# Dinamica del corpo rigido: Appunti.

I corpi rigidi sono sistemi di punti materiali, discreti o continui, che hanno come proprietà peculiare quella di conservare la loro forma, oltre che il loro volume, indipendentemente dallo stato dinamico in cui si trovano (quiete o moto, presenza o assenza di forze esterne).

Proprietà del corpo rigido (CR): Incompressibilità, indeformabilità.

Incompressibilità: implica che il volume del corpo rigido è costante, e dato che anche M è costante, ne consegue che $\rho(\mathbf{r})$ è pure costante.

Indeformabilità: implica che le distanza relativa fra 2 punti generici *i* e *j* del corpo rigido (i.e.: $d_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$) sia invariante nel tempo, indipendentemente dal fatto che esitano o meno forze esterne eventualmente applicate al corpo rigido stesso.

N.B: Il fatto che la distanza relativa di due punti generici del CR $d_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ sia costante durante il moto del CR, NON implica che anche la posizione relativa $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}(t)$ di due punti generici sia invariante nel tempo. Questo né vero se e solo se il moto del CR è traslatorio.

Conseguenze dell'indeformabilità di un CR:

a) se la distanza relativa $d_{ij}$ di due punti generici del CR non varia significa che ogni punto del CR, pensato come un sistema rigido di punti materiali, è in equilibrio, con riferimento all'azione delle forze interne, cioè $\mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{0}$ per ogni punto $m_i$ del CR;
b) pertanto, nel caso di un sistema rigido discreto di punti materiali, si avrà pure $\mathbf{F}_{INT} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{0} = \mathbf{0}$, cioè $W^{INT} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{W}_i^{(I)} = 0$. Ma se $W^{INT} = 0$, allora dovrà essere $E_p^{INT}$ = costante;
c) dato che le forze interne al CR NON fanno lavoro ($W^{INT} = 0$), il teorema dell'energia cinetica si scriverà: $\Delta E_{K,S} = W^{EXT}$, cioè la

variazione di energia cinetica del CR è pari al lavoro delle forze sole esterne;

d) inoltre, l'invarianza della distanza relativa fra 2 punti generici *i* e *j* del CR (i.e.: $d_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$) implica che il moto relativo di una coppia di punti del CR sia circolare di raggio $d_{ij}$ e caratterizzato dalla stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ uguale per tutte le coppie di punti del CR;

e) infine, la velocità relativa si potrà scrivere come $\mathbf{v}_{ij} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{ij}$, dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di rotazione, che è la stessa per tutti i punti del CR.

N.B: La velocità relativa di un generico punti $m_i$ rispetto al centro di massa del CR si potrà scrivere anche come: $\mathbf{v}_i'(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i'(t)$, dove $\mathbf{r}_i'(t)$ rappresenta il vettore posizione relativa istantanea del punto $m_i$ rispetto al CM del CR.

**<u>Gradi di libertà di un punto generico del CR</u>**:

Un'altra conseguenze dell'indeformabilità del corpo rigido è che il numero di gradi di libertà di esso si riduce a $6 = 3\ (\mathbf{r}_{CM}) + 3\ (r',\theta,\varphi)$.

**<u>Sistemi di riferimento usati per descrivere il moto di un CR</u>**:

1 – Oxyz sistema di riferimento laboratorio (sistema L):
nel sistema L un punto generico $m_i$ del CR in moto si muove lungo una traiettoria curvilinea con velocità istantanea $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$.

2 – CMxyz sistema di riferimento del centro di massa (sistema C):
nel sistema C un punto generico $m_i$ del CR si muove con velocità istantanea $\mathbf{v}_i'(t) = d\mathbf{r}_i'/dt$

Ma in conseguenza dell'indeformabilità di del corpo rigido ($d_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ invariante nel tempo) il moto di un punto generico rispetto al centro di massa non può che essere un moto circolare con velocità angolare

$\boldsymbol{\omega}$, che è la <u>stessa di tutti gli altri punti del corpo rigido</u>. Quindi dovrà essere $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_i' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i'$
N.B.: In base al teorema di Poisson: $d\mathbf{r}_i'/dt = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i' = \mathbf{v}_i'$.

3 – CMx'y'z', sistema di riferimento solidale al corpo rigido: in tale sistema tutti i punti del corpo rigido sono in quiete! Questo sistema di riferimento è molto utile per visualizzare l'eventuale moto relativo del corpo rigido rispetto al sistema L e C.

**Centro di massa (CM) del CR:** definizione e proprietà

$$\mathbf{r}_{CM}\ (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$$

Centro di massa di un corpo rigido come sistema discreto di $m_i$:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\, \mathbf{r}_i \Big/ \sum_1^N{}_i\ m_i$$

$$x_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\, x_i \Big/ \sum_1^N{}_i\ m_i;\ \text{etc.}$$

(i.e.: di un sistema di punti con struttura rigida, es. manubrio!)

Centro di massa di un corpo rigido e continuo, in termini di dm:

$$\mathbf{r}_{CM} = [\textstyle\int_M \mathbf{r}dm] / [\int_M dm] = [\int_V \mathbf{r}\ \rho(\mathbf{r})dV[\ / [\int_V \rho(\mathbf{r})dV];$$

$$x_{CM} = [\textstyle\int_M x dm] / [\int_M dm] = [\int_V x\ \rho(\mathbf{r})dV[\ / [\int_V \rho(\mathbf{r})dV],\ \text{etc.}$$

Le proprietà del CM di un corpo rigido sono le stesse che abbiamo dimostrato per i sistemi di punti materiali. Esso si troverà sempre nel baricentro (= punto di massima simmetria) del corpo rigido.

N.B. per il calcolo del CM di un corpo rigido omogeneo si sfruttano le proprietà geometriche del solido che ne riproduce la forma, e il CM coincide con il baricentro del solido.

N.B.: Posizione del CM di un CR continuo : disco; cilindro, cono, semisfera, guscio sferico, vedi Appunti sulla dinamica dei sistemi.

## Moto generale di un corpo rigido.

Il moto di un punto generico del CR è un moto roto-traslatorio.

Nel caso di moto roto-traslatorio del CR vale la relazione seguente:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{QP} \qquad (1)$$

quindi il moto roto-traslatorio di un punto generico P del CR può essere rappresentato in termini della somma di un moto traslatorio di un punto Q del CR scelto come punto di riferimento e di un moto rotatorio puro attorno ad un asse passante per lo stesso punto Q.

**Moto traslatorio del CR:** tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità, che è uguale a quella del CM del CR ($\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{CM}$), e descrivono traiettorie parallele tra essi e uguali a quella descritta dal CM del CR. Di conseguenza, nel caso di moto puramente traslatorio del CR la direzione del vettore posizione relativa $\mathbf{r}_{ij}$ di una coppia di punti del CR è invariante nel tempo.

Le grandezze collettive $\mathbf{P}_S$, $\mathbf{L}_{O,S}$ e $E_{k,S}$ di un CR in moto traslatorio si riducono assumono un'espressione particolarmente semplice, cioè:

$$\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM}; \quad \mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM}; \quad E_{k,S} = \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2.$$

Infatti tali relazioni dinamiche nel caso di moto traslazionale puro ($\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM}$) si ricavano come qui sotto mostrato:

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i\ m_i\, \mathbf{v}_i = (\sum_1^N{}_i\ m_i)\mathbf{v}_{CM} = M\mathbf{v}_{CM},$$

$$E_{k,S} = ½ \sum_i m_i\, v_i^2 = ½ \sum_i m_i\, v_{CM}^2 = ½\, Mv_{CM}^2 = E_{k,CM}$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}_{O,CM},$$

dato che sia $E_{k,}^{INT} = 0$ che $\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \sum_1^N{}_i\, L_{CM,i} = \mathbf{0}$: infatti nel caso di moto puramente traslazionale tutti i punti del corpo rigido si muovono con velocità $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM}$, e quindi $\mathbf{v}'_i = 0$, ossia $E_{k,i}' = 0$ e $\mathbf{L}_{CM,i}' = 0$, per ogni punto materiale $m_i$ del CR.

**Riassumendo: N**el caso di moto puramente traslatorio di un CR ($\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM}$):

$$\mathbf{P}_S = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i\, \mathbf{v}_i = (\sum_i m_i)\mathbf{v}_{CM} = M\mathbf{v}_{CM},$$

$$E_{k,S} = E_{k,INT} + E_{k,CM} = ½\, Mv_{CM}^2;$$

$$\mathbf{L}_{S,O} = \mathbf{L}_{INT} + \mathbf{L}_{ORB} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\, \mathbf{v}_{CM}\ ,$$

perchè $\mathbf{L}_{INT} = \sum_i L'_{CM,i} = 0$, infatti nel caso di moto puramente traslazionale tutti i punti del corpo rigido si muovono con velocità $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM}$, e quindi $\mathbf{v}'_i = 0$, ossia $L'_{CM,i}$ è nullo per tutti i valori di i.

**Moto rotazionale del corpo rigido:** è il moto in cui tutti i punti $m_i$ del CR descrivono archi di circonferenza (tutti con la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$) rispetto a un asse di rotazione passante per un punto particolare del CR preso come polo di riferimento. Questo punto di riferimento può essere opportunamente fatto coincidere con il CM del CR, dato che, come abbiamo già visto, le due leggi cardinali della dinamica dei sistemi valgono anche nel sistema C:

N.B.: Sistema C = sistema di riferimento del CM del CR:

Nel sistema C valgono entrambe le leggi cardinali della dinamica:

– I$^a$ legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = 0$, ma …

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II$^a$ legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}$.

N.B.: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (anche se CM è in moto NON uniforme).

Se l'asse è passante per il CM allora la velocità del punto diventa:

$$\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_i$$

perchè il punto generico $m_i$ descrive un moto circolare attorno al CM con velocità angolare comune a tutti i punti del corpo rigido.

Calcolo delle grandezze dinamiche collettive del CR nel sistema C:

$$\mathbf{P}'_S = 0,$$

$$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i$$

$$E'_{k,S} = \tfrac{1}{2} \sum_1^N{}_i\, m_i v'^2_i$$

**Moto <u>roto-traslatorio</u> del corpo rigido** rispetto al sistema del laboratorio Oxyz: Assumendo come punto di riferimento il CM del CR (i.e.: Q = CM), la relazione (1) si può scrivere così:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P',$$

mentre l'espressine delle grandezze dinamiche $\mathbf{P}_S$, $\mathbf{L}_{O,S}$ e $E_{k,S}$ riproduce esattamente le relazioni di Konig per i sistemi di punti materiali, essendo il risultato della somma delle corrispondenti grandezze derivate, separatamente, per il moto del CR puramente traslatorio e per il moto del CR puramente rotatorio attorno al CM.

## Equazioni cardinali del moto roto-traslatorio di un corpo rigido:

**I$^a$ equazione cardinale** del moto di un corpo rigido:

(Equazione cardinale del moto traslazionale puro)

$$d\mathbf{P}_S/dt = F^{EXT},$$

ma per il teorema del moto del CM si ha anche

$$Ma_{CM} = F^{EXT} = \sum_1^N{}_i F_i^{(E)}.$$

**II$^a$ equazione cardinale** del moto di un corpo rigido:
(Equazione cardinale del moto rotazionale puro):

$$d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \boldsymbol{\tau}_O^{EXT} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(E)}.$$

N.B.: Moto rotazionale attorno ad un asse passante per il CM: vale ancora il teorema del momento angolare:

$$d\mathbf{L}_{S,INT}/dt = d\mathbf{L}_{S,CM}/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{i,CM}^{(E)}.$$

Condizione di equilibrio roto-traslatorio del CR:

$$d\mathbf{P}_S/dt = F^{EXT} = \sum_1^N{}_i F_i^{(E)} = \mathbf{0}$$

$$d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \boldsymbol{\tau}_O^{EXT} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(E)} = \mathbf{0}$$

**Moto rotazionale del CR attorno a un asse con un punto fisso O**:

l'equazione del moto di ottiene dal teorema del momento angolare: $d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \boldsymbol{\tau}_O^{EXT} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)}$.

N.B.: Moto rotazionale attorno ad un asse passante per il CM: vale ancora il teorema del momento angolare:

$$d\mathbf{L}_{S,INT}/dt = d\mathbf{L}_{S,CM}/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{i,CM}^{(E)}.$$

Per risolvere l'equazione cardinale del moto rotazionale del corpo rigido bisogna aver calcolato $\mathbf{L}_{S,O}$, oppure $\mathbf{L}_{S,CM}$ e poi derivare rispetto al tempo.

Ergo, prima di poter affrontare la risoluzione dell'equazione del moto del corpo rigido, bisogna calcolare il momento angolare $\mathbf{L}_{S,O}$.

**Momento angolare del corpo rigido, due casi particolari:**

1 – caso di una coppia di particelle in rotazione attorno ad un asse perpendicolare alla congiungente;

2 – caso della piastra in rotazione attorno ad un asse passante per un punto fisso e perpendicolare al piano della lamina.

3 – caso di un corpo solido tridimensionale in rotazione attorno ad un asse passante per il CM supposto fisso.

Nei casi di corpi con simmetria rispetto all'asse di rotazione $\mathbf{L} \propto \boldsymbol{\omega}$, tramite un coefficiente di inerzia, associato alla distribuzione delle masse attorno all'asse di rotazione:

$$I_Z = \sum_1^N{}_i \, m_i R_i^2$$

e che è chiamato *momento di inerzia* del corpo rigido.

2 - Il caso di un manubrio che ruota attorno ad un asse fisso <u>non parallelo</u> all'asse di simmetria passante per il CM del manubrio e non perpendicolare alla congiungente le due masse puntiformi.

N.B.: $\mathbf{L}_O$ non più parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ (i.e.: $\mathbf{L}_O \neq I_Z\boldsymbol{\omega}$), ma è pur sempre $L_z = \sum_i L_{i,z} = \sum_i m_i R_i^2 \omega$.

**3 - Momento angolare del corpo rigido**: Caso generale:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i \, \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

N.B.: in generale, $\mathbf{L}_O \neq I_Z\boldsymbol{\omega}$ e è invece $L_{O,Z} = I_Z\, \omega$, con z//ω.

Infatti: $L_{O,i} = r_i m_i v_i = m_i v_i r_i$, ma $v_i = | \boldsymbol{\omega} \wedge_i \mathbf{r}_i | = \omega r_i \sin\theta_i = \omega R_i$,
e quindi $L_{O,i} = m_i R_i \omega r_i$, ma non è parallelo a ω: $\mathbf{L}_{O,i}$ // $\boldsymbol{\omega}$.

$$L_{O,z} = \sum_i L_{O,z,,i} = \sum_1^N{}_i \, r_i m_i v_i \cos(\pi/2 - \theta_i) = \sum_1^N{}_i \, m_i R_i^2 \omega$$

Componenti del momento angolare di un corpo rigido parallela e perpendicolare all'asse di rotazione z.

$$L_{O,z} = \sum_1{}^N{}_i L_{O,i,z} = \sum_1{}^N{}_i m_i R_i^2\, \omega = \sum_1{}^N{}_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\, \omega = I_O^Z\, \omega,$$

con $I_O^Z$ momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z passante per il punto fisso O.

**Momento d'inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse z:**

Definizione di momento di inerzia di un CR discreto:

$$I_O^Z = \sum_1{}^N{}_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_1{}^N{}_i m_i R_i^2,$$

dove $R_i^2 = (x_i^2 + y_i^2)$ raggio della circonferenza descritta da punto mi nel suo moto di rotazione attorno all'asse z, passante per O:

Se il corpo rigido è continuo, si parte da $dI_Z = r^2 dm$

$$dI_O^Z = \int_M r^2 dm = \int_V r^2\, \rho(\mathbf{r}) dV =$$

per integrazione su tutto il volume: $I^Z = M K^2$, dove K è chiamato raggio giratore del corpo rigido (suo significato)

Significato fisico del momento di inerzia di un CR:

1) dipende dalla distribuzione di massa del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione z;
2) quindi NON è una proprietà intrinseca del corpo rigido, come invece sono la sua massa e il suo CM,
3) misura la resistenza opposta dal corpo rigido alla variazione del suo stato rotazionale, cioè al cambiamento della sua velocità di rotazione $\boldsymbol{\omega}$.

Momento di inerzia di un CR piano, disposto nel piano xy, rispetto agli assi x,y,z passanti per il suo CM :

$$I_C^Z = \sum_1^N{}_i\, m_i\,(x'^2_i + y'^2_i),\ I_C^X = \sum_1^N{}_i\, m_i\, y'^2_i,\ I_C^Y = \sum_1^N{}_i\, m_i\, x'^2_i,$$

quindi: $I_C^Z = I_C^X + I_C^Y$,

Se, inoltre, il corpo rigido piano ha una forma simmetrica nel piano xy (i.e.: quadrata o circolare), cioè se $I_C^X = I_C^Y$ allora sarà $I_C^X = I^Z/2$ .

N.B.: Il momento di inerzia del CR dipende dall'orientazione dell'asse di rotazione rispetto alla configurazione del CR, nel senso che dipende dalla particolare distribuzione della massa del CR attorno all'asse di rotazione, la quale determina un coefficiente di inerzia rotazionale specifico, dato dal valore del momento di inerzia del CR rispetto all'asse di rotazione attorno a cui il CR ruota.

Espressione dei momenti di inerzia di alcuni corpi rigidi rispetto ad un asse di rotazione z passante per il CM del CR: asta ($I_C^Z=ML^2/12$), anello ($I_C^Z=MR^2$), disco ($I_C^Z=MR^2/2$), sfera ($I_C^Z=2R^2/5$).

Il caso della sbarra omogenea sottile di massa M: calcolo del momento di inerzia rispetto a un asse z, perpendicolare all'asta, passante per il CM dell'asta, e rispetto all'asse parallelo a z ma passante per il punto O, posto a distanza d = L/2 dal CM del CR:

$$I_C^Z = M\,L^2/12$$

$$I_O^Z = M(L/2)^2 + I_C^Z = M\,L^2/3,$$

<u>Teorema di Huygens-Steiner:</u>

$$I_O^Z = Md^2 + I_C^Z,$$

con  d = distanza tra i due assi di rotazione paralleli, passanti per il CM e per il punto O, rispettivamente.

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
I_O^Z &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i [(x_{CM}+x'_i)^2 + (y_{CM}+y'_i)^2] = \\
&= \sum_i m_i (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) + \sum_i m_i (x'^2_i + y'^2_i) + \\
&\quad + 2\, x_{CM} (\sum_i m_i x'_i) + 2\, y_{CM} (\sum_i m_i y'_i) \\
&= (\sum_i m_i)\, d^2 + I_C^Z.
\end{aligned}
$$

N.B: Nel calcolo del momento di inerzia di un corpo rigido basterà procedere al calcolo rispetto ad un asse z' passante per il suo CM, dopo di che il momento di inerzia rispetto a un asse z parallelo a z' passante per un punto O, posto a distanza d dall'asse z' per il CM, sarà dato dalla relazione $I_O^Z = I_C^Z + Md^2$,  indipendentemente dall'orientazione dell'asse z' rispetto al CR.

Tornando al momento angolare:
Si ha $\mathbf{L}_O = I_O^Z \boldsymbol{\omega}$  se l'asse z è asse di simmetria, mentre  se l'asse z è un asse generico passante per O si ha $L_{O,Z} = I_O^Z \omega$ (componente z!)  .

**Significato di momento angolare di un corpo rigido.**
Quando risulta  $\mathbf{L}_O = I_Z \boldsymbol{\omega}$  si dice che z è un asse principale di inerzia per il corpo rigido.

Qualunque sia la forma del corpo esistono almeno 3 assi principali di inerzia ($X_0$,$Y_0$,$Z_0$), solidali al corpo rigido e ruotanti con esso, mutuamente perpendicolari che si intersecano nel punto O considerato.

Se il punto O coincide con il CM del sistema si parla di assi centrali di inerzia o, anche, di *assi liberi di rotazione*.

Inerzia rotazionale del corpo rigido quando ruota attorno a un asse libero di rotazione. In termini dei momenti principali di inerzia $I_1$,$I_2$ e $I_3$ si potrà scrivere $\mathbf{L} = I_1\omega_{X0}\,\mathbf{u_{X0}} + I_2\,\omega_{Y0}\,\mathbf{u_{Y0}} + I_3\,\omega_{Z0}\,\mathbf{u_{Z0}}$, dove $\omega_{X0}\,\mathbf{u_{X0}}$ rappresenta la componente di $\boldsymbol{\omega}$ nella direzione $X_0$ etc. etc.. Se la rotazione avviene lungo un asse principale di inerzia, ad es. $Z_0$, allora $\boldsymbol{\omega} = \omega_{Z0}\,\mathbf{u_{Z0}}$, la relazione si semplifica in $\mathbf{L} = I_3\,\omega_{Z0}\,\mathbf{u_{Z0}}$, cioè $\mathbf{L} = I_Z\,\boldsymbol{\omega}$, che vale se l'asse di rotazione è un asse principale di inerzia.

<u>Energia cinetica del corpo rigido e lavoro delle forze esterne:</u>

$$\Delta E_{k,S} = W^{EXT}.$$

Espressioni dell'energia cinetica del CR nel sistema L:

- moto puramente traslatorio: $E_{k,S} = E_{k,CM} = ½\, Mv_{CM}^2$
- moto puramente rotatorio attorno ad un asse passante per O:
  $E_{k,S} = \sum_i E_{k,i} = ½\sum_i m_i\, v_i^2 = ½\sum_i m_i\,(\omega R_i)^2 = \sum_i m_i\, R_i^2\, \omega^2 = ½ I_O\, \omega^2.$

Caso generale di moto roto-traslatorio:

$$E_{k,S} = ½ I_C\omega^2 + ½ Mv_{CM}^2 = E_k' + E_{k,CM},$$

in accordo con il teorema di Konig per l'energia cinetica.

Relazione di Huygens-Steiner e Energia cinetica del CR in moto rotatorio attorno a un asse z passante per il punto fisso O, non coincidente con il CM del CR.

Energia cinetica rotazionale (nel sistema L, con origine nel punto O):

$$E_{k,S} = \sum_i E_{k,i} = ½\sum_i m_i\, v_i^2 = ½\sum_i m_i\,(\omega R_i)^2 = \sum_i m_i\, R_i^2\, \omega^2 =$$
$$= ½ I_O\, \omega^2 = ½\,(I_C + Md^2)\omega^2 = ½ I_C\, \omega^2 + ½ Md^2\omega^2 =$$
$$= ½ I_C\omega^2 + ½ Mv_{CM}^2 = E_k' + E_{k,CM}.$$