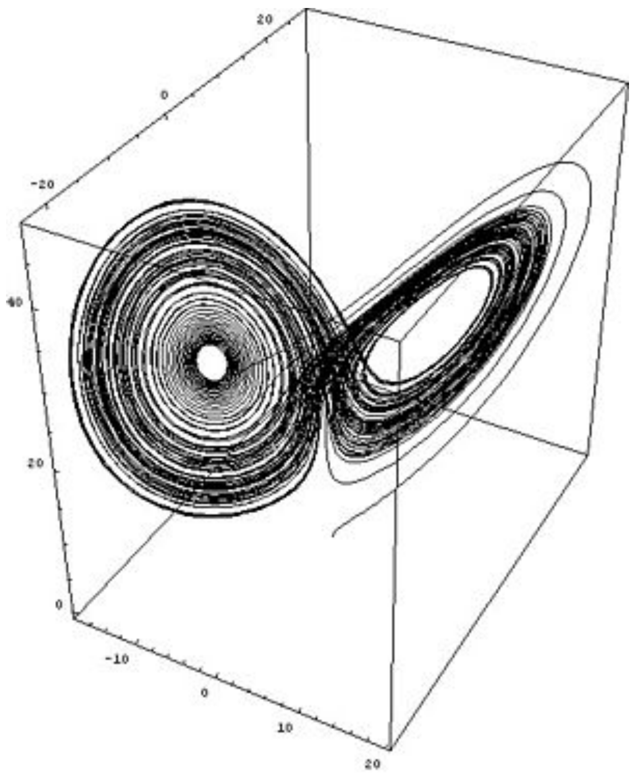
Buissonnière Aurélien
Reynaud Rodolphe

Economie financière et Théorie du Chaos :

Comment s'est organisée la critique du modèle néoclassique en finance de marché ?



Chaos de Lorenz

Préface

Avant de débuter l'étude, il convient à notre sens, de vous présentez deux personnes, qui ont marqué les mathématiques de leur époque. Ces deux hommes, aux découvertes exceptionnelles, ont révolutionné tous les domaines d'études auxquels ils se sont intéressés. Carl Friedrich Gauss d'une part, et de Benoît Mandelbrot d'autre part : ce dossier focalisera notre réflexion, sur l'impact de leurs travaux en économie financière. L'utilisation abondante des découvertes de ces derniers nécessite cette attention particulière. Ils ont en effet, établi des bases d'étude mathématique, qui seront développées par de nombreux scientifiques.

Carl Friedrich Gauss, surnommé « le prince des mathématiciens », naquît en 1777 et mourra et 1855. Il développa des méthodes d'analyse et d'anticipation, dans plusieurs domaines : les mathématiques, la physique et l'astronomie. Gauss obtint sa thèse de doctorat en 1799, après avoir démontré le théorème fondamental de l'algèbre (ou théorème de d'Alembert-Gauss). Il établit entre autre, la méthode des moindres carrés, et une conjecture sur la répartition des nombres premiers. Le mathématicien fonda par ailleurs, la courbe dite « en cloche ». Cette dernière sera la base des statistiques du XIXème et XXème siècle. Il était décrit comme une personne, très méticuleuse et perfectionniste, dont la devise fut : « *Pauca sed matura », * autrement dit : *peu de choses, mais des choses mûres.*

Benoît Mandelbrot, est un scientifique inclassable, « indépendant » des autres. Il réalisa une carrière époustouflante : diplômé de polytechnique, et docteur en mathématique de l'université de Paris ; il est considéré pour certain comme un père des mathématiques; et ce, au même titre qu'Albert Einstein ou Isaac Newton. Sa carrière se déroula pour la majorité de son existence, aux Etats-Unis, et notamment au Massachusetts Institute of Technology (MIT). Il fut par ailleurs invité à donner des cours dans les universités les plus prestigieuses du monde telle qu'Harvard ou Cambridge. Il mis sa vie au service des mathématiques, et plus particulièrement au service de la géométrie fractale. Il conceptualisa et perfectionna, cette branche des mathématiques, pendant 40 années. Il révolutionna, tous les domaines sur lesquels il développa ses mathématiques fractales (physique, économie, biologie ou encore météorologie). Il mourut en 2010 à l'âge de 85 ans après avoir reçu de nombreux prix, témoignant de son génie et son esprit novateur.

Sommaire

Introduction

a) <u>Intérêt du sujet</u>

La crise des subprimes, ainsi que la crise des dettes souveraines, dans laquelle nous nous trouvons, ont placé la finance, et ces modèles d'application, au centre des tourmentes médiatiques ces dernières années. La sphère des marchés financiers, est actuellement élevée au premier rang de la scène internationale. Aujourd'hui asservisseurs des Etats, les bourses internationales, donnent le ton des politiques. En période de crise, l'économie devient roi de la politique. Cette dernière doit être à son service. L'objectif doit être le maintien des richesses, ce faisant, les flux monétaires et financiers, distribuent avec efficacité, la misère ou la richesse. C'est une des premières raisons qui a concentré notre désir de réflexion, sur un sujet abordant l'économie financière. La compréhension des mécanismes d'arbitrage, au sein des salles de marchés, qui jouent un rôle distinct en ces temps, demeure un passionnant exercice.

La théorie du chaos, sujet à bon nombre de réflexions scientifiques, s'adjoint à l'économie par une approche des marchés financiers. En quoi consiste ce raisonnement mathématique ? Quels sont ces fondements, et quelles perspectives donnent t'ils sur la vie de tout les jours et sur l'économie ?
Elle est en apparence, devenue très populaire sous le concept d'« effet papillon ». Mais quelle en est son essence ? Voici tant de questions qui ont motivé notre envie d'aborder, et d'appuyer notre réflexion sur le sujet. Le but de ce travail, est d'explorer les théories financières, afin que chacun puisse comprendre les différentes visions, qu'elle soit déterministe ou stochastique.

b) <u>Introduction au devoir</u>

La dénonciation d'un grand nombre de cambistes financiers, suite au krach des marchés mondiaux de l'automne 2008, a entrainé un grand nombre de controverses au sein des analystes économiques. En effet, ces mêmes cambistes, ont répété des mouvements spéculatifs, et ont privilégié la rentabilité d'un panier d'actifs pourris, en référence au CDO comprenant les subprimes. La prise en compte du risque, a montré des défaillances, tant sur la gestion des achats de titres, que sur la prise en compte des fluctuations du marché, qui a lui-même plongé.
La finance néoclassique, standardisé des dernières décennies, se fonde sur le concept de linéarité. Elle peut appréhender le marché selon des méthodes probabilistes. Cette perspective du marché va être réfutée et combattue, notamment par Benoît Mandelbrot, par une approche qualifiant la fameuse « théorie du chaos ». Il s'agira donc de voir :

Comment s'est organisée la critique de la pensée néoclassique en finance de marché ?

La théorie du chaos, se place comme une pierre angulaire dans l'extension de la science au XXème siècle. Son histoire, et son impact sur les théories fondamentales, seront le sujet d'un chapitre introductif, permettant de se familiariser avec les raisonnements de remise en cause des modèles en place.
Cette évolution aura des conséquences sur la manière de percevoir l'économie financière. La théorie du chaos prend son essence par l'aléatoire, le « hasard ».

D'une part, il convient d'accorder un chapitre au modèle de probabilité financière en place. La loi normale demeure omniprésente. Le modèle de Bachelier a ouvert la route de la recherche d'outil, pour dompter le marché. En effet l'héritage de Bachelier est finalisé par la modélisation de Black et Scholes, et par le concept d'efficience du marché. Son application sur un portefeuille d'action est abordée : l'actif est une variable aléatoire, et la constitution d'une frontière efficiente est alors possible. Ce chapitre, met également en exergue les défaillances du modèle en place. La critique du modèle classique, s'engage autour d'une réfutation des piliers de la loi normale. Il laisse les travaux des scientifiques du début du siècle, face à une tout autre réalité.
Le point fondamental de ce travail consistera à appuyer notre réflexion sur le troisième chapitre. Il aborde l'approche économique et géométrique de la finance, par la théorie du chaos. Comment aborder une fractale ? Comment s'organise son application en finance ? Comment conceptualiser un marché financier avec cette branche des mathématiques ? Ces questions seront répondues, et illustrées à travers divers exemples, au cours de ce troisième chapitre. La géométrie fractale engage une autre perception de la dimension et du temps. Repérer la régularité dans les turbulences, ne sera que profitable pour l'élaboration du modèle multi-fractal.

Chapitre Introductif

« Le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ? ». Edward Lorenz en 1972, devant l'Association Américaine pour le progrès des Sciences, mis en lumière cette hypothèse. L'effet papillon ainsi présenté, était né. Il connu immédiatement, un succès médiatique mondial. Toutefois, la théorie mathématique sous jacente est fort complexe. La théorie du chaos explique qu'il n'existe rien de déterministe, et que le monde n'est donc pas prédictible.

A. Présentation de la théorie du chaos, son histoire, et son impact sur la science.

1. Un météorologue différent des autres.

Edward Lorenz est météorologue au Massachusetts Institute of Technology. Il étudiait les mouvements des masses d'aire de l'atmosphère, pour effectuer des prévisions du temps. Pour cela, le scientifique utilisait les lois de Newton, qui s'avéraient fructueuses en calcul de trajectoire, et donc en prédiction de mouvement. Cela était déjà le cas en astronomie, lors des calculs des trajectoires elliptiques des planètes, ou encore pour les déplacements d'autres corps comme la propagation du son, de la chaleur... Il s'agissait pour cela, de traduire le mouvement avec des équations différentielles, puis de les résoudre. L'avenir se calculait, et devenait de la sorte prévisible, ou tout du moins presque.

Revenons en toutefois à la météorologie. Pour prévoir le temps il s'agissait de remplir trois étapes : l'observation des phénomènes, la transposition en équation différentielle, et la résolution de ces dernières. Or c'est en ce troisième élément que la tâche devient complexe. Les équations formées, se révélaient d'une difficulté extrême. En effet, les données de départ étaient très nombreuses, et c'est ainsi que les équations devenaient compliquées. Prenons l'exemple « des trois corps » : calculer l'attraction entre deux planètes est facile avec les lois de Newton, et les équations différentielles ; toutefois, en ajoutant une troisième planète dans le système, les calculs deviennent immédiatement très complexes. Pour pallier à la difficulté, les scientifiques du XVIIIe et XIXe siècle on trouvés une méthode très utile : ils ont simplifié les équations. En d'autre terme, ils ont **linéarisé** l'équation (remplacée par une du premier degré). Ce, en partant du postulat physique de l'époque, *« les effets sont proportionnels aux causes ».* Ainsi ils pensaient que les termes supprimés ne jouant qu'un rôle mineur affecteraient le résultat d'une manière non significative.

Dès lors, deux cas se présentaient : ou bien la valeur exacte, par des nombreux calculs et des récupérations de données initiales, était calculée. Ou bien, la tendance du phénomène suffisait à effectuer des prévisions, sachant qu'elles n'étaient pas exactes. C'est en cette différenciation que Lorenz se distingue. Le météorologue préféra l'exactitude du phénomène à sa prévision.

2. Lorenz remet en question la physique de son époque.

Lorenz toujours à la recherche de prévision la plus proche possible de la réalité, s'était muni d'un ordinateur[1] pour effectuer ces divers scénarios, et valider ou non ces hypothèses. C'est alors qu'un jour de l'hiver 1960, Lorenz pressé, de se prendre un café, ne rentra que trois décimales dans son McBee, au lieu de six. Connaissant déjà le résultat de l'expérience qu'il réalisait, il ne cherchait qu'à vérifier ces travaux. Ce, pensant que l'incertitude ne serait *« plus d'un millionième mais seulement d'un millième ».* Toujours persuader que des petites variations au départ, engendrent de petites variations à l'arriver, il s'en alla donc prendre son café. A son retour, il eu la grande surprise de voir des résultats complètements opposés à ceux attendus. Pensant d'abord qu'il s'agissait d'une nouvelle erreur informatique, il était stupéfait de voir ces deux prévisions : tantôt, il y aurait une tempête sur le pole nord, tantôt une sécheresse sur les tropiques ! Après avoir vérifié ces calculs, il comprit alors que l'ordinateur avait juste, et qu'il avait tort. Il s'était trompé dans l'hypothèse suivante : penser qu'une incertitude au millième n'affecterait pas son résultat. Il comprit que la divergence provenait des termes non linéaires. Ainsi Lorenz mit en lumière l'importance des conditions initiales, dans un système dynamique non linéaire. Par là-même il condamna toute la science des prédictions, sur le moyen et long terme. La physique classique fut ainsi bouleversée. Ces travaux apparaissent encore plus symboliques, quand on sait qu'aujourd'hui, la majeure partie des phénomènes, est constitué de systèmes non linéaires.

B. La critique de la pensée néoclassique en finance.

1. De la linéarité…

« Ce qui à est a priori improbable se produit en permanence sur les marchés financiers ».
B. Mandelbrot

Le risque est connu de tous, il existe sur les marchés financiers. N'importe quel intervenant de Wall Street, nous dira que les marchés financiers ne sont pas risqués, mais très risqués. C'est précisément l'étude de ce risque, qui va permettre d'aborder, et de comprendre les cours dans un premier temps, pour contrôler les futurs dans un second temps.
Les méthodes majoritairement présentes, sont linéaires, par une approche Gaussienne des fluctuations du marché. Elles ne cessent d'analyser le risque, de l'expliquer et de le quantifier. En résumé, cette méthode cherche à tirer un bénéfice du risque. Un grand nombre de scientifiques, ont cherché à provoquer ce modèle.

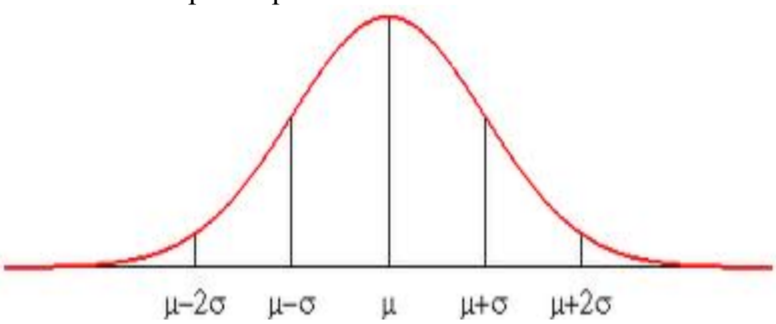


***Figure 1* -** Courbe de Gauss, écart type légendé, source www.mathcurve.com

[1] Un royal McBee LGP-300 des années 1960, soit l'un des premiers de la catégorie. A distinguer des ordinateurs actuels utilisés en météorologie. Il effectuait soixante multiplications par seconde alors que maintenant nous sommes à mille milliards d'opérations par second…

Selon la courbe de Karl Friedrich Gauss, 96% des valeurs sont comprises autour de la moyenne (μ) plus ou moins deux écart-type (σ) ; elle est ainsi dite écart-type. En effet, l'approche gaussienne, comme nous le verrons par la suite, va conceptualiser les anticipations d'un actif, en ce rapportant à la courbe de Gauss. Cette dernière, représentative d'une loi normale, a crée un grand nombre de controverses. Toutefois, elle est omniprésente au sein des salles de marchés. Un des points réfutable, est le nombre de défaillances rencontrées lors de son application dans la réalité. La loi normale, n'accorde pas d'importance aux évènements extrêmes, et accorde une approche temporelle du marché en décalage avec cette réalité, rencontrant de vrais enjeux financiers.

2. … Vers la remise en cause d'un modèle standardisé.

En 1962, la remise en cause de l'appel à la « loi normale », pour évaluer les actifs financiers, s'orchestre par Benoît Mandelbrot. Il observe l'application de ces mathématiques « fractales » (concept qui sera développé au chapitre II) à la finance. Ce, en observant une courbe des prix du coton lors d'une conférence à Harvard. Pour Mandelbrot, les fluctuations de prix sur un marché ne suivent non pas une loi de Gauss, mais une loi de puissance.
Conséquence pour Mandelbrot, les événements extrêmes et peu probables, ne sont dès lors plus rejetés. Les Krach peuvent exister. Le concept de finance « anormale » prend son essor. Mandelbrot démontre :

« La finance ne respecte pas la loi de Gauss, et les évènements improbables se produisent infiniment plus souvent que ne l'indique la « normalité » classique ».

Une approche du risque par la théorie du chaos, dérive notre vision sur une autre optique. L'approche par Mandelbrot, souligne la sous-estimation des risques de ruines financières, dans une économie de marché libre et mondialisée.

Un des grands exemples, prônant la gloire du modèle de Mandelbrot est l'accident survenu au sein du fond Long Terme Capital Management en 1998. Fondant leur technique de trading, sur le modèle crée par Black, Scholes et Merton en 1973. Le fonds gagnait des fortunes en prenant des positions très risquées. Toutefois, un accident totalement improbable, à la fin de la *« queue des probabilités »*, arriva. En question, l'incapacité du gouvernement russe de verser ce qu'il devait à ces créanciers. Le fond est alors pris au piège sur des positions approchant les 100 milliards de dollars de dette.
Cet événement est l'une des piqures de rappel faîtes aux financiers qui utilisent le modèle *« normal »*. S'engage alors une critique profonde des modèles en place, pour essayer d'attirer les opérateurs financiers vers une nouvelle approche du risque.

Chapitre 1 : L'approche linéaire des marchés financiers ; la finance selon la loi normal.

Les fondements de la théorie néoclassique, se trouvent à l'intérieur des livres, des grands économistes du XIXème siècle, notamment Adam Smith. Toutefois, le plus grand développement a été orchestré dans les années 1870, avec Carl Menger, William Stanley Jevons ou Léon Walras. Plus tard, c'est Alfred Marshall qui codifiera la structure intellectuelle classique.

A. Les travaux de Bachelier ouvre la route à Scholes et Merton

Les théories financières, présentes aujourd'hui, s'appuient majoritairement sur l'idée, selon laquelle, les marchés financiers connaissent des fluctuations suivant une marche aléatoire symétrique, de type Gaussien.

1. L'héritage de Bachelier…

L'approche initiale, avant l'arrivée des théories du risque, était très conventionnelle. En effet, elle suggérait l'idée qu'un événement se produit, et les cours réagissent en conséquence. Cet enchainement de cause à effet, était certes facile à reconstituer, mais très difficile à prédire à l'avance. Elle était vouée à l'échec, on ne peut jamais tout savoir.
Jules Regnault, en 1863, plus d'un siècle après la création de la Bourse de Paris, présenta un modèle financier pour permettre d'étudier la variation des cours boursiers. Objet principal de son étude : démontrer les dangers d'investissement grâce à la science. Il va dès lors, jusqu'à adopter la loi normale, comme seul loi de probabilités fiable, dans la mesure où elle régit la totalité des systèmes sociaux. Plusieurs conséquences découlent de l'application de la loi normale au marché. La symétrie autour de la moyenne, implique que la probabilité d'une baisse, soit identique à celle d'une hausse. La Bourse, est donc nécessairement juste, les spéculateurs sont donc un jour ou l'autre ruinés. De plus, la Bourse est équitable, les acteurs économiques sont dans une situation égale, dans la mesure où elle obéit aux lois de la nature.

Louis Bachelier, en 1900, approfondi l'étude de Regnault, et la développe. Par l'impulsion de son directeur, Henri Poincaré, Bachelier porte une étude sur le très complexe mouvement brownien. Il analyse le mouvement encore inexpliqué, d'une particule entourée de molécules. Une conclusion certaine lui parvient : il y a un temps mesurable entre chaque mouvement, qui permet aux molécules plus petites de changer de direction. Il y a dès lors, une liaison du mouvement de la particule, et des molécules. Chaque mouvement est alors indépendant du précédent. Le terme de « marche de l'ivrogne » ou de « marche aléatoire » apparaît.
Pour l'illustrer, un célèbre exemple : « La fumée de cigarette qui se dissipe dans l'atmosphère suit le même mouvement, vous ne verrez jamais deux fois le même. Mais au bout du compte, le résultat est toujours le même: la fumée se dissipe dans l'air ».

En quoi l'étude de Bachelier sur le mouvement Brownien, intervient en quelconque lien avec l'économie financière ?

Expliquons-nous.

Cette étude fut la base de la « théorie de la spéculation ». Bachelier dans sa thèse, ne fait aucune référence aux mouvements des particules, mais s'intéresse à un domaine encore peu attractif : le marché boursier.

Reprenant ses conclusion empiriques, Bachelier établie un travail pionnier, et invente la théorie du mouvement brownien. Il l'utilise pour modéliser les fluctuations de la rente, et pour évaluer certains actifs dérivés.
Son raisonnement est assimilable à ceci : le cours de bourse d'une société, peut être assimilé à une particule, dont le mouvement est déterminé, par des millions d'achats et de ventes. Les acheteurs ne se connaissent pas, mais la somme des transactions, provoque une fluctuation du cours.
Comme il y a de très nombreux acheteurs et vendeurs, le concept de « marche aléatoire » peut être appliqué. Le cours peut évoluer autant à la hausse qu'à la baisse. Les différents mouvements suivront donc une courbe de Gauss : la loi normale.
Bachelier a adapté les équations du domaine de la physique, pour les appliquer aux problèmes de la finance. Bachelier exerce l'application de la « marche aléatoire » démontrée, au sein de l'étude du mouvement brownien. Quand une variation de cours prend forme, nous pouvons l'examiner, et déduire un processus de causes à effets. Par rapport, un exemple est cité au sein du livre de Mandelbrot. C'est celui du plongement de cours d'emprunts suite à la parution d'un rapport sur l'inflation, ou encore suite aux rumeurs de l'insolvabilité d'un courtier. Avant que les cours ne plongent, il aurait été très délicat d'anticiper ces nouvelles, et la fluctuation du marché encouru. Sans aucunes autres informations, il aurait été impossible de prédire une quelconque fluctuation de cours. La prochaine variation aurait pu partir à la hausse ou à la baisse, et ainsi, suivre une « marche aléatoire ». Ce cours peut monter ou descendre, avec des mouvements plus ou moins violents. Chaque variation est indépendante de l'antérieure. Les mouvements de cours, forment donc une série de variable aléatoire, « indépendantes et identiquement distribuées ».
Bachelier démontra encore un raisonnement plus simple. Il atteste que les variations d'un cours, seront distribuées selon l'application d'une « courbe en cloche ». Cette affirmation va permettre aux outillages gaussiens, de prendre leur essence au sein de la finance. Les courbes de Gauss, vont donc s'appliquer aux marchés financiers.

Samuelson prolongea l'application des mathématiques à la Bourse, plus de 50 ans après Bachelier. En se basant sur la thèse de ce dernier, il construit un modèle pour décrire la fluctuation du cours d'un titre, comme une « marche au hasard » autour d'un rendement moyen du marché dans son ensemble. Bachelier, malgré le manque d'attention porté à son époque, laissa un héritage de taille aux divers scientifiques suivants.

2. … Finalisé par la modélisation de Black, Scholes et Merton, et par le concept d'efficience du marché.

Le socle intellectuel sur lequel se base l'orthodoxie financière actuelle, est l'hypothèse « d'efficience du marché ». Hypothèse selon laquelle, le cours des valeurs reflètent les informations pertinentes, en liens avec ces mêmes valeurs. Dès lors, le marché financier est « équitable ». Acheteurs et vendeurs ont certes des opinions, et des ressentis différents, mais tout deux doivent s'accorder sur un prix, sans quoi aucune transaction n'est possible.

La plus grande étape dans l'application des idées de Bachelier, fut réalisée par Harry Markovitz. Une idée lui parvient en 1950. Il raisonne en termes de diversification dans le choix d'actifs financiers. Il affirme que les investisseurs bâtissent des « portefeuilles d'actions efficients » pour minimiser les risques. Les perspectives de chaque actions peuvent selon lui, se décrire au moyen de deux nombres : le gain et le risque (moyenne et variance). Cela va révolutionner l'ingénierie financière, en composant cette dernière de variance, moyenne et d'indice d'aversion du risque. La courbe de Gauss reste bien entendue l'illustration même de ces modèles linéaires. La difficulté restait en l'accès aux calculs, qui demeuraient très longs. C'est Williams F. Sharpe qui va donner une réponse à ce traitement de données numériques. Il expose tout d'abord une idée : Si tous les investisseurs utilisent la méthode de Markovitz, il n'y aurait plus de portefeuille efficient mais un *« portefeuille du marché »* comme le disait ce dernier. C'était alors, le marché qui allait effectuer les calculs. Le concept est accessible : plus le risque est important, plus le gain l'est aussi. Il faut dès lors, élaborer une prévision globale du marché, puis estimer le β, le risque pour chaque action.

C'est sans nul doute, grâce aux travaux de Black, Merton et Scholes, que les questions entretenues sur les modèles probabilistes appliqués à la finance, sont devenus si populaires. En partie, avec la simplicité des réponses, qu'ils ont apportées.
L'année 1973 connaît alors un grand pas pour l'application de la « loi normale » à la finance. Les économistes, Fisher Black et Myron Scholes, déterminèrent le moyen de calculer le prix d'une option sur action avec le modèle « normal ». Ils proposèrent à l'époque, une formule pour évaluer le prix d'une option européenne d'achat. Cette formule est très utilisée, à tel point que la volatilité qu'elle définit, est devenue une véritable unité de mesure des financiers.

Le modèle mathématique qui décrit le marché financier, est à la fois simple et efficace.

Qu'en est-il ?

Le modèle se base sur deux actifs : un actif risqué, l'autre pas. Traditionnellement, l'actif risqué est une « action », l'actif non risqué s'apparente à une « obligation ». Cette question, pourrait d'ailleurs être remise en cause, en ces temps de volatilité actuels.
Le modèle d'anticipation des fluctuations d'actions, suppose que dans un court intervalle de temps, les fluctuations des actions sont distribuées selon une loi normale, c'est-à-dire une courbe de Gauss. Le modèle de Black, Scholes et Merton, s'attache à l'étude d'une option.
La formule de Black and Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option, à partir des données suivantes :

- la valeur actuelle de l'action
- le temps qui reste à l'option[2] avant son échéance, donnée exprimée en année
- le prix d'exercice fixé par l'option
- le taux d'intérêt sans risque
- la volatilité du prix de l'action.

La formule de Black-Scholes, se base sur une idée : le rendement de l'actif est gaussien. Autrement dit, la valeur de l'actif suit une diffusion brownienne géométrique. Une des plus délicate variable à évaluer, est la volatilité de l'actif. En effet, elle dépend essentiellement de la vision de l'analyste. Cette formule est dès lors, applicable lorsque tous ces éléments sont présents. On parle, d'un cas « Black-Scholes », chose couramment rencontrée sur les marchés financiers.
Le modèle rencontre des limites lors des mouvements violents sur les marchés, il reste alors un décalage entre le modèle et la réalité. Les conditions relatives à l'application de « Black-Scholes » sont telles, qu'elles regroupent :

- le prix de l'action doit suivre un mouvement brownien géométrique,
- la volatilité doit être connue à l'avance et relativement constante,

2 Une option, c'est un contrat conférant à l'acheteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix, et dans un délai déterminé.

- Il y a un libre accès d'achat ou de vente de l'action,
- Aucune des dividendes n'est distribuée,
- La constance du taux d'intérêt,
- L'exercice[3] de l'option ne peut se faire qu'à échéance.

Le modèle Black-Scholes étant si répandu, certaines cotations ne se donnent désormais, qu'en terme de « volatilité ». Avec cette approche, on chercher à définir la valeur d'une option à l'instant « t », comme étant la moyenne des valeurs intrinsèques[4] possibles de cette dernière, pondérée par leur probabilité respective d'occurrence.
Le modèle calcule les cours possibles de l'actif sous-jacent à l'échéance de l'option, c'est à dire, au moment où elle va théoriquement s'exercer. De plus, les calculs vont envisager leur probabilité respective d'occurrence, en partant de l'hypothèse fondamentale qu'il s'agit d'une variable aléatoire, dont la loi de distribution suit une courbe gaussienne (voir II).
Il détermine la valeur en temps réel au taux du marché monétaire de l'option, à la date « t » des calculs.

B. Loi normale appliquée à la finance

1. Actif financier et variable aléatoire.

Avec l'essor de la loi normale, les actifs financiers ont été assimilés aux variables aléatoires. Les flux ne sont donc pas sûrs, et le risque est analysé par les écart types de ces variables aléatoires. Les cours des actifs peuvent donc être modélisés de la façon suivante : ce sont des variables aléatoires à x dimensions, car x facteurs influent sur les cours.
La loi normale est majoritairement employée. Elle suppose, comme vu auparavant, que les mouvements relatifs au cours de l'actif, sont indépendants des uns des autres.
D'après la loi normale, et selon les lois de probabilité relatives, on considère que le cours d'un actif a :

- 99% de chance de se trouver à distance de plus ou moins trois écart-types de sa moyenne,
- 95% d'opportunité de se situer à plus ou moins de 2 écart-types de sa moyenne
- 66% de se situer à plus ou moins un écart type.

3 L'exercice de l'option est le moment où l'option est exploitée. Notons que le prix d'exercice d'une option, correspond au prix auquel peut être acheté ou vendu, l'actif sous-jacent.

4 Lorsque la valeur initiale de l'action est inférieur à la valeur actuelle, la différence entre le prix de levée et le cours de l'action est alors appelée : la valeur intrinsèque.

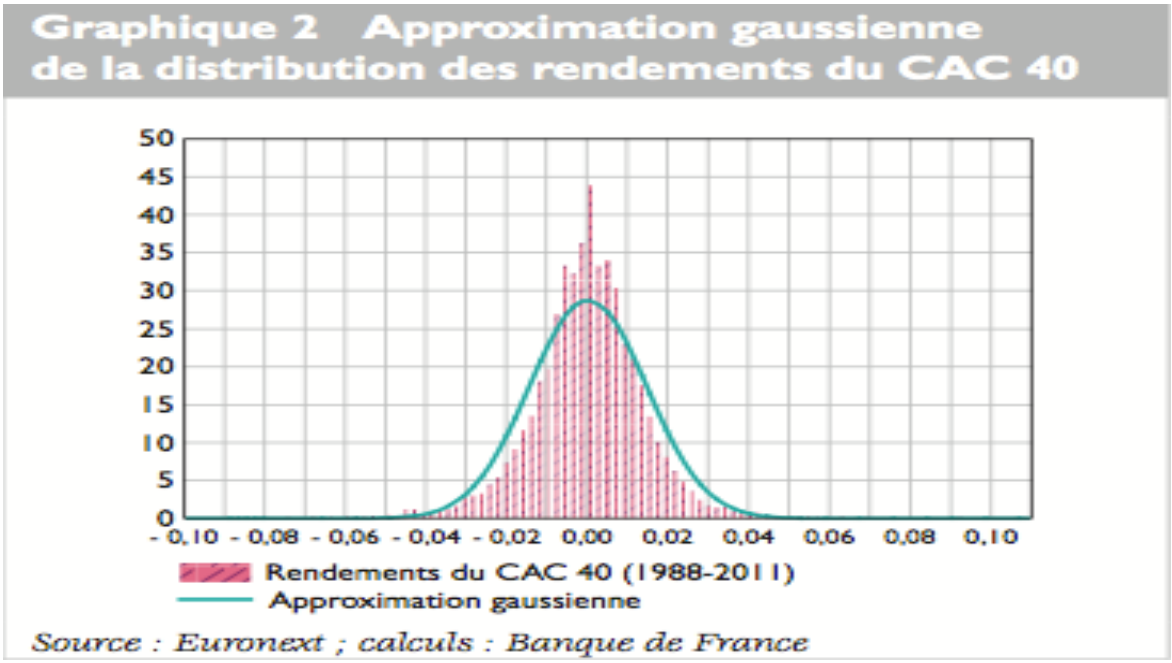


Figure 2 – Approximation des représentations de la distribution du CAC40, 1988-2011, source Euronext.

La représentation de l'approximation gaussienne de la distribution des rendements du CAC 40, expose bien la courbe dite « en cloche », tant prônée par les défendeurs de la loi normale en finance. Cette représentation fut exécutée entre 1988 et 2011.
L'approche normale est alors purement statistique. Il faut cependant, considérer la finance comme une dynamique et une évolution dans le temps. C'est pourquoi, en partant de cette loi normale, les financiers se concentrent sur le taux de rentabilité d'un actif, qui est le rapport du cours en t_1 et du cours en t_0. A partir de cet aspect, comprenons que l'élaboration de portefeuille efficient, est la combinaison de n variable aléatoire qui représentent n actifs.
Dans cette approche, un portefeuille efficient, est un portefeuille qui optimise l'espérance de rentabilité, et minimise l'écart type.

L'arbitrage risque/rentabilité.

Il y a comme pour tout portefeuille d'action, un arbitrage entre la rentabilité et le risque d'un investissement. Dès lors, nous avons un rapport rentabilité/risque, qui suppose que plus le risque d'investissement encouru est élevé, plus la rentabilité effective l'est. Nous noterons alors cette rentabilité effective : l'espérance de rentabilité. L'approche va considérer la valeur espérée d'une variable comme sa valeur moyenne. La rentabilité va être dès lors une moyenne, mais cette dernière sera pondérée des différentes rentabilités possibles de l'actif.
Le risque sera mesuré en association avec l'investissement. Nous allons utiliser l'écart type de la rentabilité annuelle. La formule de l'écart type (σ) étant :

$$\sigma = \sqrt{E(R^2) - (E(R))^2}$$

R exprimera la rentabilité annuelle de l'actif considéré, E l'espérance de rentabilité. $E(R^2)$ sera calculée par la somme des carrés des rentabilités, pondérées de leurs probabilités. L'écart type (σ) trouvé sera le pourcentage de risque évalué par rapport à l'investissement en question.

2. Une frontière efficiente

Les investissements, et les opportunités d'investissements, peuvent être caractérisés par l'espérance mathématique et l'écart type de rentabilité, calculés auparavant. La première approche, qui est le point quasi-incontournable en gestion de portefeuille, est celle introduite par Markowitz, comme vu précédemment. Elle est dite approche moyenne-variance. Elle vise notamment à minimiser la variance du portefeuille pour rendre le portefeuille plus prévisible et donc moins risqué.
Après avoir calculer l'espérance de rentabilité, et l'écart type de rentabilité, nous pouvons attribuer par cette approche, une de ces variables à chaque actif. Il est dès lors possible, de les décrire dans un graphique de la sorte, en les plaçant :

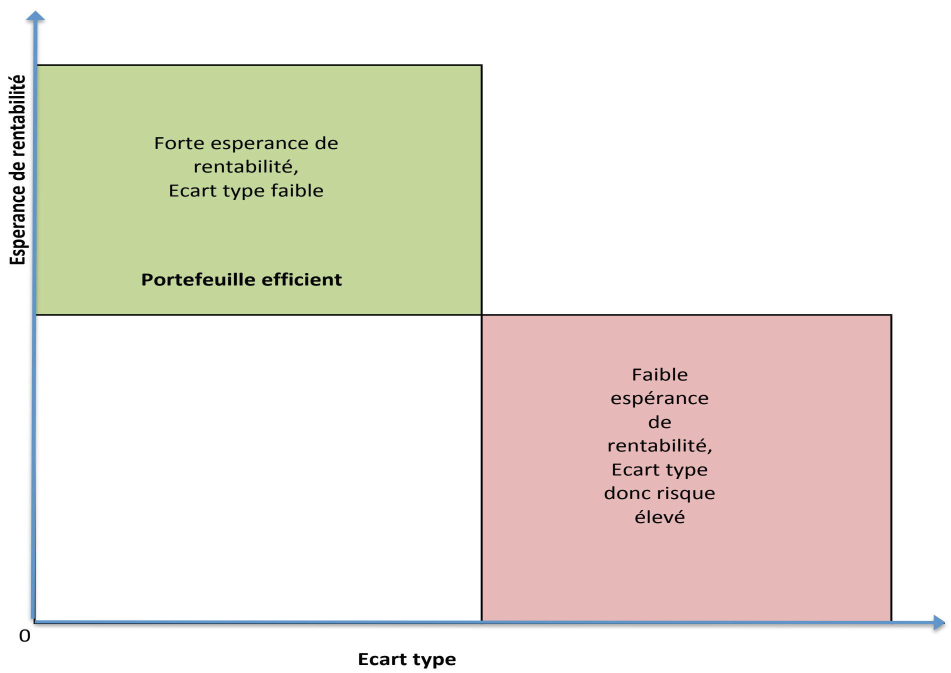


Figure 3 **–** Graphique de représentation du rapport rentabilité/risque, source Auteur.

On peut dès lors, modéliser ces investissements risqués, et les choisir.
La corrélation entre ces deux actifs, sera le niveau d'interdépendance entre ces deux variables. La prise de deux actifs dans un portefeuille, va nous permettre d'obtenir un grand nombre de couple risque/rentabilité. Comme nous l'avions dit, un portefeuille efficient, est un portefeuille qui optimise l'espérance de rentabilité, et minimise l'écart type. Les investisseurs vont donc chercher à construire un portefeuille d'action, leur permettant de se rapprocher graphiquement, de la zone verte exposé sur la figure 3.

En répétant les calculs des ratios précédents, les financiers peuvent alors construire une « frontière efficiente » sur un graphique, avec les rentabilités moyennes en ordonnées et les risques en abscisses. Il n'y a dès lors en pratique, aucun investissement capable de surperformer cette frontière. Sur ce graphique tiré du site du Pro-AT, une illustration des courbes efficientes pouvant être réalisées

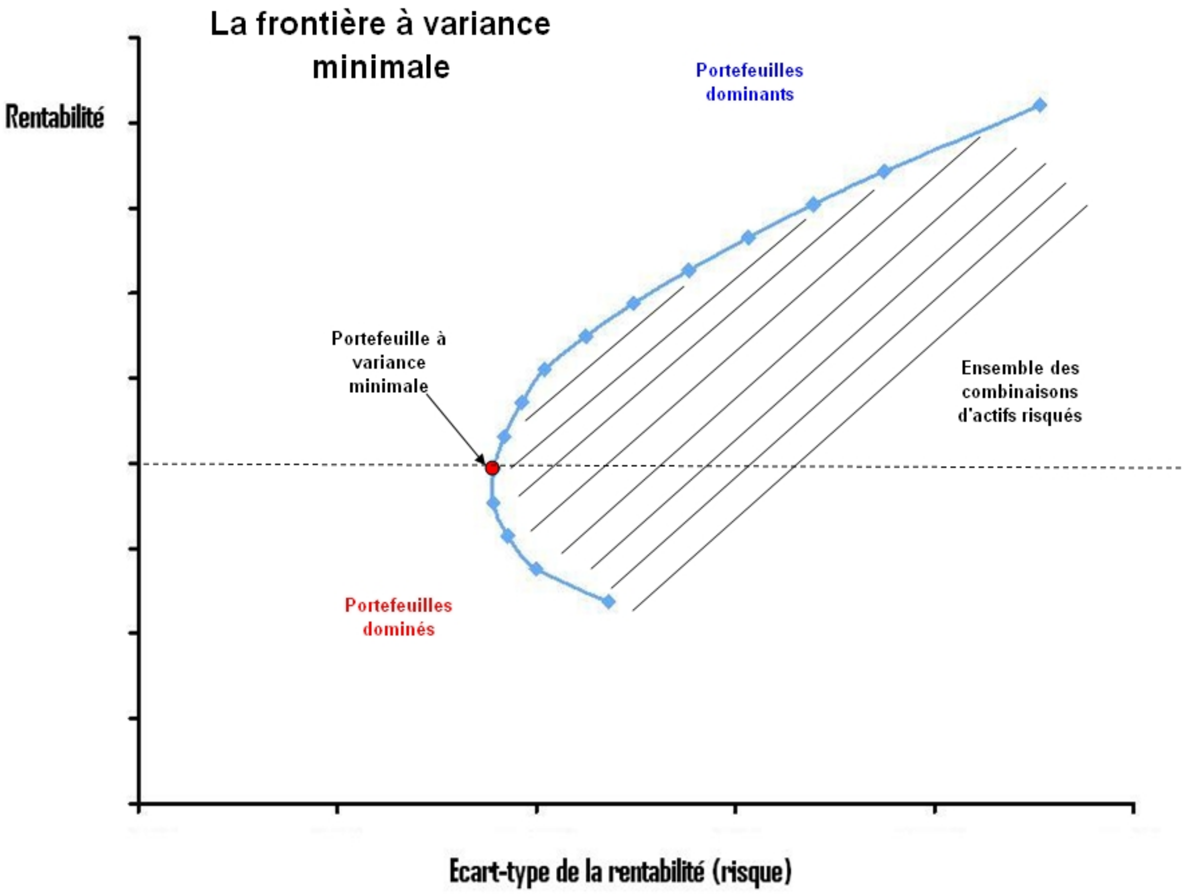


Figure 4 **–** Permet une illustration de la conceptualisation d'une frontière efficiente en finance.

La frontière efficiente va permettre d'avoir une vision sur les risques encourue par des portefeuilles d'actifs, selon l'approche normale.
Légendée par « Portefeuille à variance minimale », cette ligne discontinue représente les portefeuilles d'actifs, au risque le plus faible, avec un écart-type marginal pour une rentabilité donnée.
Le gestionnaire va donc adapter l'intensité de ses positions, selon un arbitrage comme nous l'avons dit précédemment : risque/rentabilité.

3. Volatilité conditionnelle et volatilité implicite

Avant tout, une distinction est d'ordre, entre un marché organisé et un marché de gré à gré. L'un contient des produits aux spécifications standardisées en termes de contrat, de modalités de transaction et d'administration. L'autre, par opposition, contient des contrats « hors-cote », qui ne sont pas cotés partout et/ou ne sont pas liquides.

Le développement des marchés dérivés, a vue des variétés d'options et de *futures*[5] naître. Les quantités de ces derniers, sont de plus en plus élevées, selon des indices boursiers, taux d'intérêt, obligations et devises. La diffusion d'information étant plus rapide que les

[5] Contrats à terme. Ils sont des engagements d'achat ou de vente, portant sur divers instruments financiers : indices boursiers, taux intérêts, devises. Utilisés pour des positions spéculatives, ou pour couvrir des positions risquées.

marchés au comptant, la teneur des marchés dérivés donne une information sur l'anticipation de tous les opérateurs.

Une nouvelle panoplie d'outils a été développée pour travailler sur ce marché gré à gré. Entre outre, le calcul de la volatilité implicite, qui est une prévision de marché par nature tournée vers l'avenir. Celle-ci correspond à l'adaptation de la volatilité conditionnelle.

En premier lieu, la volatilité conditionnelle ; elle représente l'ampleur des fluctuations des cours. C'est en grande partie comme cela que le risque est déterminé. En effet la volatilité conditionnelle de type Grach permet d'extraire la partie anticipée de la volatilité historique[6]. La volatilité est définie généralement à partir de l'écart type des variations du cours. Elle va donc permettre de gérer le risque, et de calculer le prix des options. Le niveau de volatilité ne ce soucie pas de la tendance haussière ou baissière de l'action, la volatilité s'attache à **l'amplitude** de la variation. Elle est donc basée sur les conditions passées et ne tient en aucun cas compte des événements aléatoires pouvant bouleverser les cours. Elle permet par ailleurs de prévoir la persistance ou la « non-persistance » des fluctuations.

En second lieu, concentrons-nous sur le pouvoir prédictif de la volatilité implicite dans le prix des options de change. Ces dernières décennies, l'apparition du marché gré à gré voit multiplier les estimations des options, selon leur volatilité implicite.

La volatilité implicite représente les anticipations du marché sur les variations futures. Elle va refléter le « prix du risque » attaché à une option. Sa valeur est « estimée » par le marché. Les mouvements baissiers sont accompagnés d'une volatilité implicite forte : pessimisme. Dans le sens contraire, les mouvements haussiers engendrent une volatilité implicite faible : optimisme

La volatilité implicite, est souvent considérée comme la meilleure prévision des fluctuations futures d'un titre. Toutefois, l'extraction de cette volatilité anticipée, requiert une formule d'évaluation d'option. La formule sera intégrée au modèle d'évaluation Black-Scholes.

La volatilité implicite, va donc à l'encontre d'une vision stochastique, car elle trouve sa source dans des événements passés et s'essaye donc à effectuer des prévisions.

[6] Volatilité calculée sur les cours passé. Elle est évaluée sur une base de vingt jours selon la formule suivante :
Avec Rt rendement du taux de change

C. Les défaillances révélées de ces modèles : crises et événements extrêmes.

- *La crise des subprimes, qui a à l'origine, pris essence aux Etats-Unis en 2007, peut être considérée comme certains l'affirment, comme l'un des plus grands désastres financiers. Pour la première fois, des problèmes venant d'un seul pays, a plongé l'économie mondiale dans une sérieuse récession.*

- *Long Terme Capital Management en 1998. Fondant leur technique de trading, sur le modèle crée par Scholes et Merton en 1973, le fonds gagnait des fortunes en prenant des positions très risquées. Toutefois, un accident totalement improbable, à la fin de la « queue des probabilités », survenu. En question, l'incapacité du gouvernement russe de verser ce qu'il devait à ces créanciers. Le fond est alors pris au piège sur des positions approchant les 100 milliards de dollars.*

Comme nous l'avions évoqué lors d'un précédent exemple, ces évènements sonnent comme des piqûres de rappel, faîtes aux financiers qui utilisent le modèle « normal ». Il y a une dénonciation de l'orthodoxie financière classique, par des théoriciens et scientifique. Mandelbrot, lui toujours, sera le pionner de cette « révolte » intellectuelle. Les crises intervenues, vont appuyer les défaillances révélées du modèle linéaire.

La plus grande critique du modèle linéaire, est établit dans l'ouvrage de Benoît Mandelbrot, Une approche fractale des marchés. Il dénonce le décalage entre étude physique théorique, et réalité économique. Les techniques employées seraient erronées.

1. L'espace de Cauchy : la mise en lumière de l'importance des événements extrêmes.

a) Déterministe ou Stochastique ?

Dans une perspective déterministe, le hasard peut s'appréhender comme l'incapacité d'anticiper complétement certains phénomènes. En finance, le hasard peut alors prédire un événement inattendu, que chaque agent économique ne peut prévoir. Le modèle normal, inhibe l'effet des mouvements extrêmes inattendus sur les marchés. Le hasard peut s'apparenté également à la « chance ». La chance de gagner, ou de perdre.

Serait-ce acceptable d'aborder des investissements financiers par la loi normale ? C'est à dire, en considérant qu'a des intervalle de temps irréguliers, le hasard peut décider de pertes considérable ou de gains important ?

Les cent dernières années, l'orthodoxie financière, a toujours abordé les cours, comme s'ils étaient régis par le hasard. La stratégie de gestion de portefeuille en bourse, a toujours fondée son analyse sur une chaîne d'hypothèses et de déductions de causes à effets. C'est l'approche déterministe des marchés financiers. Seulement, un des éléments avérés qui causerait la plupart des anticipations défaillantes est la non-efficience des marchés. On ne peut pas tout savoir, et donc, pas prévoir par l'approche déterministe.

Le fait est qu'une action grimpe ou plonge, par rapport à des perspectives plus ou moins prometteuses. Ces perspectives se traduisent par une anticipation des investisseurs. Il s'agit d'un domaine psychologique, encore plus délicat à prévoir.

La grande critique établit : l'approche déterministe est à coup sur défaillante, seule une approche **stochastique**[7] est probable au succès.

Le hasard appliqué aux marchés financiers, reste cependant très difficile à appliquer. En effet, contrairement à la physique, où l'étude des molécules d'un gaz a des propriétés distinctes par exemple, nous sommes face à des millions d'acheteurs et de vendeurs, qui échangent des capitaux. Appliqué le hasard à ce domaine, affirmerait que ces investisseurs sont imprévisible.
Toutefois, prenons en compte l'idée suivante : les cours financiers sont imprévisibles et incontrôlables. Pour avoir l'idée sur quel actif financier investir, nous pourrions alors chercher à calculer des rendements annuels ou perspectives de croissance. Seulement, la réalité éloignerait nos résultats.

b) Illustration de la contre-représentation de la moyenne sur une série statistique.

Voici deux exemples permettant de mettre en contradiction l'évocation de la moyenne au sein d'une optique linéaire :

- Si 100 jeunes-diplômés sont présents dans une salle, essayons d'étudier leur taille. Par des calculs, nous trouverons une moyenne avoisinant par exemple 1m70. Les tailles seront alors distribuées selon une courbe de Gauss, une courbe en cloche. Les tailles seront alors regroupées autour de la moyenne, avec des personnes plus ou moins grandes. 95% des personnes seront situées dans l'intervalle définit par 2 fois l'écart-type autour de la moyenne. Si le plus grand homme du monde est présent dans ce bar, et qu'il mesure environ 2m50. La moyenne augmentera de peu, cette extrémité n'aura que peu d'influence sur la moyenne. Les extrêmes auront alors peu d'importance.

- Prenons ce même exemple. Les 100 jeune-diplômés au sein de cette salle. Si on constate un revenu moyen de 25 000 euros annuel. Toutefois, imaginons que Mark Zuckerberg appartienne à la promotion, et qu'il rejoint le groupe. Supposons qu'il gagne 600 millions d'euros par an. Son entrée dans la salle provoquerait un changement considérable de la moyenne des revenus. Elle passerait de 25 000 euros à 6 millions d'euros annuel. Cette moyenne ne va alors plus rien signifier. Il y a que des jeunes qui touchent beaucoup moins, et une personne qui touche beaucoup plus. Nous avons là, la caractéristique d'une loi de puissance.

Les extrêmes ont un impact considérable.

Par ces exemples, des fluctuations, ne se stabilisent pas nécessairement autour d'une moyenne prévisible, et les variations ne tourne pas autour de cette même moyenne. Cette idée rejoint alors le mathématicien Augustin-Louis Cauchy, qui représenta pour la première

---

[7] Qui se révèle dépendant du temps au caractère aléatoire. Le calcul stochastique est l'étude portée des phénomènes liés au hasard. C'est une extension de la théorie des probabilités, base de l'approche chaotique.

fois, une théorie visant l'anticipation de variation d'un système numérique. Il l'illustra par son fameux exemple du « score de l'archer aux yeux bandés ».
Sa conception se distingue spécifiquement de celle de Gauss. En effet, il remet en cause l'emploi de la formule de Gauss dans tous les domaines de la physique. Pour Cauchy, les changements importants sont le résultat d'un grand nombre de petit.

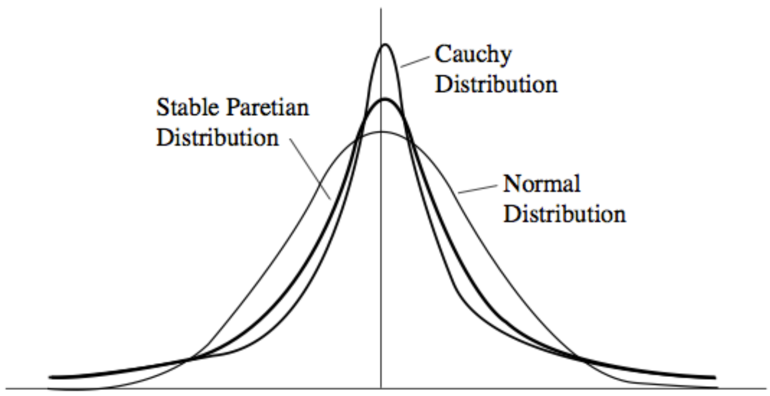


Figure 5 - Courbe en cloche de Gauss, combiné avec celle de Cauchy et Pareto, qui ont des propriétés de distribution différentes. Source Chaos Theory and the Science of Fractals in Finance, Tania Velasquez.

La figure 1, met en exergue les claires différences de propriétés entre les modèles et plus particulièrement sur leurs queues de distributions. La courbe de Cauchy, expose les résultats de nos revenus précédents.

2. Appliquons notre raisonnement à la finance.

La finance classique, celle dénoncé par les précurseurs du chaos, emprunte le chemin du « bénin ». Autrement dit, les graphiques de cours que vous voulez étudier, fluctueront dans un intervalle précis, selon le calcul d'un écart-type et d'espérance de rentabilité.

Comment appréhender dans ce cas, une crise majeure ou un cataclysme financier ? Un tel problème pose des questions aux réponses encore inconnues des mathématiciens ou scientifiques à l'allure linéaire.

a. L'hypothèse du mouvement brownien des fluctuations, une vision simpliste d'une réalité beaucoup plus complexe.

Les modèles académiques, finalisé par l'omniprésent modèle Black-Scholes, sont aujourd'hui, intégrés par des algorithmes mathématiques et programmation informatique. La question en finance, est certes de connaître les défaillances théoriques d'un modèle, mais la principale question est de savoir si le modèle rapporte des gains ou non.

- **Le possible rejet de la « marche de l'ivrogne » ou « marche aléatoire » de Bachelier**

La théorie classique, expose la description des variations de cours, comme un mouvement brownien. Or, cette description suppose que chaque fluctuation, est indépendante de la précédente. Nous rejoignons la « marche aléatoire » de notre premier point, présentant les travaux de Bachelier. Cela supposerait que les variations d'une action de l'année précédente, ou la variation au moment t-1, n'ont aucune influence sur la variations à la période t. Cela suppose également, selon l'efficience du marché, que toutes les informations utilisables pour cette action sont contenues dans le cours à la période t.
Dans ce cas, en quoi l'étude de l'historique des cours est elle nécessaire ?

Le deuxième point, exposé par l'hypothèse d'un mouvement brownien, est la rigidité statistique. Les variations de cours, subissent un processus, et ce même processus, restera le même au cours du temps. Seulement, pouvons nous soulever le fait, que chaque action est spécifique à une autre. En quoi une rigidité interviendrait sur le processus d'évaluation d'une action, si chaque action est différente d'une autre ?

- **La distribution normale, une appréhension trop simpliste de la réalité**

Dernière conséquence de la prise en compte du mouvement brownien : la distribution normale des variations de cours. Nous en revenons comme toujours, à la courbe en cloche de Gauss. Selon l'hypothèse du mouvement, les variations seront faibles et prévisibles car elles tourneront toujours autour de la moyenne.
Les mouvements importants, seront alors prévisible car ils s'écarteront alors rapidement de cette moyenne, et ce de façon très rapidement décroissante.

Or, la vie des marchés financiers apparaît beaucoup plus complexe. Cette hypothèse est réfutée par les faits, selon les théoriciens du chaos, et notamment Mandelbrot.

b. <u>Une illustration clairvoyante de la défaillance de la finance linéaire : l'hypothèse des variations continues</u>

La notion de variation continue en finance est un utilisé pour établir chacune des théorie vue précédemment : établissement du portefeuille de Markovitz, le model de Sharp ou encore la formule de Black et Scholes.
Cette dernière suppose que les variations sont effectué lentement d'une valeur a l'autre. En ce sens qu'il n'y a pas de grand saut entre les prix. Avec cette supposition, il est possible d'utiliser les fonctions continues ou équations différentielles.
Or la finance n'est pas une science de la nature. Sur les marchés les variations ne sont pas progressives. Nous donnerons une explication à ce phénomène de variations discontinues qui discrédite l'utilisation des formules simpliste de l'univers linéaire. Tout les jours, les bourses connaissent des « déséquilibres d'ordre » sur certaines actions. Les prix sont donc fortement modifiés a la hausse comme à la baisse avant d'arriver à l'état d'équilibre acceptable. La variation n'a ainsi eu effet par petits pas, mais plutôt par de grands écarts.

Les fondements même des théories classiques sont donc corrompus par ces présupposés qui s'avère être tout simplement faux.

« It is necessary therefore, to explore a more coherent approach to finance that includes the perspective of contemporary science ».

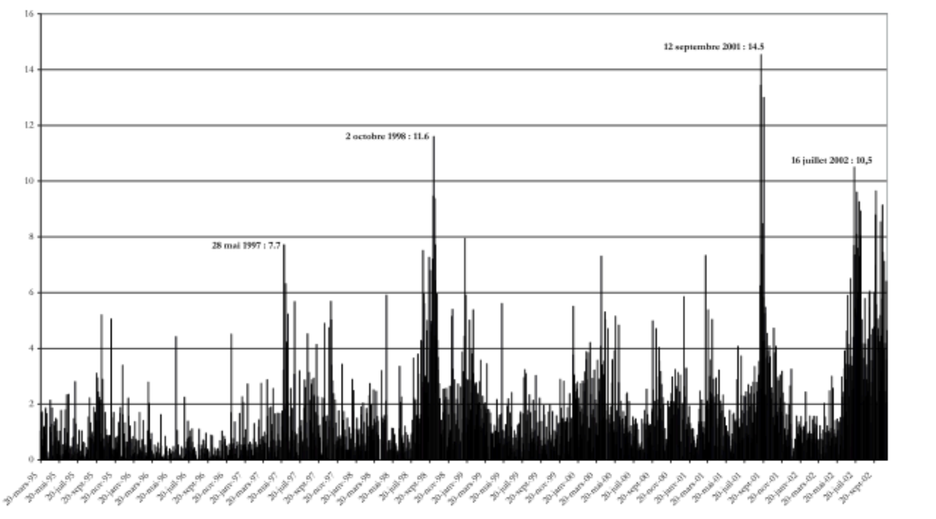
Chapitre 2 : L'approche économique et géométrique : la rupture avec la linéarité

La crise financière a révélé la fragilité de certains modèles d'évaluation des actifs financiers. Comme exprimé précédemment, la majorité des modèles prennent imparfaitement en compte, les mouvements brutaux du marché lors de crises ou d'événements extrêmes. L'interdépendance entretenue au fil des années de tous les marchés, se dévoile et s'exacerbe pendant ces périodes douloureuses.

Il y a un problème fondamental dans la finance moderne. Ce n'est non pas, la finance elle-même comme un grand nombre de politiques ou de médias, veulent l'exposer. Tout est utile dans la finance, et les marchés financiers sont extrêmement précieux. Au sein d'une étude sur la théorie du chaos, appliqué en finance, le réel problème a exploité est la façon d'aborder cette finance.

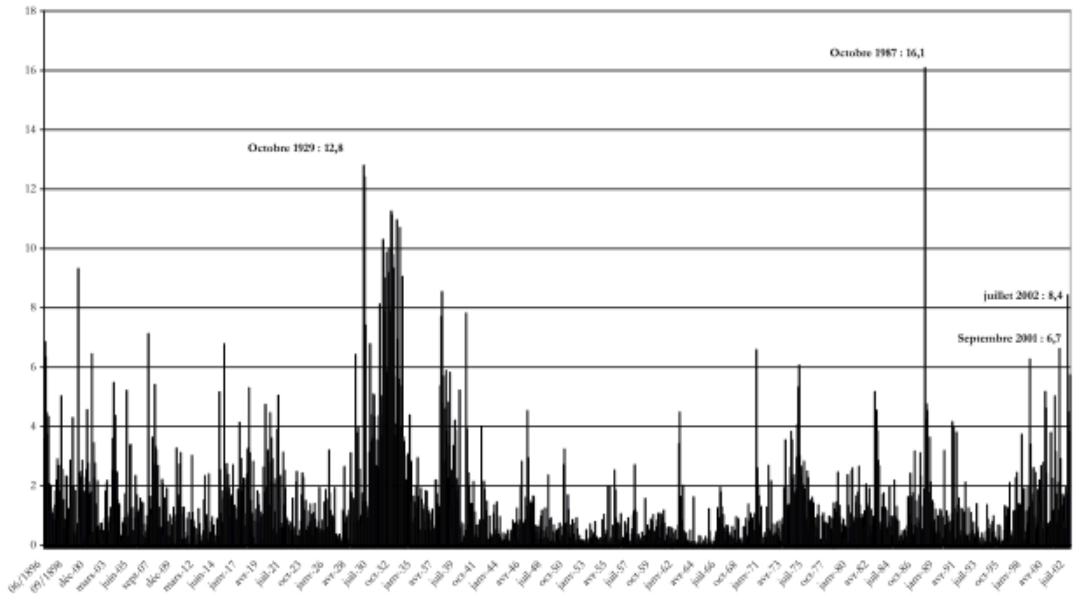
A. Introduction : Les marchés turbulents : une introduction à la vision fractale.

Les marchés « turbulents », c'est une des bases de l'abord théorique des mathématiques fractales à la finance. En effet, en considérant que les marchés sont « turbulents », les fluctuations peuvent être considérées comme beaucoup plus violentes, que par l'approche linéaire.
Voici deux graphiques exposant des variations de l'Index of Market Stock, calculé par l'Agence des marchés financiers.



Source : Euronext, calcul des auteurs. Période 1995-2002 en intra-journalier.

Figure 6 – Evolution de l'Index of Market Stock calculé sur le CAC40 de 1995 à 2002. Source : Euronext, site de l'AMF.

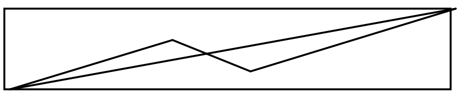


Source : Economagic, calcul des auteurs. Période 1896-2002 en journalier.

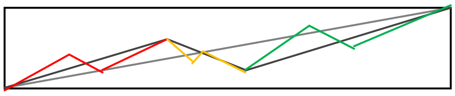
Figure 7 – Evolution de l'Index of Market Stock calculé sur le Dow Jones entre 1986 et 2002. Source : Site de l'AMF.

Les deux séries de données (le graphique 1 et le graphique 2), démontrent des similitudes dans la structure. Toutes deux issues de systèmes turbulents (le marché). On peut constater que cette turbulence peut être destructrice. On voit bien que la volatilité du marché boursier fut elle-même volatile au cours des périodes évaluées. On peut analyser des mouvements violents, sur les deux graphiques, qui viennent couper la marche, à des périodes linéairement calmes. Comment modéliser ces courbes par des fractales ?

Esquisse sur la création de fractale.



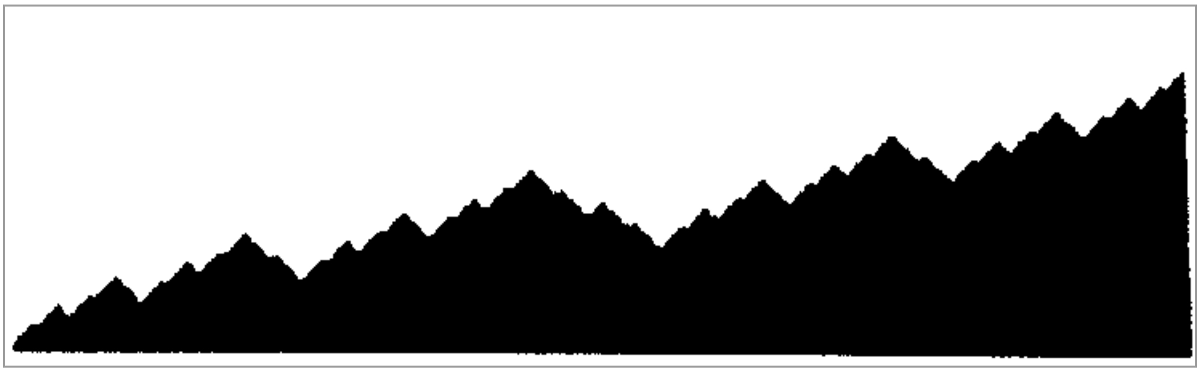
Afin de créer ce générateur, nous commençons par tracer un rectangle, puis sa diagonale (la ligne sous-jacente). Ensuite, nous traçons une courbe croissante, puis décroissante, puis croissante à nouveau (le générateur). *Venons en maintenant aux instructions de construction du modèle fractal. « Chaque fois que vous voyez un segment de ligne droite, vous le remplacez par une copie de la ligne brisé, que vous avez réduite mais sans la tourner. Pour la faire coïncider, il faut plus la réduire dans le sens horizontal que dans le sens vertical. Si vous devez l'ajuster dans un intervalle ou le segment décroit, retournez la ligne brisée. Répétez ce processus, en remplaçant à chaque étape des lignes toujours plus petites remplissant le graphique de zigzags toujours plus réduits » – Explication B. Mandelbrot, une approche fractale des marchés, Chap. VI.* A chaque fois que l'étape est renouvelée, la courbe prend forme de manière plus irrégulière.



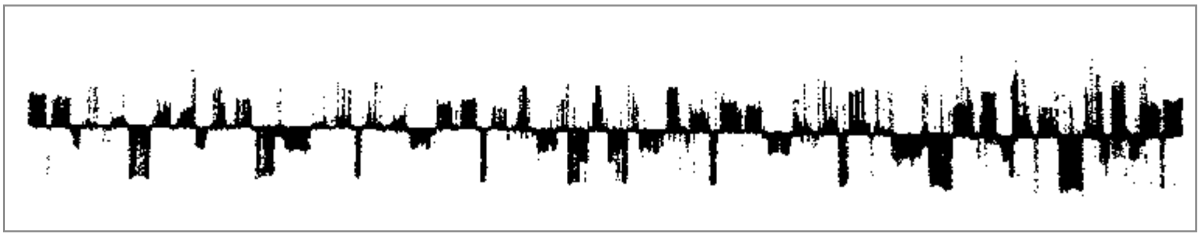
Les parties de la courbe de dessous (bleu), sont remplacées par trois autres parties homomorphe à la bleue (rouge, jaune, verte).

On obtient donc le modèle fractal ci-dessus.

Il est possible de répéter le modèle afin d'obtenir le graphique fractal complet. Celui-ci est bâti selon la base non aléatoire car on reprend indéfiniment le même générateur.

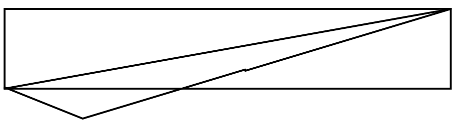


On peut alors traduire les variations d'un pic à l'autre sous la forme d'une ligne.

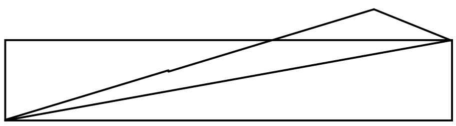


Cependant, les résultats ainsi obtenus sont bien trop prévisibles. Le graphique crée manque de réalisme. Il ne fait pas apparaître de grande variations, et ne reflète en rien la turbulence des marchés.

Tentons dès lors d'accroitre son réalisme. Repartons du générateur initial, puis créons deux autres scénaris. Au départ, la séquence était croissante, puis décroissante, et croissante à nouveau. Il est alors possible de déplacer les différentes parties du générateur en suivant une séquence bas, haut, haut (A) ou encore haut, haut, bas (B) comme illustrer sur les modèles suivants.

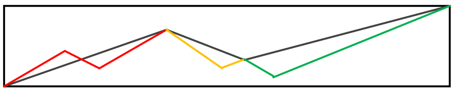


A



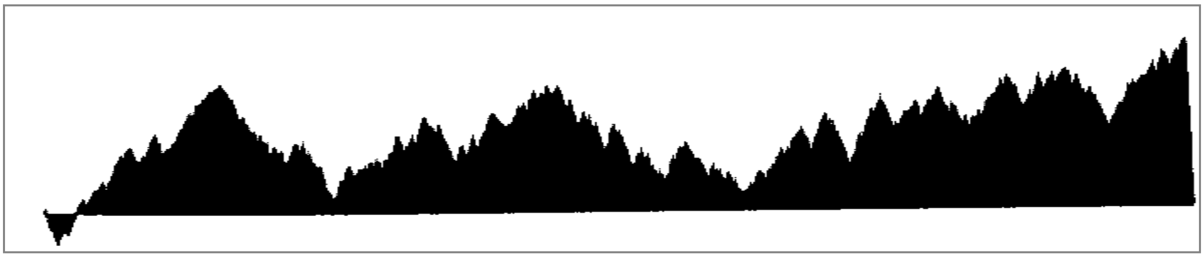
B

Incluons le hasard, et choisissons aléatoirement de remplacer les parties du générateur initial par un des trois scénarios. La situation ainsi créée, demande un peu plus d'attention pour repérer les générateurs employé à chaque étape.

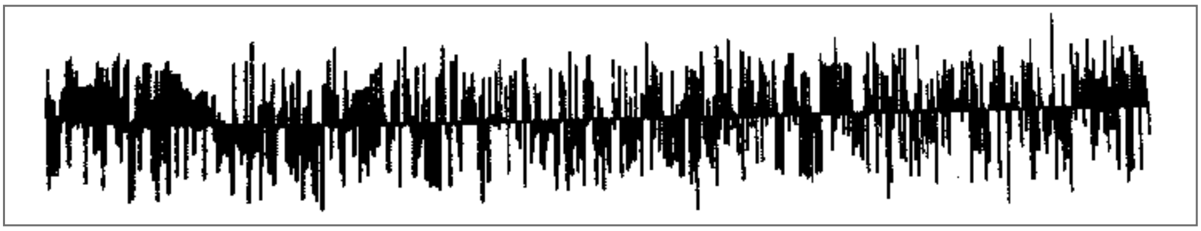


Tout comme précédemment, chaque segment de la courbe bleu est remplacé par un générateur. Celui-ci est cependant pris au hasard entre les trois scénarios possibles. La partie rouge est le scénario haut, bas, haut initiale ; la jaune haut, haut, bas, soit la figure 2, mais inverser car nous sommes sur une partie descendante de courbe ; et la verte bas, haut, haut, soit la figure 1.
Avec cette partie, est construit le modèle qui formera le graphique fractal.

Enfin apparaît le diagramme final.



Il est dès lors possible de mesurer les variations de cette courbe. Le graphique se rapproche déjà plus de quelque chose de réel, néanmoins il est nécessaire de complexifier ces modèles pour arriver à la turbulence des marchés.



B. Repérer la régularité dans l'irrégularité » : Les fractales.

Dans le passé, les corps de scientifiques ont toujours considéré les phénomènes ou événement extrêmes, comme des « imperfections », des irrégularités de la nature. Cette hypothèse est la base de la théorie gaussienne. C'est cette même hypothèse, la finance « anormale » va chercher à la réfuter, par argumentations interposées.
B. Mandelbrot, fondateur de la géométrie fractale, base de la non-linéarité, dénonce le manque d'implication des scientifiques de l'époque, au sujet d'une possible réfutation. Le confort dû à l'essence des moindres aux carrés, constituait pour Mandelbrot, un échappatoire à la recherche.
La finance fut victime de ce phénomène de confort intellectuel.

1. Aborder une fractale : Les événements extrêmes ne sont pas des imperfections

Mandelbrot développa une géométrie permettant de décrire l'anormalité d'un processus. Il la décrit comme la « boîte à outils » mathématique qui permet d'anticiper l'irrégularité. Il faut selon lui, « repérer la structure dans l'uniforme ».

Cette géométrie, est bien entendu la géométrie fractale.

Comment aborder une fractale ?

Un homomorphisme structurel.

L'approche fractale, pour modéliser des actifs financiers, est encore dans une phase exploratoire, avec néanmoins de nettes avancées sur la décennie passée. Il convient alors, qu'une difficulté certaine s'impose, au contact de la définition de cette forme des mathématiques. L'approche fractale considère qu'un processus évolutif, ne demeure plus déterministe, comme exposé par la théorie financière néoclassique, mais entre ce déterministe et l'aléatoire.
Considérons l'affirmation suivante :

« Une fractale est dotée d'une forme spéciale d'invariance ou de symétrie, qui relie le tout à ses parties », Benoît Mandelbrot.

L'idée est la suivante : une figure fractale peut être décomposée en une multitude de petites parties, chacune d'elle présentera des similarités avec le tout. L'exercice de cette géométrie, va permettre de repérer des structures itératives, de les quantifier, les anticiper et les utiliser. Nous pouvons définir cette géométrie comme un outil d'analyse et de synthèse, face à des éléments structurels.
La particularité de la géométrie fractale réside en la considération de la dimension. Cette dernière s'affiche comme un outil de mesure.
Les fractales seraient très difficiles à démontrer mathématiquement. Nous pouvons cependant, évoquer une chose : on en rencontre très souvent dans la nature, dans notre environnement. Autrement dit, considérons la fractale comme une courbe géométrique, où chaque fraction, trouve des similarités au tout.

2. Illustration picturale

a) Une fractale linéaire.

Un des meilleurs moyens d'expliquer une telle géométrie que les fractales, est d'exposer des images. A notre sens, elles parlent bien plus que les mots sur cette approche.
On peut trouver des exemples des structures fractales, par des représentations qui illustre comme nous l'exprimions « la régularité » dans l'irrégularité.

La première courbe fractale est le Flocon de Koch. Mathématicien suédois, il décrivit une construction voulant défier les bases mathématiques.
L'une des plus grande caractéristique des fractales, prend place en la considération de la « dimension ». Tout commence par une droite 1, représentée ici par le coté horizontal du triangle. On remplace au centre de la surface dessinée, par un triangle équilatéral de base 1/3. On ne supprime pas le tiers central, mais on le fait ressortir sous la forme d'une tente triangulaire. La longueur de l'objet n'est alors plus de 1, mais de 4/3. Ce faisant, la longueur de l'objet construit vaut maintenant 4/3. En multipliant l'opération, on obtient une courbe de longueur 4/3 au carrée. Nous sommes par ailleurs, sur une loi de puissance. Si l'on multiplie cette opération, nous arriverons à la limitation spatiale semblable à un « flocon ». Sa longueur est cependant infinie, car l'opération effectuée, peut être répétée n fois. La longueur est alors infinie, bien qu'il soit spatialement limité.

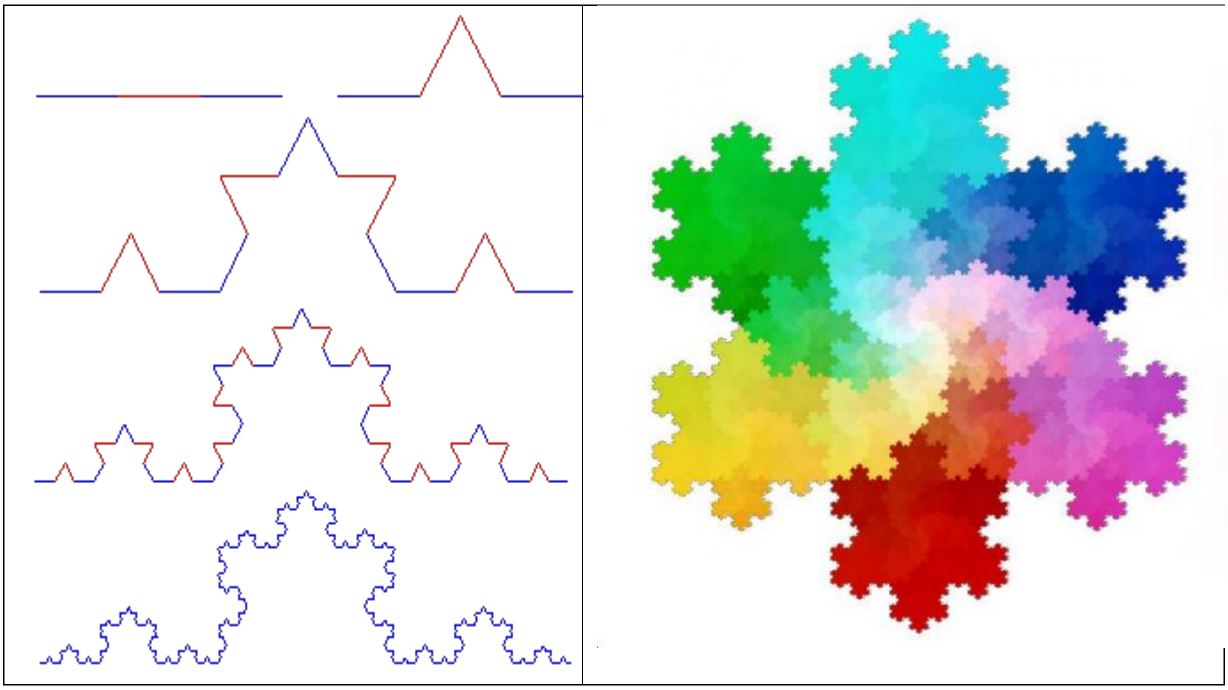


Figure 8 – Représentation du processus de fabrication du « flocon de Koch », Source *Une Approche fractale des marchés*

Un paradoxe surgit : à chaque ajout d'un triangle par l'opération décrite au-dessus, la longueur de la courbe croît. Elle croît ainsi indéfiniment. A chaque étape, la longueur de la courbe décrivant la figure se multiplie par le même facteur d'agrandissement.

b) Une fractale irrégulière

Les courbes fractales peuvent s'avérer irrégulières, aléatoires. Nous avons vu dans en a), une fractale linéaire : la construction se répétait de manière identique à l'infini avec des résultats prévisibles. Reprenons la courbe de Koch, illustré en « flocon » par la linéarité. Mandelbrot à travers son ouvrage, développe une comparaison entre la formation de la structure de la courbe de Koch linéaire, et sa formation en intégrant le « hasard ».

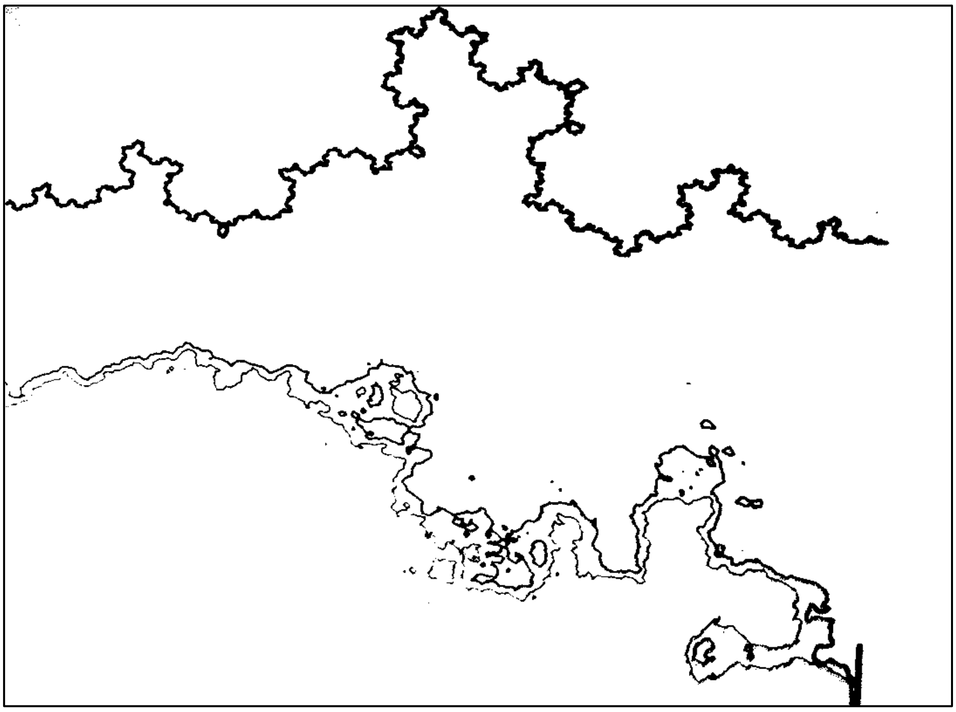
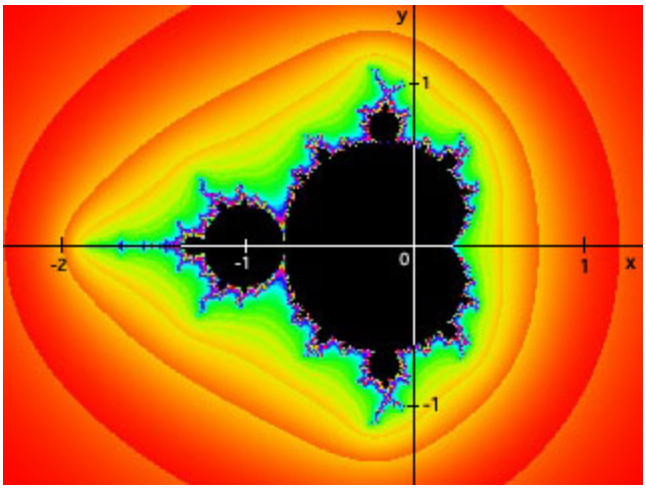


Figure 9 - Diagramme de la courbe de Koch aléatoire, *Une approche fractale des marchés financiers, Chap. VII.* B. Mandelbrot.

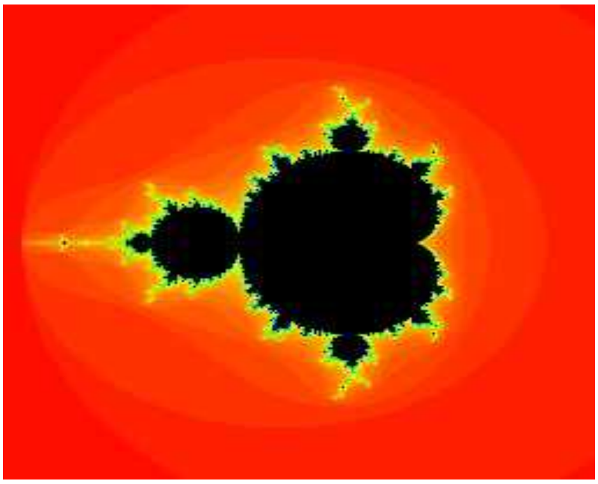
La représentation de la courbe de Koch est alors totalement différente. L'attribution de la place du triangle équilatéral est alors fait « au hasard », en terme de pile ou de face. Ou bien la pointe du triangle est vers le haut, ou bien elle est vers le bas. Le résultat est dès lors, plus irrégulier, même si la représentation se fonde sur les mêmes bases que la précédente.

c) L'ensemble de Mandelbrot : la connexion avec la théorie du chaos.

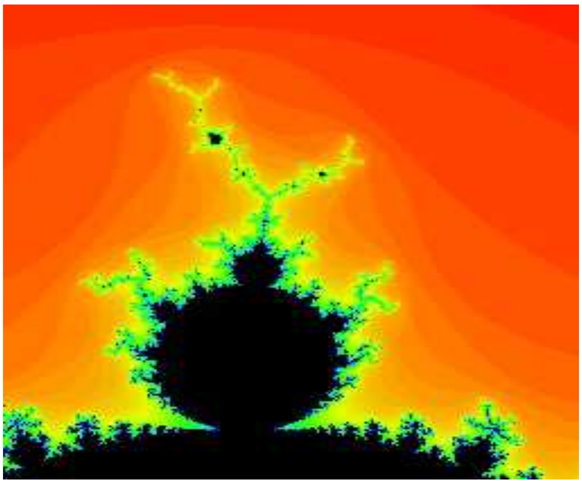
B. Mandelbrot mise au point une équation de récurrence tout simple. $z_{n+1} = z_n^2 + C$, avec $z_0 = 0$. A partir de celle-ci, il effectua des modélisations informatiques des résultats complexes obtenus. L'image obtenue est la suivante :



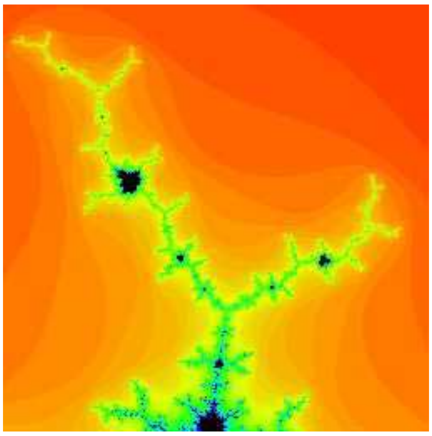
Cette image a fait le tour du monde et est au cœur de la théorie du chaos. De plus elle a crée un grand problème mathématique au XXème siècle, toujours irrésolue.
En effet, ce procédé fractal conserve le même niveau de complication à toutes les échelles. Effectuons tout de même des zooms successifs afin de mieux repérer le caractère fractal de l'image :



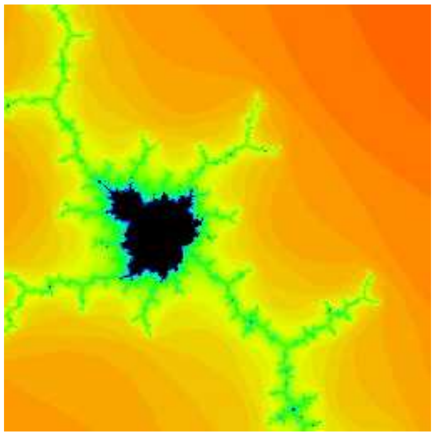
***1.** L'ensemble de Mandelbrot*



***2.** Zoom dans la partie supérieure de la figure 1*



***3.** Zoom dans la partie supérieure de la figure 2*



***4.** Zoom dans la branche de gauche de la figure 3*

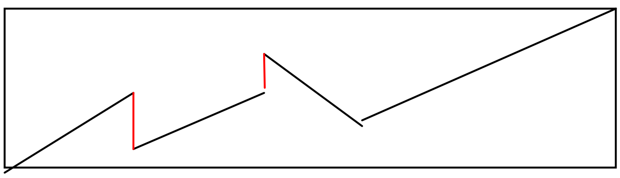
C. Les mystères de la théorie financière.

1. D'étranges similitudes

Travaillant sur l'économie, B. Mandelbrot fut invité à Harvard afin de présenter ces études sur la répartition entre les riches et les pauvres. A sa plus grande surprise, il vit à son arrivée, dessiné sur le tableau de la salle ou il s'apprêtait à enseigner, un diagramme similaire à celui qu'il allait présenter sur la répartition des revenus. Il apprit que les courbes présentes étaient celles des cours du coton.
Dès lors, la ressemblance l'intrigua. Il se mit à étudier les cours du coton en profondeur afin de déterminer comment ces cours évoluaient. Il en vint aux mêmes conclusions que le professeur Houthakker[8], « *Les variations des cours d'un jour sur l'autre, d'une semaine, d'un mois ou d'an an au suivant, n'obéissent pas au modèle de Bachelier* ».
Les recherches ont montré que les fluctuations sur les données du coton, étaient régies par une loi de puissance. Plus encore, il mit en exergue que les variations journalières, mensuelles ou annuelles avaient le même aspect. Otez les dates et les marqueurs de prix, il est par la suite très difficile de distinguer les unes des autres. Les cours suivaient donc **une loi d'échelle**. C'est dès lors un premier point qui s'apparente à la géométrie fractale.

« Le cœur même de la finance est fractal. »

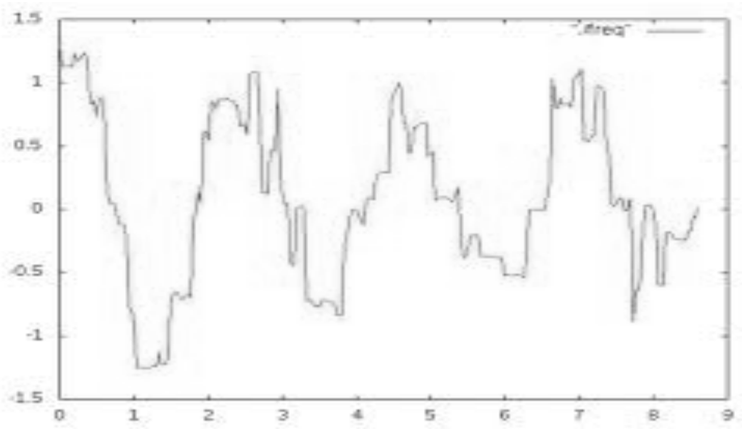
De la propriété d'échelle, se déduisent les queues de distributions épaisses[9]. Reprenons donc les dessins de base pour tenter de les améliorer une fois de plus, en y intégrant les discontinuités présentes sur les cours boursiers. Celles-ci se traduisent au niveau fractal par un saut vertical au seins du générateur (ci après modélisé en rouge).



---

[8] Le professeur de Harvard qui lui avait donné les historiques des cours lors de sa présentation.
[9] Forte probabilité de survenance des risques, dans l'espace de Cauchy les queues de distributions sont épaisses.

En appliquant ce générateur, on obtient une courbe qui fait intervenir les discontinuités. La courbe suivante laisse donc apparaître de grands sauts.

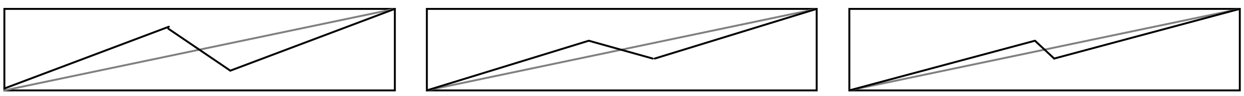


Par ailleurs, les fractales permettent aussi de développer l'effet de dépendance du marché.

Dans quelles mesurent, les événements passés influent-ils sur les évènements à venir ?

C'est un des principes même de la théorie du chaos. L'essor d'un processus, dans un système dynamique non linéaire, dépend fortement de ces conditions initiales. Dans le cas d'un mouvement brownien, la dépendance est aléatoire, l'indice que nous appellerons H est de 0,5, notée « iid » (indépendantes et identiquement distribuées). Malgré la remise en cause de l'efficience du marché, il est possible de modéliser un indice de dépendance ou non par le biais des fractales. En fonction du générateur, le diagramme final fractal peut montrer de la persistance : les variations se développent dans la même direction ; ou bien de l'anti persistance : les variations évoluent à contresens l'une de l'autre.

H<0.5 | Mouvement brownien H=0.5 | H>0.5



Les marchés évoluent constamment selon les climats, les usines, le monde physique et bien sure la psychologie. Si le marché fait preuve d'une mémoire, c'est par ce qu'il est agité en permanence par des êtres humains, ce dont ils ont ouïe dire, et ce qu'ils sentent. La théorie orthodoxe présuppose que l'homme est rationnel et cherchera toujours à maximiser son profit ; il fut baptisé homo economicus. Or cette supposition s'avère être une erreur dans la réalité. Les hommes ayant vécu le krach de 1929 étaient beaucoup plus prudent que les autres, leurs souvenirs influaient sur le leur rapport au risque. Un trader qui avait connu le traumatisme avait exprimé : *« quand nous quitterons ce métier, une chose se perdra. C'est la mémoire de 1929 »*. Les hommes défieront sans cesse la raison et les lois de la physique. Albert Einstein lui-même s'étonnait dans sa réflexion : *« Ce qui est incompréhensible, c'est que le monde soit compréhensible »* . Les prix peuvent ainsi défier les marchés par effet de mode ou effet de masse. Selon les situations, cela s'avère catastrophique à cours ou long terme sur les marchés.

2. Univers multi fractal

L'univers multifractal incorpore une nouvelle notion : le temps boursier. Il est fait référence à une nouvelle échelle pour compter le temps. Accélérer les périodes lentes et ralentir les autres plus intenses. En effet, par moment les cours grimpent de manière fulgurante, les volumes échangés sont démentiels, et les écrans sont couverts d'informations qui varient sans cesse. Puis à l'inverse, il y des périodes très calmes, où les acteurs de la finance semblent être en « pause », ceux présent s'ennuieraient presque tant les cours sont tranquilles. Mais comment faire évoluer le marché à la bonne vitesse ?
La réponse à cette interrogation est par l'approche chaotique : Multi fractale. La mise en place d'un temps boursier est un rapport au temps normal[10]. Revenons aux bases, une fractale est une structure homomorphe au tout. Les multifractales ajoutent donc en plus de la forme, la notion de temps. Des structures rétrécissent plus rapidement que d'autres ; cela ajoute une échelle supplémentaire.
Pour rappel, l'évolution des graphiques fractales dépend de la forme de leurs générateurs. La méthode des multi fractales, consiste à faire fusionner deux générateurs. Allons-y progressivement.
Référence à la figure 10 ci-dessous : Prenons tout d'abord deux générateur parents – un mère (rouge) et un père (bleu). L'un indique le prix par rapport au temps boursier ; l'autre le temps réel par rapport au temps boursier. Le bébé (violet) prend le temps du père et le converti en prix selon l'échelle de la mère. Le graphique financier obtenu en modifie le temps.

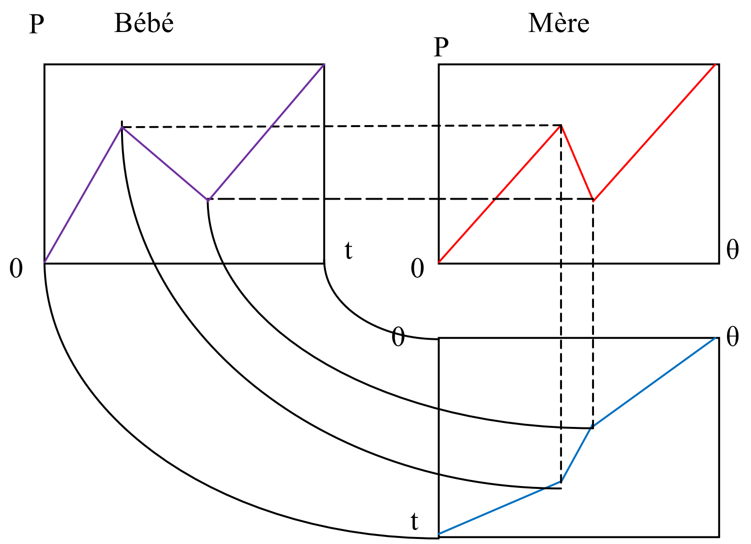


***Figure 10* –** « *Le bébé théorème* ». Diagramme qui montre comment faire fusionner deux générateurs. P, t, θ sont respectivement le prix, le temps d'horloge, le temps boursier. Source Auteur.

Toutefois, comment le père détourne-t-il l'horloge au bénéfice du temps boursier ? La formule mathématique sous-jacente est sans aucun doute un schéma fractal : plus précisément une cascade multiplicative. Prenons un exemple simple pour expliquer ce procédé mathématique.

---

[10] Le temps normal est l'horloge de 24h, par opposition au temps boursier

Soit la répartition des gisements de pétroles en Arabie Saoudite. 70% d'entres eux se situent sur la moitié-ouest du territoire, et donc 30% sur la moitié-est. Redécoupons chaque moitié avec les mêmes probabilités, 70% des 70% de la moitié-ouest se situent à l'ouest (49% du total) et 30% de cette moitié se situent à l'est (21% du total). De même que 70% des 30% de la moitié est se situent à l'ouest (21% du total) contre 30% de cette moitié est sont à l'est (9% du total). Cela se traduit donc par les graphiques suivants :

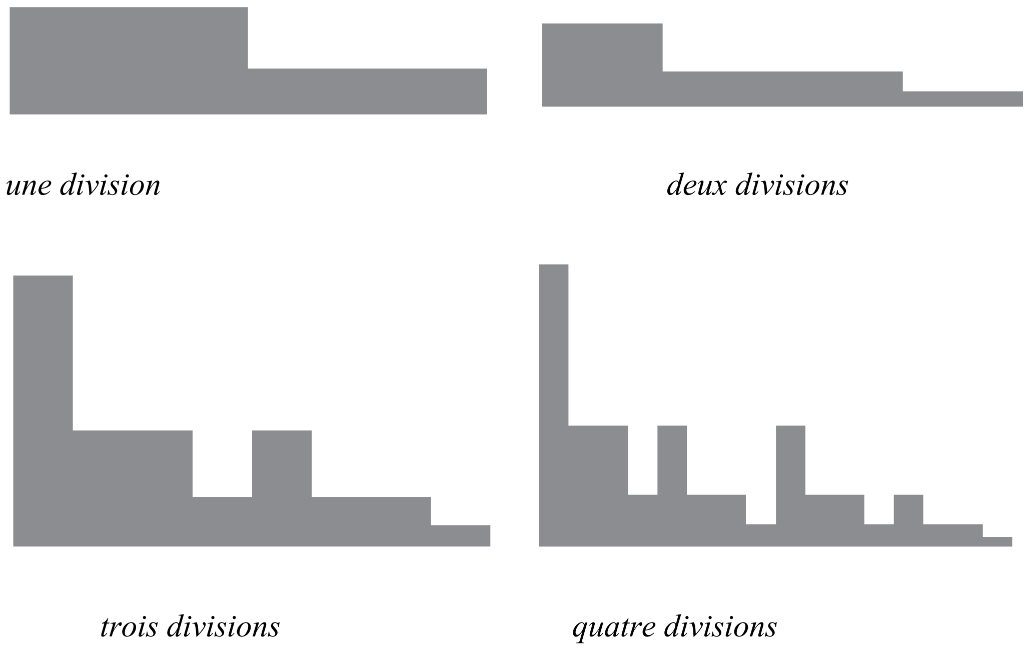


Figure 11 – Exemple d'une cascade multiplicative, par la répartition des gisements de pétroles en Arabie Saoudite, Source Auteur.

Avec cette modélisation du temps, les graphiques se rapprochent encore plus de la réalité économique. Toutefois, une dernière modification permettrait de prévoir une plus vaste gamme de fluctuations sauvages de cours.

Mandelbrot baptisa cet outil *modèle multifractal de rentabilité des actifs financiers*[11], le meilleur modèle aujourd'hui créé sur le mouvement fractionnaire en temps multifractal. Les bases utilisées, sont les mêmes que toutes celles développées au long de ce mémoire. Les formules mathématiques intérieures y sont simplement plus complexes. Le mathématicien a crée une composition[12] : le temps boursier se traduit à travers une autre fonction f(α)[13], le mouvement brownien lui, est une équation déterminé par ordinateur,

Le résultat ainsi obtenu est très proche de la réalité et permet de prédire des cours chahutés et très aléatoires. Il rend compte d'une plus grande précision que les modèles standards. Toutefois, l'analyse multifractale n'en est qu'à son début, B. Mandelbrot espère que d'autres chercheurs ou économistes amélioreront cet outil pour qu'il devienne *« une nouvelle et fructueuse façon de gérer l'économie et l'argent dans le monde »*.

---

[11] MMAR en anglais, Multifractal Model of Asset Returns
[12] Une fonction est à son tour fonction d'une autre (g o f)
[13] Spectre de dimension ou de singularité

Conclusion

La théorie du chaos s'apparente, comme un des grands bouleversements scientifiques du XXème siècle. Elle met en lumière, l'importance des extrémités, et des éléments mêmes infimes, sur la totalité d'un système. Du météorologue Lorenz, à l'initiateur Benoît Mandelbrot, des corps de scientifiques, au cours des années, ont organisé la rupture intellectuelle, avec les modèles de probabilité classique, émergée des travaux de Bachelier. Le modèle de finance classique, par l'approche linéaire, va très vite être remis en cause par une vision stochastique des systèmes dynamiques.
La loi normale va conceptualiser un portefeuille d'actions, en adoptant des lois de probabilité relatives à l'utilisation de la courbe de Gauss. Installée au rang de méthode fondamentale, cette loi normale relativise la distribution de variation d'une action, selon la courbe en cloche gaussienne, soit une distribution qui fluctue selon le pourcentage de confiance, d'un, deux ou trois écart type autour de l'espérance mathématique.
De là, plusieurs défaillances s'en sortent : la non prise en compte des évènements extrêmes, l'hypothèse d'une indépendance des variations ne coïncide pas avec la réalité, et la distribution normale trop simpliste, ne s'accorde pas avec le marché.

Ce sont les mathématiques fractales, filière géométrique, qui va donner réponses à l'apologie la théorie du chaos. Par la considération que les marchés sont « turbulents », la vision des marchés est alors particulière. La géométrie fractale va construire des analyses picturales, et visuelles du marché. Le marché a alors, une mémoire, c'est la réfutation de la « marche de l'ivrogne », fondatrice des travaux de bachelier sur le mouvement brownien. Mandelbrot, par un modèle au départ fractale, puis multi-fractale, va développer un nouveau modèle financier, permettant d'anticiper les risques.

La rupture intellectuelle s'organise alors autour de ces fractales. Elle permet de soulever toutes les interrogations, intervenues après la plus récente crise des subprimes. Les risques sont donc, appréhender différemment selon deux optiques : l'une déterministe, l'autre stochastique. La critique du modèle classique a donc été progressive, et n'est pas achevée. Les travaux ne restent pas aboutis, mais au terme de chaque année, des conclusions empiriques parviennent, et remettent à chaque fois en cause, l'état d'une méthode classique manifestement erronée.

Bibliographie

Livre

Une approche fractale des marchés, Mandelbrot Benoît, Odile Jacob, 2009.

Technique des marchés financiers, Christine Lambert, 2010.

Marchés et instruments financiers: L'importance des produits dérivés, Patrick Navatte, 2009.

Articles

Quelques éléments sur la théorie du chaos, Philippe Etchecopar, Cégep de Rimouski.

Is There chaos in the world economy ? Mototsugu Shintani, Oliver Linton, a nonparametric test using, 2001.

Les modèles fractals en finance, Juilen Idier, Bulletin de la Banque de France n°183, 1er trimestre 2011.

L'influence de Mandelbrot dans la finance, Alexandre Delaigue, OWNI digital journalism, 29 octobre 2010.

La finance est anormale, les Echos, Jean-Marc Vittori, 5 Mars 2008

Couverture des risques dans les marchés financiers, Nicole El Karoui, Ecole Polytechnique année 2003-2004

Chaos Theory and the Science of Fractals in Finance, Tania Velasquez.

Pouvoir prédictif de la volatilité implicite dans le prix des options de change, Bronka Rzepkowski,

Sites

http://math.cmaisonneuve.qc.ca/

http://users.math.yale.edu/

http://matisse.univ-paris1.fr/

http://www.euronext.com

http://www.amf-France.org

http://www.boursereflex.com

http://www.guide-finance.ch