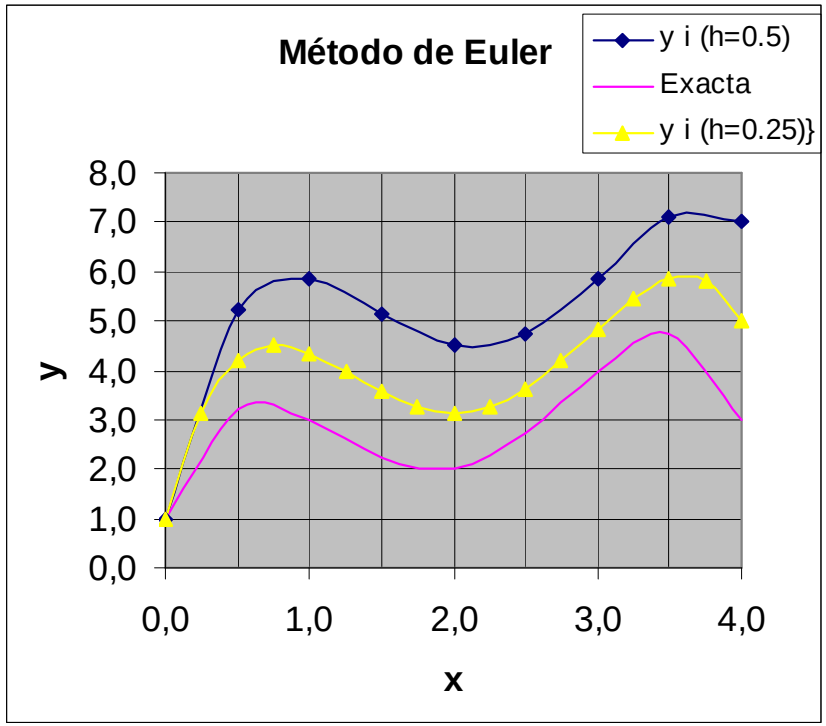
y, su orden de magnitud en el limite h->0 es el *<u>error de truncamiento local</u>*

$$E_{t,2} = \frac{h^2}{2!} F'[x_0, y(x_0)] = O\left(h^2\right)$$

En consecuencia si se desea reducir este error, una alternativa es la reducción del tamaño del paso.

Ejemplo.

Para el mismo problema anterior, estime la nueva solución numérica con un tamaño de paso h=0.25.



Reducciones del paso conducirán a una reducción en el error global. Sin embargo, la técnica es poco eficiente (requiere muchos pasos para obtener una buena aproximación de la solución). La tabla siguiente presenta el comportamiento del error total para valores

N	Error_Local (x=a+h)	Error Global Total	Error Relativo Global Total (%)
8	-2.5	4	133.3333333
80	-0.025	0.4	13.33333333
800	-0.00025	0.04	1.33333333
8000	-0.0000025	0.004	0.13333333
80000	-0.00000002	0.0004	0.01333333

Obsérvese la disminución proporcional a h^2 (h=(b-a)/N) del error Local y a h del error global respectivamente.

Método de Euler

Es posible probar que el error global del método de Euler es, en general, proporcional a h, por lo que es denominado un método de 1er orden (Carnahan *et al.*, disponible en mi oficina)

Para fines prácticos existen numerosos algoritmos desarrollados para implementar métodos numéricos. En general cualquier libro de análisis numérico contiene los métodos de uso estándar. En particular, recordamos que el texto de Burden & Faires de Análisis Numérico contiene una buena cantidad de ellos.

Método de Euler

ALGORITMO 5.1

Método de Euler

Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha,$$

en $(N + 1)$ números uniformemente espaciados en el intervalo $[a, b]$:

ENTRADA extremos a, b; entero N; condición inicial α.

SALIDA aproximación w a y en los $(N + 1)$ valores de t.

Paso 1 Tome $h = (b - a)/N$;
$t = a$;
$w = \alpha$;
SALIDA (t, w).

Paso 2 Para $i = 1, 2, \ldots, N$ haga pasos 3, 4.

Paso 3 Haga $w = w + hf(t, w)$; (*Calcule* w_i.)
$t = a + ih$. (*Calcule* t_i.)

Paso 4 SALIDA (t, w).

Paso 5 PARE.

Método de Heun

```
% Programa Euler
% Para aproximar la solución del problema de valor inicial
%
% y' =f(t,y), a <= t <= b, y(a) = alfa
%
% en (N+1) números uniformemente espaciados en el intervalo
[a,b]
%
% Entrada: extremos a,b, entero N; condición inicial alfa, función
f(t,y)
% Salida: aproximación w a y en los (N+1) valores de t

% ENTRADA
% Función f(t,y)
f=inline('-2*t^3+12*t^2-20*t+17/2','t','y');
a=0;
b=4;
N=8;
alfa=1;

% Paso 1 Toma h=(b-a)/N
h=(b-a)/N;
%           t=a;
t=a;
%           w=alfa;
w=alfa;
%       SALIDA(t,w)
disp([t w])
% Paso 2 Para i=1,2,...,N haga pasos 3,4
for i=1:N
   % Paso 3 Haga w=w+hf(t,w);
      w = w + h*f(t,w);   % calcule wi
      t = a + i*h;        % calcule ti
     disp([t w])
end
```

Método de Heun

Una mejora al método de Euler la constituye el método de Heun.

La pendiente al inicio del intervalo [i, i+1] en el método de Euler viene dada por

$$y_i' = F(x_i, y_i)$$

para calcular la aproximación a y al final del intervalo como

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$$

En el método de Heun, esta aproximación no es la respuesta final sino una primera predicción dada por

$$y_{i+1}^0 = y_i + hF(x_i, y_i) \qquad (18)$$

Método de Heun

La ecuación (18) es denominada *ecuación predictora* y permite calcular la derivada al final del intervalo

$$y'_{i+1} = F\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)$$

Luego, ambas pendientes se utilizan para calcular la pendiente promedio del intervalo

$$y' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{F\left(x_i, y_i\right) + F\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}$$

Para calcular el valor de y_{i+1} al final del intervalo como (*ecuación correctora*)

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{F\left(x_i, y_i\right) + F\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}\right] \qquad (19)$$

Método de Heun

En forma resumida tenemos:

$$y_{i+1}^{0} = y_i + hF\left(x_i, y_i\right) \qquad \text{Predictor} \quad (18)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{F\left(x_i, y_i\right) + F\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{0}\right)}{2}\right] \qquad \text{Corrector} \quad (19)$$

Nótese que el corrector es una relación de recurrencia. Esto quiere decir que puede iterarse sobre ella misma sustituyendo las diferentes aproximaciones a y_{i+1} para afinar la solución.

Ejemplo.

Con el método de Heun integre la EDO

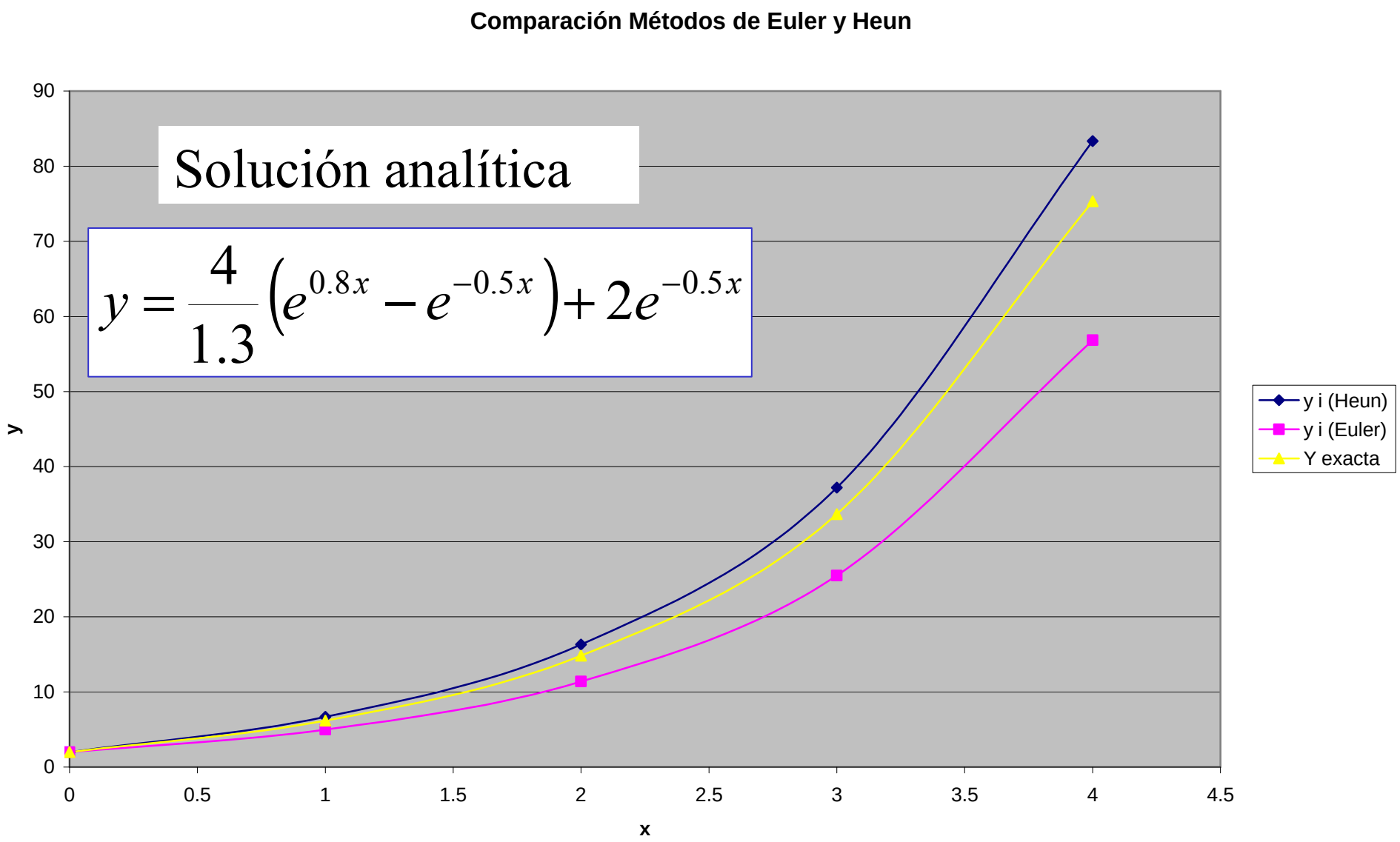
$$\frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - \frac{1}{2}y$$

en el intervalo [0,4] con un tamaño de paso h=1. La condición inicial es en x=0, y=2.

La aplicación del método de Heun lleva a:

x i	y i	Pendiente Origen	Predictor	Pendiente Fin	Nueva Pendiente	Corrector	Y exacta	Error (%)
0	2.0000	3.0000	5.0000	6.4022	4.7011	6.7011	2.0000	0.0000
1	6.7011	5.5516	12.2527	13.6858	9.6187	16.3198	6.1946	-8.1756
2	16.3198	11.6522	27.9720	30.1067	20.8795	37.1992	14.8439	-9.9425
3	37.1992	25.4931	62.6923	66.7840	46.1385	83.3378	33.6772	-10.4584
4	83.3378	56.4612	139.7990	148.4931	102.4772	185.8149	75.3390	-10.6171

Método de Heun



Métodos de Taylor de Orden Superior

Si se desea incrementar la precisión en la estimación de la solución, una alternativa es la utilización de un mayor número de términos en la aproximación de la serie de Taylor.

En general, un método de Taylor de orden p viene dado por

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} y_i^{(j)} \qquad (20)$$

El método de Euler es, en consecuencia, un método de Taylor de orden 1.

Sin embargo, la evaluación de las derivadas en (20) es un proceso tedioso, por lo que el procedimiento se utiliza poco en la práctica.

Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta logran la exactitud de los métodos de Taylor sin necesitar del cálculo de derivadas de orden superior. Su base es la ecuación

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{21}$$

en donde la función incremento, ϕ, es una pendiente representativa en el intervalo.

En forma general, la función incremento se escribe como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n \tag{22}$$

donde las a_i son constantes y las k_i son

Métodos de Runge-Kutta

$$k_1 = F(x_i, y_i) \tag{23a}$$

$$k_2 = F(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \tag{23b}$$

$$k_3 = F(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \tag{23c}$$

$$\vdots$$

$$k_n = F(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \ldots + q_{n-1,2} k_{n-1} h) \tag{23d}$$

donde las p_i y las q_{ij} son constantes. Nótese que las k son relaciones de recurrencia, lo cual hace a los métodos de Runge-Kutta muy eficientes computacionalmente.

Método de Runge-Kutta de orden 2

El método de Euler constituye el método de Runge-Kutta de orden 1 (Ec. 23a).

El método de RK de 2do orden viene dado por (21)

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{24}$$

con

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

quedando

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{25}$$

y

$$k_1 = F(x_i, y_i)$$

$$k_2 = F(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Método de Runge-Kutta de orden 2

Los valores de p_1 y las q_{11} se obtienen de igualar la ecuación (21) con la expansión de Taylor hasta el término de orden 2, como se muestra a continuación.

La serie de Taylor en 2do orden para y se escribe como

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!} F(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} F'(x_i, y_i) \tag{26}$$

donde la derivada debe calcularse según

$$F'(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \tag{27}$$

Sustituyendo (27) en (26) tenemos

Método de Runge-Kutta de orden 2

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] \qquad (28)$$

Por otra parte, utilizando las definiciones de los k_j, la ecuación (25) se puede escribir como

$$y_{i+1} = y_i + \left(a_1 k_1 + a_2 k_2\right)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 F(x_i, y_i) + a_2\left(F(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)\right)\right]h \qquad (29)$$

Expandiendo en serie de Taylor hasta el 1er orden a

$$F(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = F(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial F}{\partial x} + q_{11} k_1 h \frac{\partial F}{\partial y} + O(h^2)$$

Método de Runge-Kutta de orden 2

Sustiuyendo en (29) llegamos a

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 F(x_i, y_i) + a_2 \left(F(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial F}{\partial x} + q_{11} k_1 h \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] h$$

Reagrupando,

$$y_{i+1} = y_i + \left[(a_1 + a_2) F(x_i, y_i) h + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial F}{\partial x} + a_2 q_{11} k_1 h^2 \frac{\partial F}{\partial y} \right] \quad (30)$$

Comparando (30) con (28) ,

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial F}{\partial y} F(x_i, y_i) \quad (28)$$

Obtenemos las ecuaciones,

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = 1/2 \qquad a_2 q_{11} = 1/2 \quad (31)$$

Método de Runge-Kutta de orden 2

Las ecuaciones (31) constituyen un sistema con infinitas soluciones: dada una constante cualquiera, las otras tres pueden ser obtenidas. Por ejemplo, si se especifica el valor de a_2, las otras constantes son:

$$a_1 = 1 - a_2 \qquad p_1 = 1/2a_2 \qquad q_{11} = 1/2a_2 \tag{32}$$

En consecuencia, existen un número infinito de métodos de RK de 2do orden según se elija el valor de a_2.

En particular, si escogemos $a_2 = 1/2$ tenemos

$$a_1 = 1/2$$

$$p_1 = q_{11} = 1$$

Método de Runge-Kutta de orden 2

Obteniendo

$$y_{i+1} = y_i + \left(a_1 k_1 + a_2 k_2\right)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

con

$$k_1 = F(x_i, y_i)$$

$$k_2 = F(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

siendo las pendientes al inicio y al final del intervalo respectivamente. Este método corresponde entonces al *método de Heun* sin iteraciones.

Método de Runge-Kutta de orden 2

Otra versión de este método se obtiene al tomar $a_2 = 1$

En ese caso tenemos

$$a_1 = 0 \qquad p_1 = q_{11} = 1/2$$

con

$$k_1 = F(x_i, y_i) \qquad k_2 = F(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

para llegar a

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h \tag{33}$$

el cual es conocido como el *método del punto medio*.

Método de Runge-Kutta de orden 4

La versión mas popular de los métodos de RK es el de orden 4. La versión clásica del mismo corresponde a la aproximación

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h \tag{34}$$

con

$$k_1 = F(x_i, y_i) \tag{35a}$$

$$k_2 = F(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \tag{35b}$$

$$k_3 = F(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \tag{35c}$$

$$k_4 = F(x_i + h, y_i + k_3 h) \tag{35d}$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

Ejemplo: Integre, utilizando un método de RK de orden 4 la EDO

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 1$$

para x en [0,2], tamaño de paso h=0.2 y con la condición inicial $y(0)$=0.5.

Utilizando la versión clásica del método de RK de orden 4 tenemos que:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

donde las constantes son dadas por:

$$k_1 = F(x_i, y_i) \qquad k_2 = F(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = F(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \qquad k_4 = F(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Para calcular el valor y_1, que corresponde a x=0+h=0.2 tendremos, calculando los k_j de manera sucesiva

$$\boxed{k_1 = F(x_0, y_0) = F(0,0.5) = 0.5 - 0^2 + 1 = \underline{1.5}}$$

$$k_2 = F(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1 h) = F(0 + \frac{1}{2}0.2, 0.5 + \frac{1}{2}(1.5).(0.2))$$

$$k_2 = F(0.1, 0.65) = 0.65 - 0.1^2 + 1 = \underline{1.64}$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

$$k_3 = F(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2 h) = F(0 + \frac{1}{2}0.2, 0.5 + \frac{1}{2}(1.64)0.2)$$

$$k_3 = F(0.1, 0.664) = 0.664 - 0.1^2 + 1 = \underline{1.654}$$

$$k_4 = F(x_0 + h, y_0 + k_3 h) = F(0 + 0.2, 0.5 + (1.654)0.2)$$

$$k_4 = F(0.2, 0.8308) = 0.8308 - 0.2^2 + 1 = \underline{1.7908}$$

Luego, el valor y_1, viene dado por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(1.5 + 2x1.64 + 2x1.654 + 1.7908)0.2$$

$$y_1 = 0.5 + \frac{1}{6}(1.5 + 2x1.64 + 2x1.654 + 1.7908)0.2 = \underline{0.829}$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

Una vez calculado y_1, pasamos a calcular y_2

$$k_1 = F(x_1, y_1) = F(0.2, 0.829) = 0.829 - 0.2^2 + 1 = 1.789$$

$$k_2 = F(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1 h) = F(0.2 + \frac{1}{2}0.2, 0.829 + \frac{1}{2}(1.789).(0.2))$$

$$k_2 = F(0.3, 1.0079) = 1.0079 - 0.3^2 + 1 = 1.9179$$

$$k_3 = F(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2 h) = F(0.2 + \frac{1}{2}0.2, 0.829 + \frac{1}{2}(1.9179)0.2)$$

$$k_3 = F(0.3, 1.02079) = 1.02079 - 0.3^2 + 1 = 1.9307$$

$$k_4 = F(x_1 + h, y_1 + k_3 h) = F(0.2 + 0.2, 0.829 + (1.9307)0.2)$$

$$k_4 = F(0.4, 1.2152) = 1.2152 - 0.4^2 + 1 = 2.0552$$

$$y_2 = 0.829 + \frac{1}{6}(1.789 + 2x1.9179 + 2x1.9307 + 2.0552)0.2 = 1.2137$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

Luego, se continúan calculando los valores en los otros puntos del dominio en el que se desea obtener la solución numérica.

La tabla siguiente presenta los resultados obtenidos.

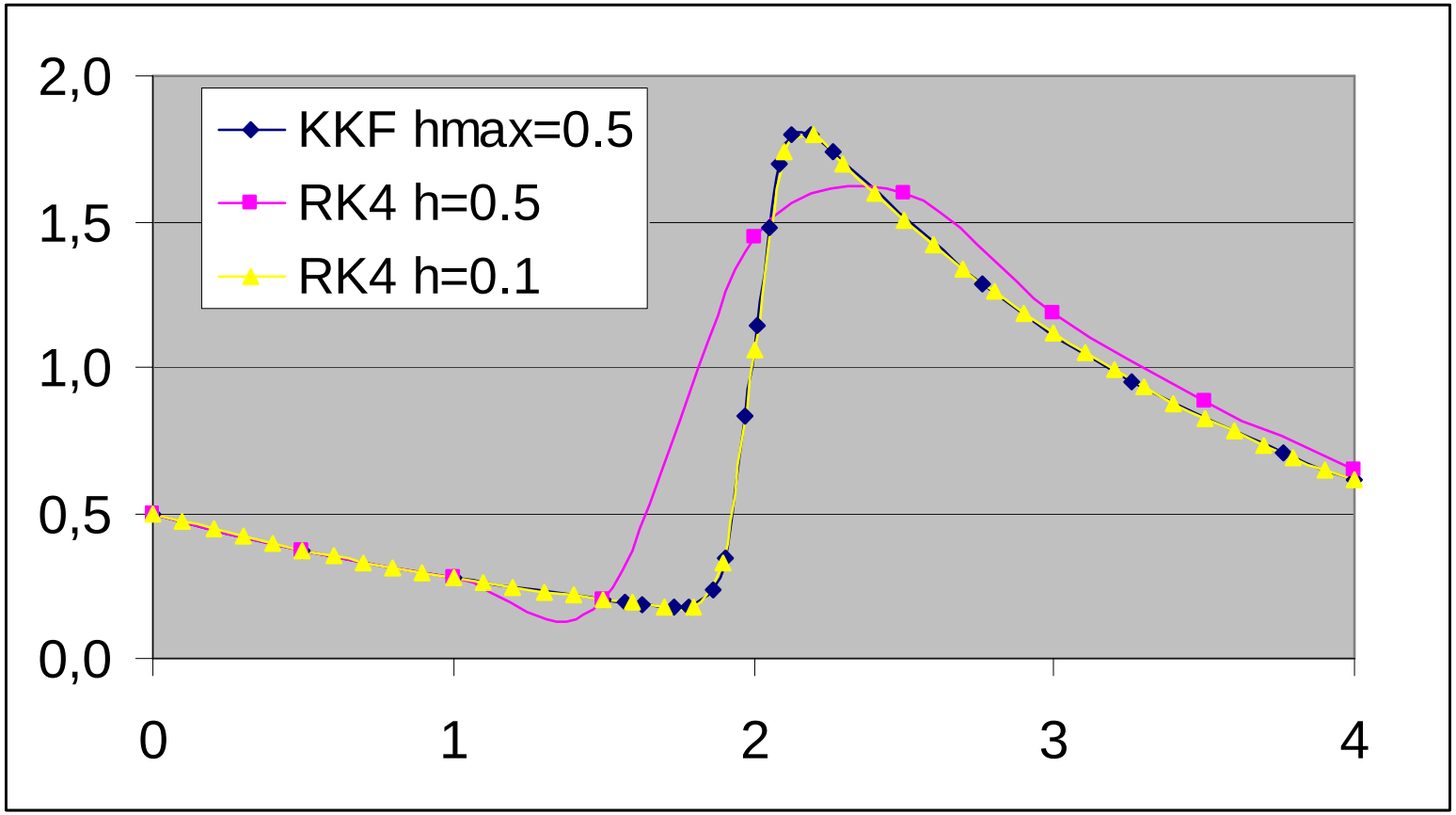
i	Xi	y_exacta	y(Xi)	k1	k2	k3	k4	y(X(i+1))
0	0,000	0,500	0,500	1,500	1,640	1,654	1,791	0,829
1	0,200	0,829	0,829	1,789	1,918	1,931	2,056	1,214
2	0,400	1,214	1,214	2,054	2,169	2,181	2,290	1,649
3	0,600	1,649	1,649	2,289	2,388	2,398	2,488	2,127
4	0,800	2,127	2,127	2,487	2,566	2,574	2,642	2,641
5	1,000	2,641	2,641	2,641	2,695	2,700	2,741	3,180
6	1,200	3,180	3,180	2,740	2,764	2,766	2,773	3,732
7	1,400	3,732	3,732	2,772	2,760	2,758	2,724	4,283
8	1,600	4,283	4,283	2,723	2,666	2,660	2,575	4,815
9	1,800	4,815	4,815	2,575	2,463	2,451	2,305	5,305
10	2,000	5,305	5,305					

Método de Runge-Kutta de orden 4

El error cometido en cada paso se presenta en la tabla siguiente

i	Xi	y_exacta	y(Xi)	Error
0	0,0	0,5000000	0,5000000	0,0000000
1	0,2	0,8292986	0,8292933	0,0000053
2	0,4	1,2140877	1,2140762	0,0000114
3	0,6	1,6489406	1,6489220	0,0000186
4	0,8	2,1272295	2,1272027	0,0000269
5	1,0	2,6408591	2,6408227	0,0000364
6	1,2	3,1799415	3,1798942	0,0000474
7	1,4	3,7324000	3,7323401	0,0000599
8	1,6	4,2834838	4,2834095	0,0000743
9	1,8	4,8151763	4,8150857	0,0000906
10	2,0	5,3054720	5,3053630	0,0001089

Método de Runge-Kutta-Fehlberg



Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

Los métodos multipasos utilizan la información ya generada en los pasos ya efectuados ($j<=i$) para el cálculo de la aproximación de la solución ($j=i+1$).

Estos métodos pueden ser *explícitos* si utilizan solo la información ya generada ($j<=i$) o *implícitos* si utilizan, de alguna manera, la información a generar en el punto en el que se desea calcular la aproximación ($j=i+1$).

Para derivar los métodos multipasos, nótese que, el método de Euler genera la aproximación de la solución de la ecuación

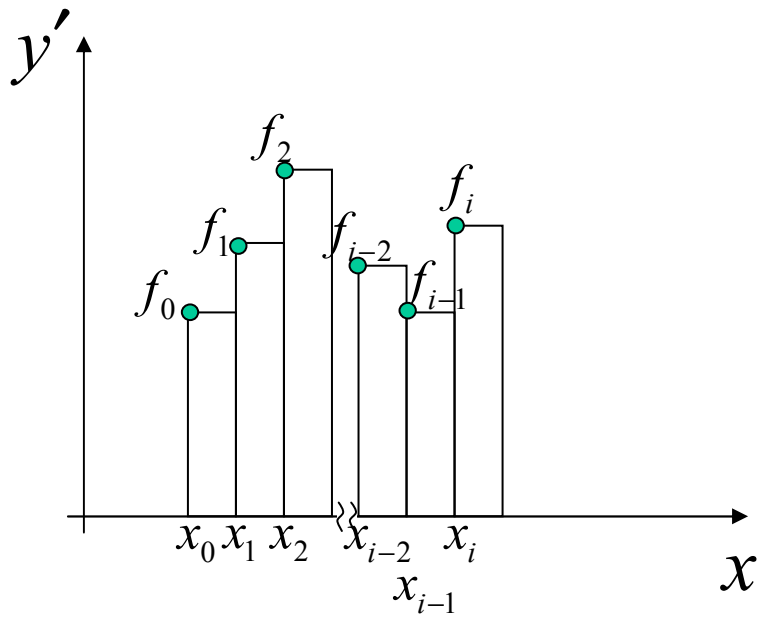
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y_0 = y(x_0) \qquad\qquad f(x_0, y_0) = f_0$$

integrando sucesivamente

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f_0 dx$$

$$y_2 = y_1 + \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i dx$$

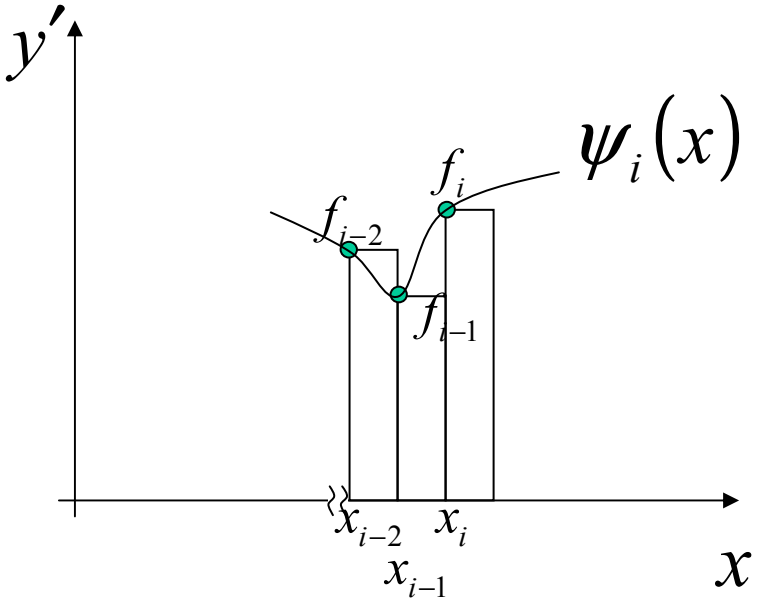


La integración sólo incluye el último valor ya calculado. Si deseamos aprovechar otros valores e incrementar la precisión es intuitivo escribir,

$$y_{i+1} = y_{i-k} + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} f_{i-k}\,dx$$

Si se aproxima la función f por una función que pase por los puntos ya calculados tendremos

$$y_{i+1} = y_{i-k} + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} \psi_i(x)\,dx$$



Los candidatos naturales son entonces los conocidos polinomios interpolantes. En el caso que nos ocupa, utilizaremos la *fórmula de las diferencias regresivas de Newton o fórmula hacia atrás de Newton-Gregory*.

Del capítulo I tenemos que la fórmula de las diferencias regresivas de Newton es dada por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

donde

$$\binom{-s}{k} = (-1)^k \frac{s(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!}$$

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}$$

$$\nabla^2 p_n = \nabla p_n - \nabla p_{n-1}$$

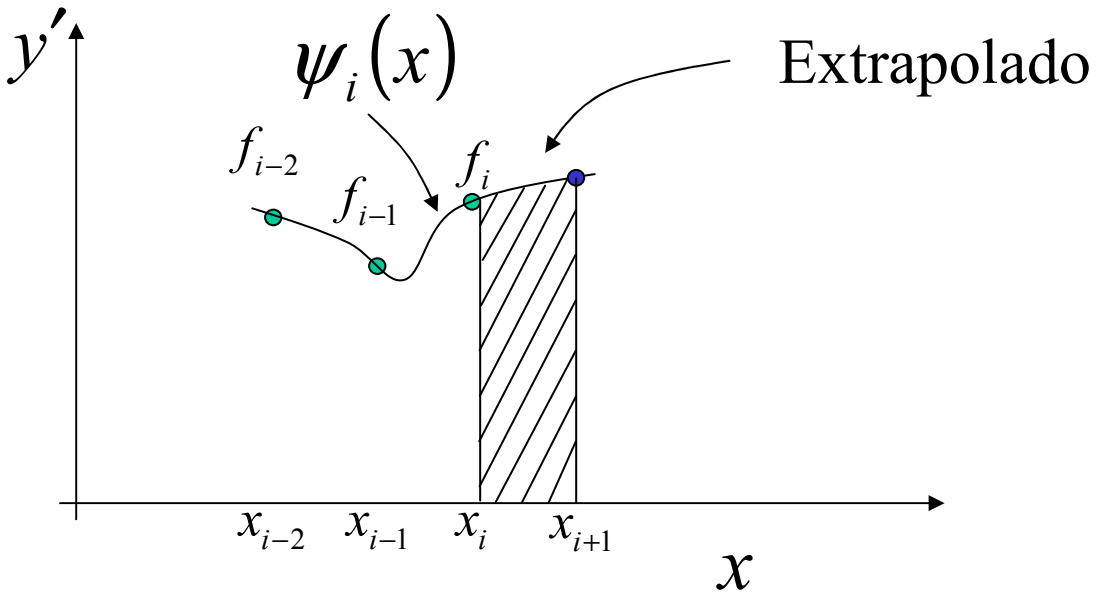
$$\nabla^k p_n = \nabla\left(\nabla^{k-1} p_n\right), k \geq 2$$

$$x = x_n + sh$$

En el caso *del método explícito de Adam-Bashforth* de *m* pasos escribimos

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{m-1}(x)dx$$

donde $P_{m\text{-}1}(x)$ pasa por los puntos (x_i,y_i), $(x_{i\text{-}1},y_{i\text{-}1})$,..., $(x_{i\text{-}m+1},y_{i\text{-}m+1})$.



Entonces, utilizando la fórmula de las diferencias regresivas de Newton podemos escribir

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_i, y_i) dx$$

Ahora bien, en $x=x_i$, $s=0$ y en $x=x_{i+1}$, $s=1$ ($x=x_n+sh$). Luego

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \nabla^k f(x_i, y_i) \int_0^1 \binom{-s}{k} h ds$$

Calculemos los primeros valores de

$$\binom{-s}{k}$$

Tendremos

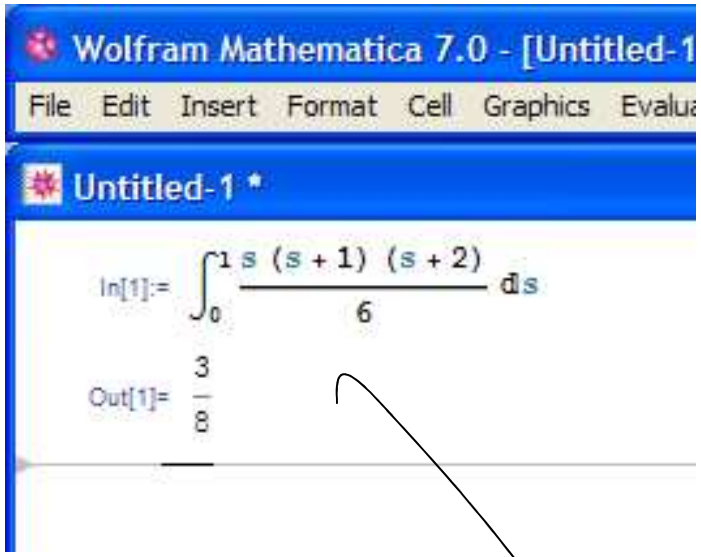
$$\binom{-s}{k} = (-1)^k \frac{s(s+1)....(s+k-1)}{k!}$$

$$\boxed{\binom{-s}{0} = 1} \qquad \boxed{\binom{-s}{1} = (-1)^1 \frac{s}{1!} = -s}$$

$$\boxed{\binom{-s}{2} = (-1)^2 \frac{s(s+1)}{2!} = \frac{s(s+1)}{2}}$$

$$\boxed{\binom{-s}{3} = (-1)^3 \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} = -\frac{s(s+1)(s+2)}{6}}$$

Las integrales ahora se calculan fácilmente. Por ejemplo,



$$\int_0^1 \binom{-s}{0} ds = \int_0^1 ds = 1$$

$$\int_0^1 \binom{-s}{1} ds = -\int_0^1 s\,ds = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \binom{-s}{2} ds = \int_0^1 \frac{s(s+1)}{2!} ds = \frac{1}{2}\left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\int_0^1 \binom{-s}{3} ds = -\int_0^1 \frac{s(s+1)(s+2)}{6} ds = -\frac{3}{8}$$

Luego,

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \nabla^k f(x_i, y_i) \int_0^1 \binom{-s}{k} h\,ds$$

puede expresarse como

$$y_{i+1} = y_i + (-1)^0 \nabla^0 f(x_i, y_i) \int_0^1 \binom{-s}{0} h\,ds + (-1)^1 \nabla f(x_i, y_i) \int_0^1 \binom{-s}{1} h\,ds +$$

$$+ (-1)^2 \nabla^2 f(x_i, y_i) \int_0^1 \binom{-s}{2} h\,ds + (-1)^3 \nabla^3 f(x_i, y_i) \int_0^1 \binom{-s}{3} h\,ds + \ldots$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} \nabla f(x_i, y_i) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(x_i, y_i) + \frac{3}{8} \nabla^3 f(x_i, y_i) + \ldots \right.$$

Esta expresión es la base de los métodos explícitos de Adams-Bashforth.

El *método explícito de Adams-Bashforth* de dos pasos es dado por

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y_i) \right]$$

que se reduce a

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h\left[f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right]$$

y, reagrupando

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h\left[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right]}$$

El método explícito Adams-Bashforth de tres pasos es dado por

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y_i) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(x_i, y_i) \right]$$

que se reduce a

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h[f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] +$$

$$+ \frac{5}{12}h[\nabla f(x_i, y_i) - \nabla f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h[f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] +$$

$$+ \frac{5}{12}h[f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

Reagrupando obtenemos

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left[23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})\right]}$$

De igual manera se obtiene el método explícito de Adams-Bashforth de cuatro pasos

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\right]}$$

En el caso del *método implícito de Adam-Moulton* de *m* pasos escribimos

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{m-1}(x)dx$$

donde ahora $P_{m\text{-}1}(x)$ pasa por los puntos (x_{i+1},y_{i+1}), (x_i,y_i),..., $(x_{i\text{-}m+2},y_{i\text{-}m+2})$.

Luego, podemos escribir

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_{i+1}, y_{i+1})dx$$

Ahora bien, en $x=x_{i+1}$, $s=0$ y en $x=x_i$, $s=-1$ ($x=x_n+sh$).

Luego

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \nabla^k f(x_{i+1}, y_{i+1}) \int_{-1}^{0} \binom{-s}{k} h\,ds$$

Cada integral se evalúa según

$$\int_{-1}^{0} \binom{-s}{0} ds = \int_{-1}^{0} ds = 1$$

$$\int_{-1}^{0} \binom{-s}{1} ds = -\int_{-1}^{0} s\,ds = -\left.\frac{s^2}{2}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{0} \binom{-s}{2} ds = \int_{-1}^{0} \frac{s(s+1)}{2!} ds = \frac{1}{2}\left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{12}$$

$$\int_{-1}^{0} \binom{-s}{3} ds = \int_{-1}^{0} \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} ds = -\frac{1}{24}$$

Para obtener

$$y_{i+1} = y_i + (-1)^0 \nabla^0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) \int_{-1}^{0} \binom{-s}{0} h\,ds + (-1)^1 \nabla f(x_{i+1}, y_{i+1}) \int_{-1}^{0} \binom{-s}{k} h\,ds +$$

$$+ (-1)^2 \nabla^2 f(x_{i+1}, y_{i+1}) \int_{-1}^{0} \binom{-s}{2} h\,ds + (-1)^3 \nabla^3 f(x_{i+1}, y_{i+1}) \int_{-1}^{0} \binom{-s}{3} h\,ds + \ldots$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} \nabla f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{12} \nabla^2 f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{24} \nabla^3 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + \ldots \right.$$

Esta expresión es la base de los métodos implícitos de Adams-Moulton.

El *método implícito de Adams-Moulton de dos pasos* es dado por

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2}\nabla f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{12}\nabla^2 f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

que se reduce a

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2}h\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)\right] +$$

$$-\frac{1}{12}h\left[\nabla f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \nabla f(x_i, y_i)\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2}h\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)\right] +$$

$$-\frac{1}{12}h\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i) - f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})\right]$$

Reagrupando obtenemos

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left[5f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) + 8f\left(x_i, y_i\right) - f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)\right]}$$

que corresponde al método implícito de Adams-Moulton de dos pasos.

Similarmente, los métodos de Adams-Moulton de tres y cuatro pasos vienen dados respectivamente por

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) + 19f\left(x_i, y_i\right) - 5f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_{i-2}, y_{i-2}\right)\right]}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}\left[251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}\right]}$$

Nótese que en las expresiones de los métodos de Adams-Moulton aparece y_{i+1}, el valor buscado, en ambos lados. Luego, dependiendo de la expresión funcional de $f(x,y)$ y, en consecuencia, de la posibilidad de despejar y construir una expresión para y_{i+1} los métodos explícitos podrán ser utilizados.

Ejemplo. Integre la EDO

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 1$$

utilizando los métodos de Adams-Bashforth de cuatro pasos y el de Adams-Moulton de tres pasos, para x en [0,2], tamaño de paso h=0.2 y con la condición inicial $y(0)$=0.5

El método de Adams-Bashforth de cuatro pasos es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\right]$$

que se reduce al sustituir f(x,y)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[55\left(y_i - x_i^2 + 1\right) - 59\left(y_{i-1} - x_{i-1}^2 + 1\right) + 37\left(y_{i-2} - x_{i-2}^2 + 1\right) - 9\left(y_{i-3} - x_{i-3}^2 + 1\right)\right]$$

Para calcular y_i, i>3 necesitamos las aproximaciones en i=0,1,2 y 3. Una opción es obtenerlas a partir de la utilización de un método de Runge-Kutta de alto orden (ver ejemplo anterior) en ese caso, tenemos

$$y_0 = 0.5 \qquad y_1 = 0.829293 \qquad y_2 = 1.2140762 \qquad y_3 = 1.6489220$$

pudiendo emplearse para calcular las aproximaciones a la solución para i>3.

En el caso del método implícito tendremos que

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) + 19f\left(x_i, y_i\right) - 5f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_{i-2}, y_{i-2}\right)\right]$$

que se expresa como

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9\left(y_{i+1} - x_{i+1}^2 + 1\right) + 19\left(y_i - x_i^2 + 1\right) - 5\left(y_{i-1} - x_{i-1}^2 + 1\right) + \left(y_{i-2} - x_{i-2}^2 + 1\right)\right]$$

Despejando y_{i+1} obtenemos

$$y_{i+1} = \frac{y_i + \frac{h}{24}\left[9\left(-x_{i+1}^2 + 1\right) + 19\left(y_i - x_i^2 + 1\right) - 5\left(y_{i-1} - x_{i-1}^2 + 1\right) + \left(y_{i-2} - x_{i-2}^2 + 1\right)\right]}{\left(1 - \frac{9h}{24}\right)}$$

Similarmente al caso anterior, podemos utilizar los valores arrojados por el método de RK4 para i=0,1 y 2 para obtener la aproximación buscada.

Provienen de RK4

i	Xi	y(Xi)	Adams-Bashforth	Diferencia	Adams-Moulton	Diferencia
0	0,000	0,5000000	0,5000000		0,5000000	
1	0,200	0,8292986	0,8292986		0,8292986	
2	0,400	1,2140877	1,2140877		1,2140877	
3	0,600	1,6489406	1,6489406		1,6489342	
4	0,800	2,1272295	2,1273123	0,0000828	2,1272137	0,0000159
5	1,000	2,6408591	2,6410810	0,0002219	2,6408299	0,0000292
6	1,200	3,1799415	3,1803480	0,0004065	3,1798938	0,0000477
7	1,400	3,7324000	3,7330601	0,0006601	3,7323271	0,0000729
8	1,600	4,2834838	4,2844931	0,0010093	4,2833768	0,0001070
9	1,800	4,8151763	4,8166574	0,0014812	4,8150238	0,0001525
10	2,000	5,3054720	5,3075837	0,0021118	5,3052590	0,0002130

Solución exacta

Notese que el error del método implícito es menor que el del método explícito, lo cual ocurre en general.

Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

Sistemas de Ecuaciones

Cuando se plantea un sistema de EDO

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

con sus respectivas condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)} \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)} \qquad\qquad y_n(x_0) = y_n^{(0)}$$

Sistemas de Ecuaciones

Las soluciones se obtienen procediendo como en los casos de EDO individuales, pero de manera acoplada.

<u>Ejemplo</u>. Resuelva el siguiente sistema de EDO

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1 \qquad y_1(0) = 4$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.1y_1 - 0.3y_2 \qquad y_2(0) = 6$$

con el método de Euler, con tamaño de paso h=0.5.

El método de Euler se escribe como

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + hf\left[x_i, y_1(x_i), y_2(x_i), \ldots, y_n(x_i)\right]$$

Sistemas de Ecuaciones

Aplicado, para calcular el primer paso, a la 1^{era} EDO tenemos

$$y_{1,1} = y_{1,0} + h\left[-0.5y_{1,0}\right]$$

$$y_{1,1} = 4 + 0.5\left[-0.5(4)\right] = 3$$

Ahora, se aplica a la 2da ecuación

$$y_{2,1} = y_{2,0} + h\left[4 - 0.1y_{1,0} - 0.3y_{2,0}\right]$$

$$y_{2,1} = 6 + 0.5\left[4 - 0.1(4) - 0.3(6)\right] = 6.9$$

De manera similar

$$y_{1,2} = y_{1,1} + h\left[-0.5y_{1,1}\right] = 3 + 0.5\left[-0.5(3)\right] = 2.25$$

$$y_{2,2} = y_{2,1} + h\left[4 - 0.1y_{1,1} - 0.3y_{2,1}\right] = 6.9 + 0.5\left[4 - 0.1(3) - 0.3(6.9)\right] = 7.715$$

Luego, al concluir tenemos

i	x	y1	y2
0	0	4,000000	6,000000
1	0,5	3,000000	6,900000
2	1	2,250000	7,715000
3	1,5	1,687500	8,445250
4	2	1,265625	9,094088

Este procedimiento puede ampliarse para métodos mas precisos tales como los de Runge-Kutta.

Para ello, consideremos el RK4 clásico dado por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h \qquad (34)$$

donde las constantes están dadas por

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{35a}$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \tag{35b}$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \tag{35c}$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) \tag{35d}$$

que se utiliza para resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad a \le x \le b \qquad y(a) = y_0 \tag{64}$$

Para aplicar este método a sistemas de EDO definimos

Sistemas de Ecuaciones

los N+1 puntos de red donde calcularemos la solución por

$$x_i = x_0 + ih$$

con

$$h = \frac{b-a}{N}$$

y el sist. de ec. (y sus cond. iniciales) dado por

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad y_1(x_0) = y_1^{(0)}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad y_2(x_0) = y_2^{(0)}$$

$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \qquad y_m(x_0) = y_m^{(0)}$$

Sistemas de Ecuaciones

Como en el ejemplo anterior la expresión $y_{j,i}$ es el valor aproximado de la solución j en el punto i. Luego, las constantes $k_{1,j}$ se calculan, para cada j, de acuerdo a

$$k_{1,j} = f_j(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{m,i}) \qquad j = 1, \ldots, m$$

Luego, se calculan todos los $k_{2,j}$ utilizando

$$k_{2,j} = f_j(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}h, y_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}h, \ldots, y_{m,i} + \frac{1}{2}k_{1,m}h)$$

El proceso se repite para $k_{3,j}$ y $k_{4,j}$ según

$$k_{3,j} = f_j(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}h, y_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}h, \ldots, y_{m,i} + \frac{1}{2}k_{2,m}h)$$

$$k_{4,j} = f_j(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}h, y_{2,i} + k_{3,2}h, \ldots, y_{m,i} + k_{3,m}h)$$

Entonces, hacemos avanzar la solución utilizando

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{1}{6}\left(k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}\right)h \quad j = 1,\ldots,m$$

<u>Ejemplo</u>. Resuelva el siguiente sistema de EDO

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1 \qquad y_1(0) = 4$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.1y_1 - 0.3y_2 \qquad y_2(0) = 6$$

con el método de RK4 clásico, con tamaño de paso h=0.5.

En el primer intervalo tenemos

$$k_{1,1} = f_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = f_1(0,4,6) = -0.5(4) = -2$$

$$k_{1,2} = f_2(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = f_2(0,4,6) = 4 - 0.1(4) - 0.3(6) = 1.8$$

Sistemas de Ecuaciones

Una vez calculadas todas las $k_{1,j}$, procedemos con las $k_{2,j}$

$$k_{2,1} = f_1(x_0 + \frac{1}{2}h, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}h, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}h)$$

$$= f_1(0 + \frac{1}{2}0.5, 4 + \frac{1}{2}(-2)0.5, 6 + \frac{1}{2}(1.8)0.5)$$

$$k_{2,1} = f_1(0.25, 3.5, 6.45) = -0.5 * 3.5 = -1.75$$

$$k_{2,2} = f_2(0.25, 3.5, 6.45) = 4 - 0.1 * 3.5 - 0.3 * 6.45$$

$$k_{2,2} = 1.715$$

Luego, se obtienen todas las $k_{3,j}$,

$$k_{3,j} = f_j(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}h, y_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}h, \ldots, y_{m,i} + \frac{1}{2}k_{2,m}h)$$

$$k_{3,1} = f_1(x_0 + \frac{1}{2}h, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}h, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}h)$$

$$k_{3,1} = f_1(0 + \frac{1}{2}0.5, 4 + \frac{1}{2}(-1.75)0.5, 6 + \frac{1}{2}(1.715)0.5)$$

$$k_{3,1} = f_1(0.25, 3.5625, 6.42875)0 = -0.5 * 3.5625 = -1.78125$$

$$k_{3,2} = f_{\acute{e}}(0.25, 3.5625, 6.42875)$$

$$k_{3,2} = 4 - 0.1 * 3.5625 - 0.3 * 6.42875 = 1.715125$$

Sistemas de Ecuaciones

Finalmente se calculan las $k_{4,j}$,

$$k_{4,j} = f_j(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}h, y_{2,i} + k_{3,2}h, \ldots, y_{m,i} + k_{3,m}h)$$

$$k_{4,1} = f_1(x_0 + h, y_{1,0} + k_{3,1}h, y_{2,0} + k_{3,2}h)$$

$$k_{4,1} = f_1(0 + 0.5, 4 - 1.78125 * 0.5, 6 + 1.715125 * 0.5)$$

$$k_{4,1} = f_1(0.5, 3.109375, 6.8575625) =$$

$$k_{4,1} = -0.5 * 3.109375 = -1.5546875$$

$$k_{4,2} = f_2(0.5, 3.109375, 6.8575625)$$

$$k_{4,2} = 4 - 0.1 * 3.109375 - 0.3 * 6.8575625 = 1.63179375$$

Luego, se avanzan las soluciones al punto 1

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{1}{6}\left(k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}\right)h$$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{6}\left(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right)h$$

$$y_{1,1} = 4 + \frac{1}{6}\left(-2.0000 + 2\left(-1.7500\right) + 2\left(-1.7813\right) + \left(-1.5547\right)\right)0.5$$

$$y_{1,1} = 3.1152$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{6}\left(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}\right)h$$

$$y_{2,1} = 6 + \frac{1}{6}\left(1.8000 + 2\left(1.7150\right) + 2\left(1.7151\right) + \left(1.6318\right)\right)0.5$$

$$y_{2,1} = 6.8577$$

Sistemas de Ecuaciones

Se continúan calculando los valores de y_1 y y_2 hasta cubrir el dominio.

La tabla presenta los resultados obtenidos hasta x=2

x	y1	y2	k11	k12	x+(1/2)h	y1+(1/2)k11h	y2+(1/2)k12h	k21	k22
0	4.0000	6.0000	-2.0000	1.8000	0.2500	3.5000	6.4500	-1.7500	1.7150
0.5	3.1152	6.8577	-1.5576	1.6312	0.7500	2.7258	7.2655	-1.3629	1.5478
1	2.4262	7.6321	-1.2131	1.4678	1.2500	2.1229	7.9990	-1.0614	1.3880
1.5	1.8895	8.3269	-0.9448	1.3130	1.7500	1.6533	8.6551	-0.8267	1.2381
2	1.4716	8.9469	-0.7358	1.1688	2.2500	1.2876	9.2391	-0.6438	1.0995

x+(1/2)h	y1+(1/2)k21h	y2+(1/2)k22h	k31	k32	x+h	y1+k31h	y2+k32h	k41	k42
0.2500	3.5625	6.4288	-1.7813	1.7151	0.5000	3.1094	6.8576	-1.5547	1.6318
0.7500	2.7745	7.2446	-1.3873	1.5492	1.0000	2.4216	7.6323	-1.2108	1.4682
1.2500	2.1608	7.9791	-1.0804	1.3902	1.5000	1.8860	8.3272	-0.9430	1.3132
1.7500	1.6829	8.6364	-0.8414	1.2408	2.0000	1.4688	8.9473	-0.7344	1.1689
2.2500	1.3106	9.2217	-0.6553	1.1024	2.5000	1.1439	9.4981	-0.5720	1.0362

Sistemas de Ecuaciones

Ejemplo 2: Suponga que el péndulo descrito en la introducción mide 2 pies de largo y que g=-32.17 pies/s^2. Con h=0.1s, compare el ángulo obtenido en el caso de los dos siguientes problemas de valor inicial cuando t=0, 1 y 2 s:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{L} sen\,\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{6}; \quad \theta'(0) = 0;$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{6}; \quad \theta'(0) = 0;$$

Resolvamos la primera EDO. Para ello hagamos

$$\frac{d\theta}{dt} = w$$

Luego, la EDO

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{L} sen\,\theta = 0, \qquad \theta(0) = \frac{\pi}{6}; \qquad \theta'(0) = 0;$$

se reduce al sistema de ecuaciones diferenciales de 1er orden

$$\frac{d\theta}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{L} sen\,\theta$$

Luego, utilizando la notación

$$\theta = y_1$$

$$\omega = y_2$$

tenemos

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{g}{L} sen(y_1)$$

con las condiciones iniciales

$$y_1(0) = \frac{\pi}{6}; \qquad y_2(0) = 0;$$

Sistemas de Ecuaciones

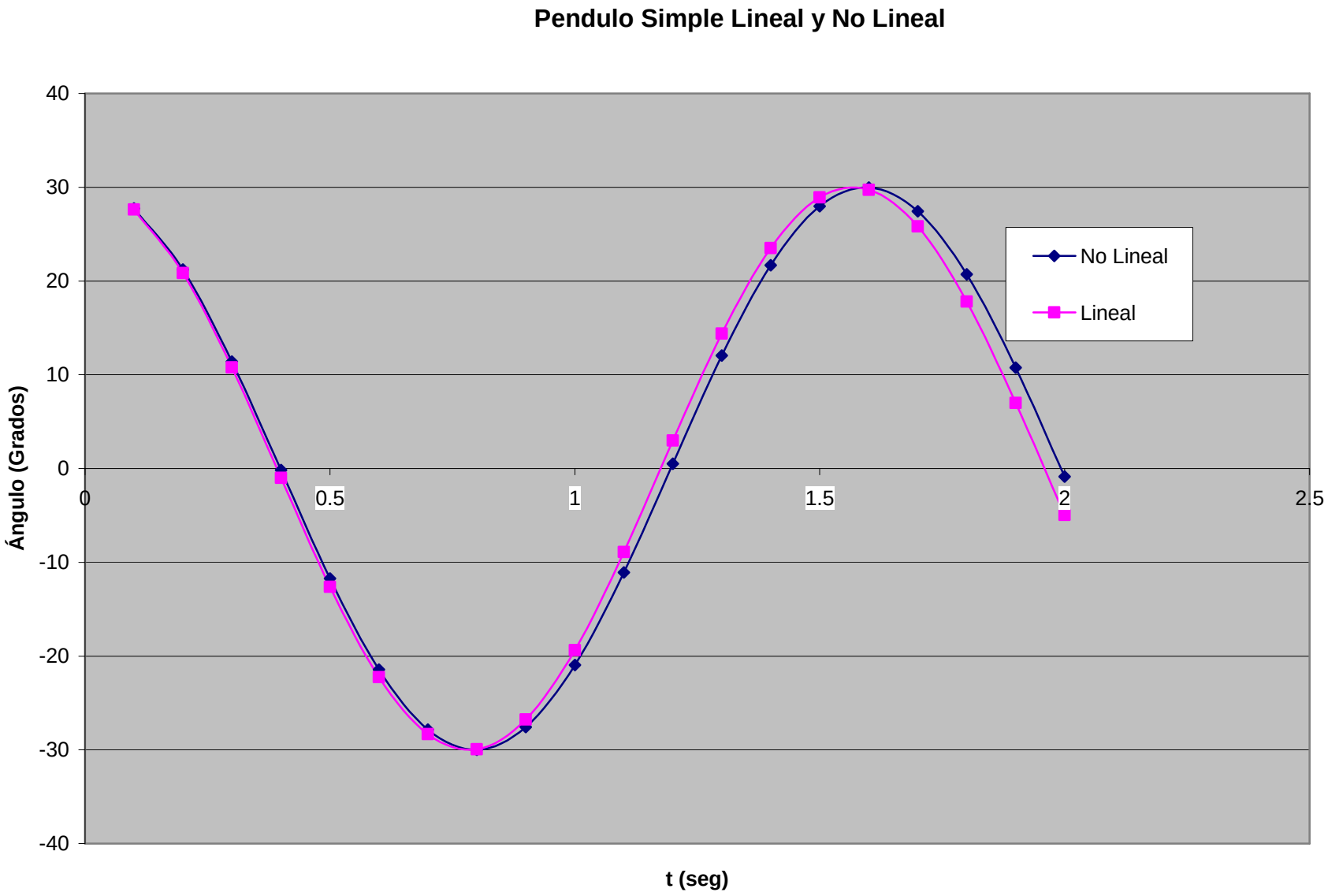
Este sistema puede ser resuelto utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El siguiente archivo muestra un programa en MATLAB

```
% Ejemplo de solución de una ecuación
diferencial ordinaria de orden 2
clear all
h = 0.1;        % s
t_0=0;
t_f=2;

Theta_0=pi/6;
Utheta_0=0;
y1_0=Theta_0;
y2_0=Utheta_0;

f1 = inline('y2','t','y1','y2');
f2 = inline('(-32.17/2)*sin(y1)','t','y1','y2');
n=(t_f-t_0)/h;
t=t_0;
y1=y1_0;
y2=y2_0;
disp('      t      Theta    Utheta')
for i=1:n
   k11=f1(t,y1,y2);
   k12=f2(t,y1,y2);

   k21=f1(t+h/2,y1+k11*h/2,y2+k12*h/2);
   k22=f2(t+h/2,y1+k11*h/2,y2+k12*h/2);

   k31=f1(t+h/2,y1+k21*h/2,y2+k22*h/2);
   k32=f2(t+h/2,y1+k21*h/2,y2+k22*h/2);

   k41=f1(t+h,y1+k31*h,y2+k32*h);
   k42=f2(t+h,y1+k31*h,y2+k32*h);

   y1=y1+(k11+2*k21+2*k31+k41)*h/6;
   y2=y2+(k12+2*k22+2*k32+k42)*h/6;
   t=t+h;
disp([t,y1*180/pi,y2])
end
```

Sistemas de Ecuaciones

Los resultados, considerando el otro caso ($g\theta/L$) se presentan a continuación

	g sin(Theta)/L		g (Theta)/L		Errores (%)	
t	No Lineal	Utheta	Lineal	Utheta	Theta	Utheta
0.1	27.7229	-0.7854	27.6196	-0.8196	0.37	-4.35
0.2	21.2131	-1.4594	20.8578	-1.5092	1.67	-3.41
0.3	11.4174	-1.9164	10.7876	-1.9593	5.52	-2.24
0.4	-0.1721	-2.0758	-0.9934	-2.0986	-477.22	-1.10
0.5	-11.7337	-1.907	-12.6161	-1.9049	-7.52	0.11
0.6	-21.4513	-1.4422	-22.2367	-1.4091	-3.66	2.30
0.7	-27.8469	-0.7636	-28.3293	-0.6897	-1.73	9.68
0.8	-29.9918	0.0233	-29.9274	0.139	0.21	-496.57
0.9	-27.5848	0.8069	-26.7778	0.9456	2.93	-17.19
1	-20.9647	1.4758	-19.3805	1.6022	7.56	-8.56
1.1	-11.0957	1.9252	-8.9091	2.0045	19.71	-4.12
1.2	0.5171	2.0751	2.975	2.0889	-475.32	-0.67
1.3	12.0476	1.897	14.3866	1.8419	-19.41	2.90
1.4	21.6853	1.4248	23.5152	1.3027	-8.44	8.57
1.5	27.9663	0.7416	28.9129	0.5568	-3.38	24.92
1.6	29.9798	-0.0467	29.7236	-0.2773	0.85	-493.79
1.7	27.4429	-0.8283	25.819	-1.0674	5.92	-28.87
1.8	20.7132	-1.4922	17.8188	-1.6881	13.97	-13.13
1.9	10.772	-1.9336	6.9923	-2.041	35.09	-5.55
2	-0.8627	-2.0741	-4.9428	-2.07	-472.95	0.20


Pendulo Simple Lineal y No Lineal
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Ángulo (Grados)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t (seg)
No Lineal
Lineal

Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

Métodos Predictor-Corrector

No siempre es posible aplicar métodos implícitos, debido a la imposibilidad de despejar y_{i+1}. Por ejemplo en los casos en que la variable dependiente es argumento de una función ($\sin(y)$, $\exp(y)$, etc), en general, no es posible despejar y.

Por ello, los métodos explícitos se combinan con métodos implícitos para generar lo que se denominan métodos de tipo predictor-corrector.

La utilización en general es como sigue:

(1) Utilizar un método de Runge-Kutta de orden 4 para generar los primeros valores de la aproximación

$$y_1, y_2, y_3$$

(2) Utilizar como predictor el método de Adams-Bashforth para generar la primera aproximación al próximo valor de *y*. Por ejemplo, si el método utilizado es el de cuatro pasos tendremos

$$y_4^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}\left[55f(x_3, y_3) - 59f(x_2, y_2) + 37f(x_1, y_1) - 9f(x_0, y_0)\right]$$

(3) Afinar, usando como corrector el método de Adams-Moulton de tres pasos

$$y_4^{(1)} = y_3 + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_4, y_4^{(0)}\right) + 19f(x_3, y_3) - 5f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)\right]$$

(4) Utilizar como predictor el método de Adams-Bashforth para generar la primera aproximación al próximo valor de y

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\right]$$

(5) Afinar, usando como corrector el método de Adams-Moulton de tres pasos

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})\right]$$

(6) Continuar realizando los pasos (4) y (5) hasta cubrir el intervalo requerido

Los valores obtenidos de $y_{i+1}^{(1)}$ pueden ser considerados la aproximación buscada o pueden afinarse iterativamente para dar una aproximación mas precisa utilizando

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}\right) + 19f\left(x_i, y_i\right) - 5f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_{i-2}, y_{i-2}\right)\right]$$

No obstante, este procedimiento converge a la aproximación dada por el método implícito y no necesariamente a la solución de la EDO.

Ejemplo: escriba un programa que integre la EDO

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 1$$

utilizando el método predictor-corrector de Adams para x en [0,2], tamaño de paso h=0.2 y con la condición inicial $y(0)$=0.5.

Un programa en Matlab es presentado en las láminas siguientes.

Métodos Predictor-Corrector

```
% Método Predictor-Corrector de Adams
% Para aproximar el problema de valor inicial
%
%   y' = f(t,y)  a <= t <= b
%
%   en N+1 números igualmente espaciados en el intervalo [a,b]

clear all
close all
N = 10;       % Número de divisiones
a=0;          % Extremo izquierdo del intervalo
b=2;          % Extremo derecho del intervalo

y_0=0.5;      % valor inicial función y

f = inline('y-t^2+1','t','y');      % función f(t,y)
h=(b-a)/N;    % Paso
t(1)=a;
w(1)=y_0;
```

Métodos Predictor-Corrector

```
fprintf('   t          wp           w\n')
fprintf('%6.2f              %12.8f\n', t(1),w(1))

% Aproximación de la solución en los primeros 3 puntos
% utilizando un método de Runge-Kutta de orden 4

for i=1:3
   k1=f(t(i),w(i));
   k2=f(t(i)+h/2,w(i)+k1*h/2);
   k3=f(t(i)+h/2,w(i)+k2*h/2);
   k4=f(t(i)+h,w(i)+k3*h);
   w(i+1)=w(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)*h/6;
   t(i+1)=t(i)+h;
   fprintf('%6.2f              %12.8f\n', t(i+1),w(i+1))
end
```

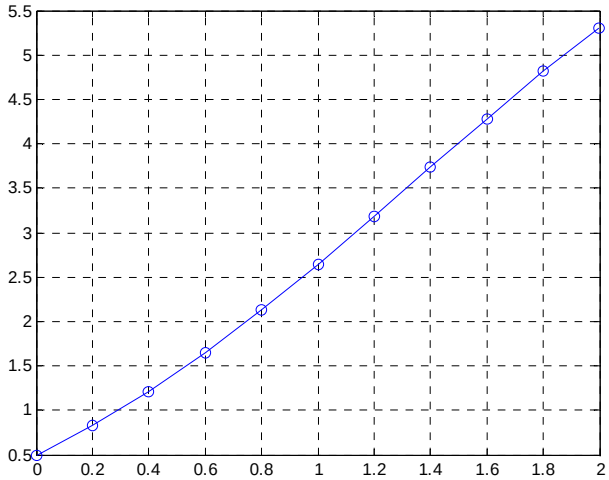
Métodos Predictor-Corrector

```
% Inicio del método predictor-corrector de Adams de cuarto orden

for i=4:N
   % calculo del predictor
   wp = w(i) + h*(55*f(t(i),w(i))-59*f(t(i-1),w(i-1))+37*f(t(i-2),w(i-
2))-9*f(t(i-3),w(i-3)))/24;
   % cálculo del corrector
   w(i+1)=w(i)+h*(9*f(t(i)+h,wp)+19*f(t(i),w(i))-5*f(t(i-1),w(i-
1))+f(t(i-2),w(i-2)))/24;

   t(i+1)=t(i)+h;
   fprintf('%6.2f %12.8f  %12.8f\n', t(i+1),wp,w(i+1))
end
plot(t,w,'o-')
grid on
```

Métodos Predictor-Corrector

t	wp	w
0.00		0.50000000
0.20		0.82929333
0.40		1.21407621
0.60		1.64892202
0.80	2.12728925	2.12720563
1.00	2.64093139	2.64082860
1.20	3.18002751	3.17990264
1.40	3.73250320	3.73235048
1.60	4.28360738	4.28342082
1.80	4.81532422	4.81509636
2.00	5.30564898	5.30537067

Runge-Kutta 4to orden



Corrector

Predictor

Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

MATLAB posee varias rutinas internas para hallar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las mas comunes son ode23 y ode45 que utilizan métodos de Runge-Kutta-Fehlberg.

La aplicación es como sigue. Para resolver

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

defina la función f(t,y) utilizando el comando inline

```
f=inline('10*exp(-((t-2).^2)/(2*0.075^2))-0.6*y','t','y');
```

$$\frac{dy}{dt} + 0.6y = 10e^{-\left[\frac{(t-2)^2}{2(0.075)^2}\right]}$$

MATLAB posee varias rutinas internas para hallar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las mas comunes son ode23 y ode45 que utilizan métodos de Runge-Kutta-Fehlberg (paso adaptativo).

La aplicación es como sigue. Para resolver

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

defina la función f(t,y) utilizando el comando *inline*. Por ejemplo si la EDO a resolver es:

$$\frac{dy}{dt} + 0.6y = 10e^{-\left[\frac{(t-2)^2}{2(0.075)^2}\right]} \qquad y(0) = 0.5$$

$$t \in [0,4]$$

Exprese la función en términos de *y* y *t*

$$\frac{dy}{dt} = 10e^{-\left[\frac{(t-2)^2}{2(0.075)^2}\right]} - 0.6y$$

defina f(t,y) así

```
f=inline('10*exp(-((t-2).^2)/(2*0.075^2))-0.6*y','t','y');
```

colocando siempre en primer lugar la variable independiente

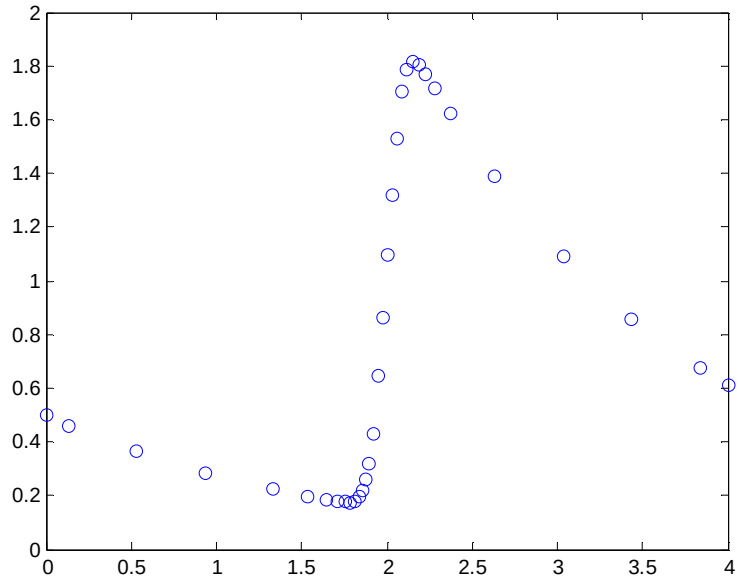
MATLAB requiere que se defina un vector (tint en este ejemplo) en el cual se define el dominio de cálculo (t=0 a 4 en este ejemplo), y una variable escalar con el valor inicial de y (y_0 = 0.5 en nuestro ejemplo). Así tendremos que nuestro "programa" luce como

```
f=inline('10*exp(-((t-2).^2)/(2*0.075^2))-0.6*y','t','y');
tint = [0,4];
y0 = 0.5;
[ti, yi ] = ode23(f,tint,y0);
fprintf('   t            y\n')
for i=1:length(ti)
   fprintf('%6.3f   %12.8f\n', ti(i),yi(i))
end
plot(ti,yi,'o')
```

La solución numérica está guardada en los vectores ti y yi,

t	y
0.000	0.50000000
0.133	0.46155733
0.533	0.36301300
0.933	0.28550827
1.333	0.22455111
1.539	0.19848962
1.646	0.18609831
1.712	0.17903652
1.752	0.17553327
1.782	0.17492182
1.813	0.17999250
1.837	0.19375410
1.858	0.21822078
1.878	0.25796044
1.898	0.32155649
1.921	0.42751072
1.953	0.64447895
1.979	0.86019323
2.004	1.09494204
2.029	1.31891078
2.056	1.52663219

t	y
2.090	1.70502526
2.119	1.78430077
2.148	1.81317467
2.186	1.80531470
2.228	1.77026738
2.284	1.71432816
2.375	1.62276065
2.635	1.38897416
3.035	1.09242262
3.435	0.85918602
3.835	0.67574637
4.000	0.61186779



En MATLAB. Los sistemas de EDO se resuelven escribiendo el sistema en un archivo .m como sigue (con nuestro ejemplo):

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1 \qquad y_1(0) = 4$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.1y_1 - 0.3y_2 \qquad y_2(0) = 6$$

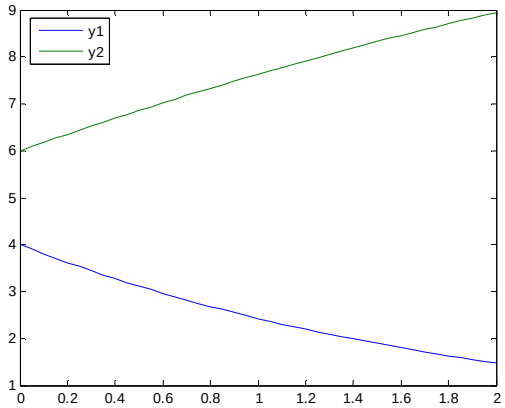
```
function dy = sistema(t,y)
% Función que almacena cada ecuación del sistema de ecuaciones
% diferenciales a ser resuelto

dy = zeros(2,1);    % a column vector
dy(1) = -0.5*y(1);
dy(2) = 4 - 0.1*y(1) - 0.3*y(2);
```

Luego, el sistema se resuelve utilizando:

[t,Y] = ode45('sistema',[0 2],[4 6]);

```
>> [t Y]
ans =
```

0	4.0000	6.0000
0.0500	3.9012	6.0896
0.1000	3.8049	6.1783
0.1500	3.7110	6.2662
0.2000	3.6193	6.3532
0.2500	3.5300	6.4394
0.3000	3.4428	6.5247
0.3500	3.3578	6.6092
0.4000	3.2749	6.6929
0.4500	3.1941	6.7757
0.5000	3.1152	6.8577
0.5500	3.0383	6.9388
0.6000	2.9633	7.0191
0.6500	2.8901	7.0986
0.7000	2.8188	7.1773
0.7500	2.7492	7.2551
0.8000	2.6813	7.3321
0.8500	2.6151	7.4083
0.9000	2.5505	7.4837
0.9500	2.4875	7.5583
1.0000	2.4261	7.6321
1.0500	2.3662	7.7051
1.1000	2.3078	7.7773
1.1500	2.2508	7.8487
1.2000	2.1952	7.9193
1.2500	2.1410	7.9892
1.3000	2.0882	8.0582
1.3500	2.0366	8.1265
1.4000	1.9863	8.1941
1.4500	1.9373	8.2608
1.5000	1.8895	8.3269
1.5500	1.8428	8.3921
1.6000	1.7973	8.4567
1.6500	1.7529	8.5205
1.7000	1.7097	8.5835
1.7500	1.6674	8.6459
1.8000	1.6263	8.7075
1.8500	1.5861	8.7684
1.9000	1.5470	8.8286
1.9500	1.5088	8.8881
2.0000	1.4715	8.9469



Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Introducción

Métodos de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos multipaso

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Métodos predictor –corrector

Aplicaciones con MATLAB®

Referencias

Referencias

1. Análisis Numérico, Burden R., Faires J. D., 6ta Edición, International Thomson Editores, 1998
2. Métodos Numéricos para Ingenieros, Chapra S., Canale R., 4ta Edición, McGrawHill, 2003
3. Análisis Numérico con Aplicaciones, Gerald C., Wheatley P.,6ta Edición, Pearson Educación, 1999
4. Introductory Numerical Methods Incorporating MATLAB, Hahn J., Bradley University, http://bradley.bradley.edu/~delgado/202/TableofContents.html
5. Applied Numerical Methods, Carnahan B., Luther H. A., Wilkes J. O., John Wiley and Sons, Inc, 1969

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON CONDICIONES INICIALES

Universidad Simón Bolívar