République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran
(Mohamed Boudiaf)

Faculté de Physique
Département de Physique Energétique

COURS ET EXERCICES DE REGULATION

Destiné aux étudiants en Licence et Master Energies renouvelables.

Réalisé par: Mr. Djaaffar RACHED
Maître de Conférences B, USTO-MB

Année universitaire 2014/2015

Résumé :

La régulation est une discipline technique destiné a analysé et concevoir des systèmes de commande pratiques et autres dispositifs technologiques.

Ce polycopié, a pour but de présenter un exposé sur les fondements des systèmes asservis linéaires. Il est destiné aux ingénieurs, physiciens, mathématiciens ainsi qu' aux étudiants dans ces disciplines. Pour comprendre cet exposé, seules des connaissances de base en physique ainsi qu'en calcul différentiel et intégral sont nécessaires. Les connaissances dépassant le niveau serons exposées, notamment des équations différentielles à la transformée de LAPLACE.

Ce polycopié se divise en deux parties. Dans la première, nous étudierons la terminologie des systèmes asservies, les éléments constitutifs d'une chaine de régulation les méthodes pour résoudre les équations différentielles linéaire à coefficient constant, la transformée de LAPLACE, les fonctions de transferts, les schémas fonctionnels et l'application des transformées de LAPLACE à la résolution des équations différentielles. Dans la deuxième partie, nous étudierons deux méthodes d'analyse et de conception qui sont les diagrammes de Bode et de Nyquist.

Chaque chapitre a été renforcé par une série d'exercices avec leurs corrigés, pour approfondir la compréhension du cours.

Nous souhaitons que cet ouvrage soit profitable et servira comme référence, à toute personne, intéressée par l'étude de la régulation et des systèmes asservis.

Sommaire

République Algérienne Démocratique et Populaire 1
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique 1
Faculté de Physique 1
Département énergétique 1
CHAPITRE I 5
INTRODUCTION 5
1- QUELQUES DEFINITIONS : 5
2- STRUCTURE D'UN SYSTEME ASSERVI : 6
3- REGULATION MANUEL DE NIVEAU : 6
4- REGULATION AUTOMATIQUE DE NIVEAU : 7
5-LES SIGNAUX DE COMMUNICATION- CABLAGE : 8
6- LA LOI DE COMMANDE : 11
7- LES ELEMENTS CONSTITUTIFS DE LA CHAINE DE REGULATION 12
8-EXERCICES : 14
CHAPITRE II 17
SYSTEMES LINEAIRES 17
1 – DEFINITIONS : 17
2- CALCUL OPERATIONNEL : 17
3- QUELQUES PROPRIETES DES TRANSFORMEES DE LAPLACE 18
4- APPLICATION DES TRANSFORMEES DE LAPLACE A LA RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES : 19
5- DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES D'UNE FRACTION RATIONNELLE : 20
6-EXERCICES : 21
CHAPITRE III 24
ALGEBRE DES SCHEMAS FONCTIONNELS 24
ET FONCTIONS DE TRANSFERT DES SYSTEMES 24
1- INTRODUCTION : 24
2- TERMINOLOGIE DES SHEMAS FONCTIONNELS : 26
3- SYSTEMES EN ENTREES MULTIPLES. APPLICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION : 28
4-EXERCICES : 29
CHAPITRE IV 32
SYSTEMES LINEAIRES 32
1- SYSTEMES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE : 32

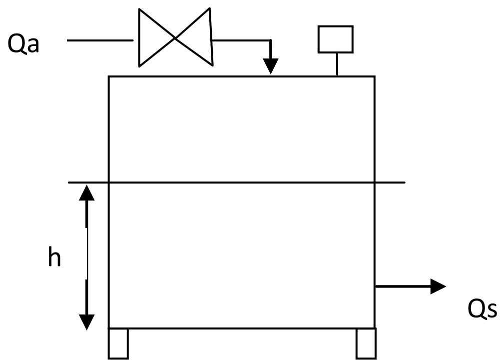
2- REPONSES INDICIELLES D'UN SYSTEME DE PREMIER ORDRE : 32
3- SYSTEMES LINEAIRES DU DEUXIEME ORDRE : 34
4- EXERCICES : 37
CHAPITRE V 39
STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES. 39
1- DEFINITION: 39
2- CONDITION FONDAMENTALE DE STABILITE: 39
3- CRITERES DE STABILITE ROUTH ET HURWITZ: 40
4- EXERCICES: 41
CHAPITRE VI 43
LES DIAGRAMMES DE BODES ET NYQUIST 43
1- INTRODUCTION : 43
2-ÉCHELLE SEMI-LOGARITHMIQUE : 44
3-DEFINITION DE L'ECHELLE LOGARITHMIQUE : 44
4-TRACE DES DIAGRAMMES DE BODES : 45
5- TRACE DES DIAGRAMMES NYQUIST : 53
6- EXERCICES : 55
REFERENCES : 57

CHAPITRE I
INTRODUCTION

1- QUELQUES DEFINITIONS :

La régulation permet de maintenir une grandeur physique à une valeur constante quelques soient les perturbations extérieures. L'objectif global de la régulation peut se résumer par ces trois mots clefs : Mesurer, Comparer et Corriger.
Nous somme donc amenés à effectuer des mesures pour obtenir certaines connaissances avant d'entreprendre une action. Ces mesures seront obtenues par l'intermédiaire d'appareillages spécifiques.

Exemple de procédé de régulation d'un bac de stockage : Notre objectif et maintenir un niveau h constant : Régulation de niveau



Les grandeurs qui modifient l'état du système : Grandeurs d'entrée.

Le débit d'alimentation Qa.

Le débit de soutirage Qs.

La température et la concentration du produit entrant : Ta et ca.

Les grandeurs qui caractérisent l'état du système : Grandeurs de sortie.

Le niveau : h.

La température du produit dans le bac : T.

La concentration du produit : c.

2- STRUCTURE D'UN SYSTEME ASSERVI :

Le principe de base d'un asservissement est de mesurer l'écart entre la valeur réelle et la valeur cible de la grandeur asservie, et de piloter les actionneurs agissant sur cette grandeur pour réduire cet écart.

a- Schéma fonctionnel : C'est une représentation graphique abrégée des entités entrée et sortie d'un système physique.

b- Système : C'est un dispositif isolé soumis à des lois bien définies. Chaque système a plusieurs entrées et sorties par lesquelles on peut exercer une influence sur ce système.

c- La consigne : c'est ce que je veux, ce que je désire obtenir, exemple je veux 20 degrés centigrades dans mon salon.

d- La grandeur réglante : c'est la grandeur qui va agir sur le processus (ex : radiateur) pour permettre dans notre exemple de modifier la température.

e- La grandeur réglée : c'est ce que j'ai réellement, exemple j'ai 18 degrés centigrades dans ma pièce alors que j'en veux 20.

f- Les perturbations: ce sont des phénomènes qui peuvent modifier la bonne stabilité d'une boucle de régulation (ex : ouverture d'une fenêtre dans le cas d'une régulation de température d'un local domestique).

g- Le comparateur: Compare en permanence la consigne (w) et la grandeur réglée (x) et donne le résultat de cette comparaison au régulateur.

h- l'erreur ε : Appelé également signal de commande, c'est la somme algébrique des signaux d'entrés et de sorties.

3- REGULATION MANUEL DE NIVEAU :

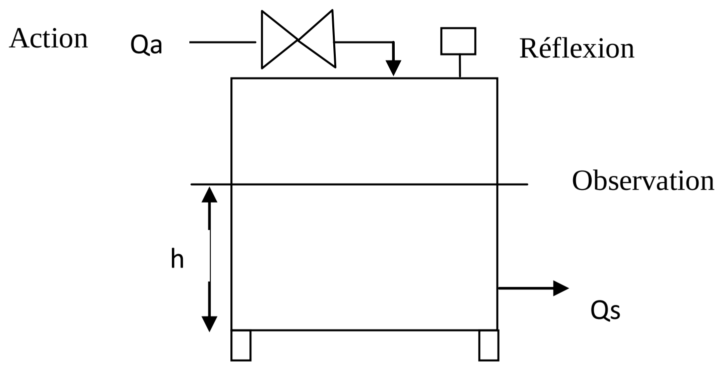
Pour effectuer la régulation manuellement nous avons besoin de trois opérateurs.

Observation : Mesurer h et transmission de la mesure.

Réflexion : Reçoit la mesure, comparaison de la mesure avec la consigne, commander l'ouverture de la vanne et transmission de la mesure.

Action : Agir sur la vanne pour modifier le débit Qa, puis retour a l'observation.

Cette boucle de régulation est dite boucle de régulation fermée.



Pour automatiser cette boucle, il faut remplacer chaque maillon humain par un appareil. Il faut également faire communiquer ces appareils les uns avec les autres.

4- REGULATION AUTOMATIQUE DE NIVEAU :

Les individus sont remplacés par des appareils.

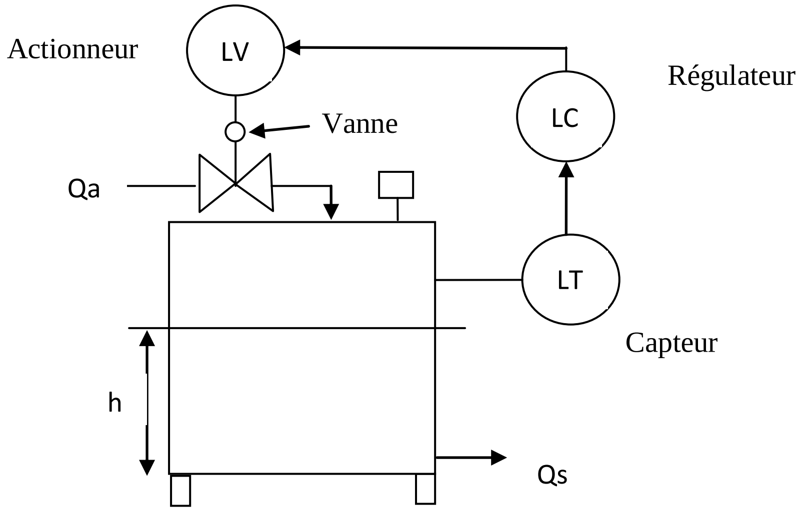
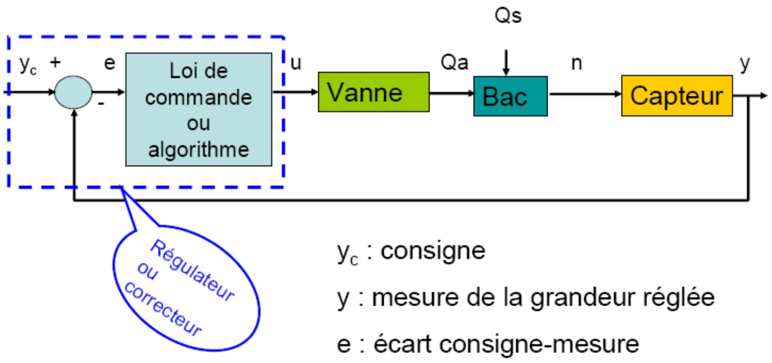


Schéma fonctionnel de la boucle de régulation de niveau :



5-LES SIGNAUX DE COMMUNICATION- CABLAGE :

5.1 Nature des signaux transmis : Nous allons transmettre l'information en utilisant un support physique facilement contrôlable. Il sera soit électrique soit pneumatique (pressions d'air dans des tubes).

5.2 Signal électrique - Intensité électrique : Les signaux de communication sont en général un courant continu variant de 4 à 20 mA. Pour brancher les fils :

a- Chercher le générateur électrique du 4-20 mA.

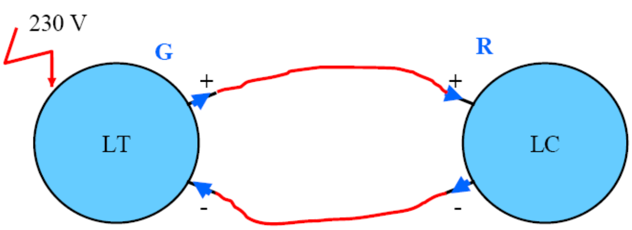
Si le capteur est passif (il n'est pas alimenté), on installe un générateur externe : Transformateur - Redresseur 220 V AC en 24 V DC.

Si le capteur est actif (alimenté en 220 V), c 'est lui qui est générateur.

b- Placer la flèche du courant en fonction des polarités.

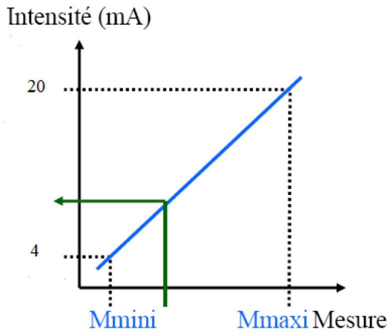
Convention Générateur : le courant **sort** par la borne PLUS.

Convention Récepteur : le courant **entre** par la borne PLUS.

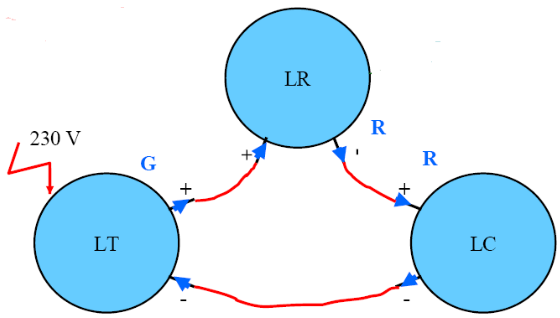


Le signal électrique, contenant l'information sur M, est émis par le capteur-transmetteur sous forme d'une intensité électrique, le courant transite par le régulateur et retourne au capteur puisque la boucle de courant est fermée.

Le régulateur mesure ce courant lors de son passage et connaît ainsi l'information véhiculée.



Dans le cas ou on veut rajouter un enregistreur:



<u>Comment calculer l'intensité en fonction de la mesure en pourcentage d'échelle?</u>

Pour un bac qui peut contenir entre 2 et 8 mètre de liquide :

$$M = \frac{\text{h} - \text{hmin}}{\text{hmax} - \text{hmin}}$$

<u>Exemple de mesure : (3m)</u>

$$M = \frac{3-2}{8-2} = 0.167$$

Le capteur mesure : M=16.7%

Règle : Il y a conservation du pourcentage : Egalité des Pourcentages. M % = I % donc : I=M=0.167

$$I = \frac{i - Imin}{Imax - Imin} = \frac{i - 4}{20 - 4} = 0.167$$

Soit i=6.67mA.

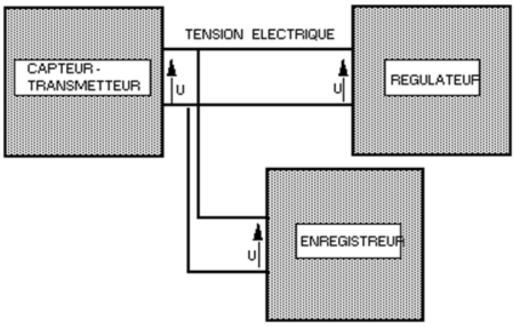
Le régulateur lit cette intensité et détermine le pourcentage de l'étendue d'intensité. La mesure de cette intensité (i=6.67mA) va lui permettre de comprendre que la mesure M est égale à 16.7% de l'étendue d'échelle du capteur.

Remarques :

- Le régulateur ne connaît pas la nature de la grandeur physique mesurée.
- La valeur basse est fixée à 4 mA et non à 0 mA pour pouvoir séparer le diagnostic de panne de la mesure et la valeur minimale de l'étendue d'échelle du capteur.

5.3 Signal électrique - Tension électrique : L'information avec ce type de signal est transmise de la même façon que pour le 4-20 mA mais avec maintenant une tension normalisée qui varie de 0 à 10 V ou 0 à 5 V.

Pour transmettre l'information à l'enregistreur. On va insérer dans la boucle effectuée par la tension d'information notre enregistreur :



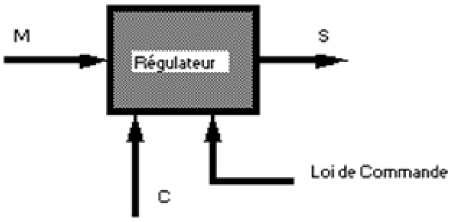
5.4 Signal pneumatique – Pression :

L'information avec ce type de signal est transmise de la même façon que pour le 4-20 mA mais avec un signal transmis dans ce cas est une pression qui varie entre 0,2 et 1 bar.

6- LA LOI DE COMMANDE :

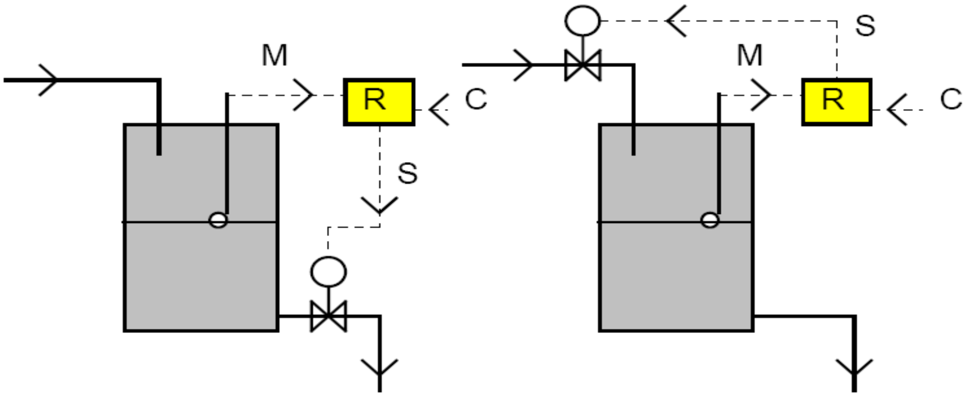
Le rôle du régulateur lorsque la mesure s'écarte de la valeur de consigne, est de déterminer la correction à apporter pour ramener la mesure à sa valeur de consigne.

Le régulateur reçoit l'information sur la mesure M (%) et possède aussi l'information sur la consigne C.



Le régulateur calcule d'abord l'écart Mesure - Consigne (M-C), puis la valeur de S telle que : S = f(M-C) où f est la loi de commande ou encore algorithme de contrôle. La loi de commande la plus simple et la plus répandue dans l'industrie est le P.I.D. (Algorithme Proportionnel Intégral Dérivé).

Le sens d'action consiste à calculer l'écart Mesure - Consigne de la façon suivante : M-C (direct) ou C-M (inverse). Exemple :



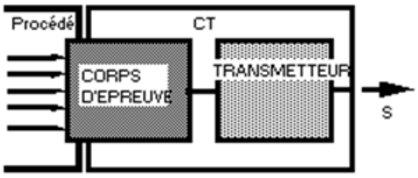
a- La vanne doit s'ouvrir lorsque la mesure augmente. b- la vanne doit se fermer lorsque la mesure augmente.

7- LES ELEMENTS CONSTITUTIFS DE LA CHAINE DE REGULATION

7.1 Le capteur-transmetteur : Le capteur-transmetteur est constitué de 2 parties principales :

a. Le corps d'épreuve qui se trouve en contact avec la grandeur physique à mesurer.

b. Le transmetteur est chargé de mettre en forme normalisée le signal S et transporte l'information. Ce transmetteur est aussi appelé conditionneur.



<u>a. Le corps d'épreuve :</u>

Exemples :

- La sonde qui se trouve plongée dans le milieu dont on mesure la température et dont la résistance varie quand la température varie.
- La membrane qui détecte une variation de pression par rapport à une pression de référence (vide ou atmosphère).

<u>b. Le transmetteur ou conditionneur :</u> C’est lui qui traite la mesure recueillie par le corps d’épreuve de façon à en tirer la valeur de la grandeur physique que l’on mesure.

Exemples :

- Pour la mesure de température, le transmetteur mesure la résistance de la sonde et lui affecte la température correspondante puis transforme cette valeur en pourcentage et enfin génère le signal de transmission.
- Pour la mesure de pression, le transmetteur relève la déformation de la membrane, lui associe la pression correspondante...

<u>7.2. Choix du capteur-transmetteur :</u> Il existe 2 types de capteur-transmetteurs, les capteur-transmetteurs dits "actifs" et les capteur-transmetteurs dits "passifs".

Les capteur-transmetteurs actifs sont alimentés en 220 V et produisent le signal d’information (par exemple une intensité dans la gamme 4-20 mA).

Les capteur-transmetteurs passifs ne sont pas alimentés en 220 V. dans ce cas, il faut ajouter un générateur.

Le choix du corps d’épreuve est effectué en fonction du procédé. Pour le choix du transmetteur, il est effectué en fonction de la nature du signal d’information transmis.

7.3. Les principales lettres utilisées en régulation [1] :

1			2				3			4			5	
Variable mesurée			**Premier élément**				**Fonction**			**Dispositif réglant**			**Signalisation**	
1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2
Signification	Initiale	Modificateur	Elément primaire Capteur	Indicateur	Transmetteur	Enregistreur Imprimante	Régulation	Commutation Contacts	Relais divers et de calcul	Organe de réglage	Actionneur	Autonome	Lampe témoin	Alarme
	A à Z	**D F Q**	**E**	**I**	**T**	**R**	**C**	H(H) **S** M L (L)	**Y**	**V**	**Z**	**CV**	H (H) **L** M L (L)	H(H) **A** M L (L)
Tension Electrique	E			EI										
Débit	F	FF FQ	FE	FI FFI FQI	FT FIT FFT FQT FFIT..	FR FFR FQR	FC FIC FFC FRC FFIC FFRC	FSHH FSH FSM FSL FSLL	FY FFY	FV FFV	FZ FFZ	FCV	FLHH FFLHH FQLHH FLH FFLH...	FAHH FFAHH FQAHH FAH FFAH..
Courant électrique	I			**I**										IAHH IAH..
Action humaine	H						HC,HIC							
Niveau	L		LE	LI	LT,LIT	LR	LC LIC LRC	LSHH LSH LSM..	LY	LV	LZ	LCV	LLHH LLH LLM..	LAHH LAH LAM..
Pression	P	PD	PE	PI PDI	PT PDT	PR PDR	PC PIC PDC PDIC	PSHH PDSHH ...	PY PDY	PV PDV	PZ PDZ	PCV PDCV PSV	PLHH PDLHH PLH	PAHH PDAHH PAH ...
Température	T		TE	TI	TT TIT	TR	TC TIC	TSHH TSH...	TY	TV	TZ	TCV	TLHH TLH..	TAHH TAH..

Modificateur 1.3 D : différentiel	F : fraction (rapport)	Q : quantité (totalisateur, intégrateur, compteur)	

Commutation 1.3 Lampe témoin 5.1 et Alarme 5.2 peuvent comporter un qualificatif:
HH : très haut H : haut M : milieu (intermédiaire) L : bas LL : très bas

8-EXERCICES :

Exercice 1 : L'intensité transmise par un capteur-transmetteur d'étendue d'échelle 4 à 20 mA est égale à13mA.

1- Quelle mesure pour un bac qui comtien entre 2 et 8 mètre de liquide pour cette intensité.

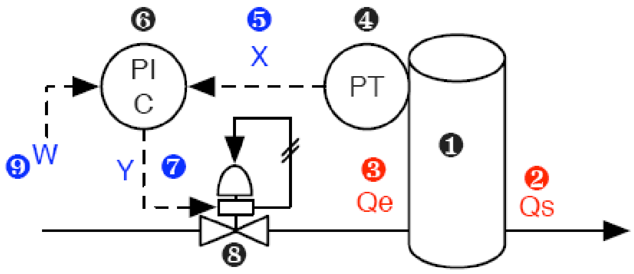
2- Même question pour un bac qui comtien entre 3 et 12 mètre de liquide.

Exercice 2: On mesure la température (20°C) issue d'un capteur-transmetteur d'étendue d'échelle 0 à 80°C.

1- Calculer l'intensité transmise par le capteur-transmetteur d'étendue d'échelle 4 à 20 mA.

2- Même question pour une température de 40°C.

<u>Exercice 3:</u> Soit une régulation de pression d'un bac contenant un solvant donnée par le schéma ci-dessous :



PIC : Régulateur de pression.

PT : Transmetteur de pression.

Qe : Quantité de pression en entré dans le bac.

Qs : Perturbation.

8 : Détendeur. 1- Trouver Schéma fonctionnel de cette boucle régulation.

Soit un niveau de 5 m mesuré à l'aide d'un capteur-transmetteur d'étendue d'échelle 0-15 m.

2- Calculer la pression transmise par le capteur-transmetteur d'étendue d'échelle 0.1 à 1 bar.

3- Même question pour une mesure de 7m.

<u>Correction exercice 1</u>

$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{i - Imin}}{\mathrm{Imax - Imin}} = \frac{13-4}{20-4} = 0.563$ Soit : I=56.3% Soit : M=56.3%

$M = \frac{\mathrm{h - hmin}}{\mathrm{hmax - hmin}} = \frac{\mathrm{h} - 2}{8-2}$ h=(8-2)0.563+2=5.38m

<u>Correction exercice 2</u>

$M = \frac{20-0}{80-0} = 0.25$ Soit : M=25%

Il y a conservation du pourcentage $I = \frac{i-4}{20-4} = 0.25$ Ce qui correspond à i=8 mA.

Correction exercice 3

$M = \frac{0.5-0}{1-0} = 0.5$ On trouve M=50%. M % = V %

$V = \frac{v-0}{5-0} = 2.5$ v=2.5V c.-à-d. 25%

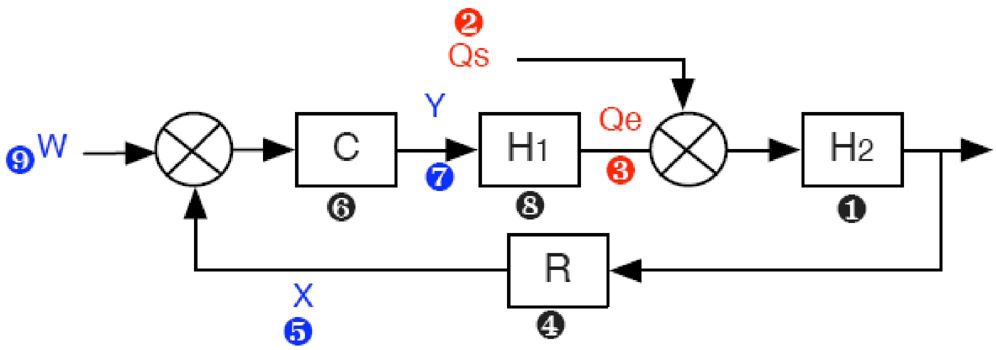
La tension transmise par le capteur-transmetteur est égale à 25% de l'étendue d'échelle en tension.

Correction exercice 4

$M = \frac{5-0}{15-0} = 0.33$ La mesure M=33,3% d'où :

$$0.33 = \frac{p - pmin}{pmax - pmin} = \frac{p - 0.2}{1 - 0.2} = 0.33(1 - 0.2) + 0.2$$

Soit une pression de 0,47 bar.



CHAPITRE II
SYSTEMES LINEAIRES

1 – DEFINITIONS :

On appelle système linéaire, un système tel que si le signal d'entrée $x_1(t)$ donne $y_1(t)$ en sortie, et $x_2(t)$ donne $y_2(t)$, alors, le signal d'entrée est : $c_1\ x_1(t) + c_2\ x_2(t)$ donne $c_1\ y_1(t) + c_2\ y_2(t)$ en sortie. Pour tout couple de constantes c_1 et c_2.

$$Entrée \sum_i x_i(t) \rightarrow \sum_i y_i(t) Sortie$$

On dit qu'un terme est linéaire s'il est du premier degré dans les variables dépendantes et leurs dérivées. Aussi, on dit qu'une équation différentielle est linéaire si elle consiste en une somme de termes linéaires. Toutes les autres équations différentielles sont dites non linéaires.

Lorsqu'une équation différentielle contient des termes qui sont des puissances supérieures à la première, des produits, ou des fonctions transcendantes des variables dépendantes, elle n'est pas linéaire. Des exemples de chacun de ces termes sont donnés par : $\left(\frac{dy}{dt}\right)^3$, $x\frac{dx}{dt}$ et sin x

Exemple d'un système du premier ordre :

$$\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$ Equation différentielle du 1er ordre

2- CALCUL OPERATIONNEL :

<u>2.1- Définition :</u> C'est un outil qui permet de remplacer une équation différentielle par une expression algébrique.

2.2- Transformée de Laplace : A toute fonction f(t) tel que f(t)=0 lorsque t<0, on fait correspondre une fonction F(p) de variable complexe p = jω appelée transformée de Laplace de f(t) [2].

F(p) = L [f(t)],

f(t) = L^{-1} [F(p)]

F(p) : Transformée de Laplace

f(t) : Image de F(p)

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

Exemple 1 : Calculer la transformée de Laplace de f(t) :

f (t) = 1 pour t>0 et f (t) = 0 pour t<0

Exemple 2 : f (t) = Sin t.

3- QUELQUES PROPRIETES DES TRANSFORMEES DE LAPLACE

a- Somme de deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ transformables [3] :

L [$f_1(t)$] = $F_1(p)$ et L [$f_2(t)$] = $F_2(p)$ alors L [$f_1(t) + f_2(t)$] =F(p) = $F_1(p) + F_2(p)$

b- Linéarité :

Si f(t) = a $f_1(t)$ + b $f_2(t)$ alors F(p) = a$F_1(p)$ + b$F_2(p)$

c- Dérivée :

Si L [f(t)] = F(p) et L [df(t)/dt] = F'(p) alors F'(p) = pF(p)-f(0)

d- Dérivée multiple :

$F^n(p)$= L [$d^n f(t) / dt^n$] alors $F^n(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots\ldots\ldots - f^{n-1}(0)$

e- Théorème des valeurs initiales et finales :

- Théorème des valeurs initiales

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to \infty} p\,F(p)$$

- Théorème des valeurs finales

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\,F(p)$$

f- Transformée d'un produit :

$$L^{-1}[F_1(p)\,.\,F_2(p)] = \int_0^t f_1(\tau).f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau)d\tau$$

4- APPLICATION DES TRANSFORMEES DE LAPLACE A LA RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

Soit l'équation différentielle de la forme : $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = x(t)$ Où y est la fonction correspondant au signal de sortie. Et x la fonction correspondant au signal d'entrée, les coefficients a_i sont constants.

Les conditions initiales pour cette équation s'écrivent : $\left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = y_0^k = cstes$

La transformée de Laplace de cette équation est donnée par :

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y_0^k\right)\right] = X(p)$$

Et la transformée du signal de sortie est :

$$Y(p) = \frac{X(p)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}$$

<u>Exemple :</u> Trouver la fonction de transfert Y(p) tel que :

$$2\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1$$

5- DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES D'UNE FRACTION RATIONNELLE :

Considérons la fraction rationnelle suivante :

$F(p)=\dfrac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}$ Avec n≥m <u>Exemple :</u> $F(p)=\dfrac{p^2+3p+1}{p^3+4p^2+5p+6}$ Avec $\dfrac{i=0,..,2}{i=0,..,3}$

Cette équation peut se mettre sous la forme $F(p)=\dfrac{(p-z_1)(p-z_2)}{(p\_p_3)(p-p_2)(p\_p_3)}=$

$F(p)=\dfrac{\prod_{i=0}^{R'}(p-z_i)^{m_i}}{\prod_{i=0}^{R}(p-p_i)^{n_i}}$ avec m et n le nombre de racines.

Z_i : sont les zéro de F(p) (solution du numérateur).

P_i : sont les pôles de F(p) (solution du dénominateur).

La fraction rationnelle F(p) peut se mettre sous la forme :

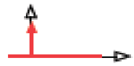
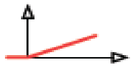
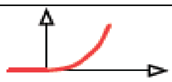
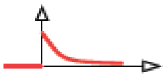
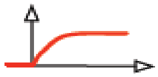
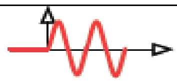
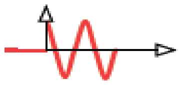
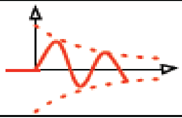
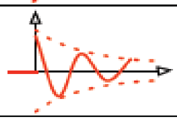
$$F(p)=b_n+\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(p-p_i)^k} \text{ Avec } b_n=0 \text{ si } n\neq m$$

$$c_{ik}=\frac{1}{(n_i-k)!}\frac{d^{(n_i-k)}}{dp^{(n_i-k)}}(p-p_i)^{n_i}F(p)\Big|_{p_i}$$

Avec C_{ik} sont les Résidus de F(p) aux pôles P_i d'ordre n_i (K=1,……n_i).

<u>Exemple :</u> Décomposer en éléments simples la fonction $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)^2(p+3)}$

Table des transformées :

Fonction	Allure	$f(t),\ (a,b)\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$	$\mathscr{L}[f(t)]$
Dirac		$b\times\delta(t)$	b
Échelon		$b\times u(t)$	$\frac{b}{p}$
Rampe		$b\times t\times u(t)$	$\frac{b}{p^2}$
Puissance		$b\times t^n\times u(t)$	$b\times\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle		$b\times e^{-at}\times u(t)$	$\frac{b}{p+a}$
Premier ordre		$b\times(1-e^{-at})\times u(t)$	$\frac{b}{p}\times\frac{a}{p+a}$
Sinus		$b\times sin(\omega t).u(t)$	$b\times\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$b\times cos(\omega t).u(t)$	$b\times\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Sinus amortie		$e^{-at}sin(\omega t).u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
Cosinus amortie		$e^{-at}cos(\omega t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

6-EXERCICES :

Exercice n° 1 :

1- Montrer que L $[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$ ou :

$F_1(p) =$ L $[f_1(t)]$ et $F_2(p) =$ L $[f_2(t)]$

2- Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
$f(t) = 2\,e^{-7t} - 4\,e^{t}$; $f(t) = Sin\ t$

Exercice n° 2 :

Déterminer la transformée de Laplace de la fonction : $f(t) = \dfrac{d(\ e^{-3t})}{dt}$ en utilisant la propriété suivante : L $[\frac{df}{dt}] = p\,F(p) - f(0^+)$ ou $F(p) =$ L $[f(t)]$

Exercice n° 3 :

Déterminer la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante : $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2+1}$

En utilisant la propriété suivante : L $[f(t-T)] = e^{-pT} F(p)$ ou : $T > 0$ *et*

$f(t-T) = 0$ pour $t \leq T$

Exercice n° 4 :

Déterminer la transformée inverse de Laplace de la fonction : $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+1)}$

Exercice n° 5 :

En appliquant les transformées de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t) = \text{échelon unité}$$

Avec les conditions initiales $y(0^+) = -1$ et $y'(0^+) = 2$

Exercice n° 6 :

Trouver la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{p^2+2p+2}{p^2+3p+2}$$

Exercice n° 7 :

Trouver la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)^2(p+3)}$$

Correction exercice 1

$$F(p) = \frac{2}{P+7} - \frac{4}{P+1}$$

Correction exercice 2 : $F(p) = \frac{-3}{P+3}$

Correction exercice 3 : $F(p)=\sin(t-1)$

Correction exercice 4 : $y(t)= \frac{\cos t + \sin t - e^{-2t}}{2}$

Correction exercice 5 : $Y(p) = \frac{1-p^2-p}{p^3+3p^2+2p}$

Correction exercice 6 : $y(t) = \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$

Correction exercice 7 : $y(t) = -1 + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t} - \frac{1}{2}te^{-t}$

CHAPITRE III

ALGEBRE DES SCHEMAS FONCTIONNELS

ET FONCTIONS DE TRANSFERT DES SYSTEMES

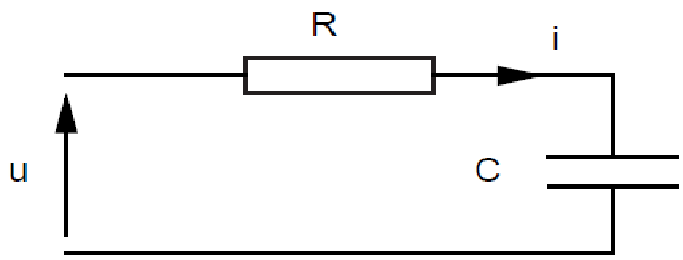
1- INTRODUCTION :

Une fonction de transfert T(P) est le rapport des signaux de sorties sur les signaux d'entrées dans le domaine de LAPLACE [4].

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Exemple 1 : Système électrique [5]

Considérons le système (simple) électrique suivant, où l'on définira l'entrée *u* et la sortie *i*.



On peut écrire la relation entre la tension d'alimentation $u(t)$ de ce circuit et le courant qui y circule $i(t)$:

$$u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

ou bien encore :

$$u'(t) = Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t)$$

et si l'on calcule la transformée de Laplace de cette équation :

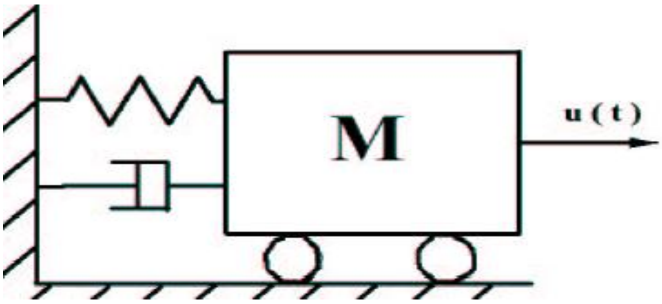
$$pU(p) = RpI(p) + \frac{1}{C}I(p)$$
$$= \left(Rp + \frac{1}{C}\right) I(p)$$

On a considéré les conditions initiales (*u*(0) et *i*(0)) nulles. En effet, la tension initiale au borne de la résistance et l'intensité initiale du condensateur son nulles. On obtient ainsi la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{Cp}{1+RCp}$$

<u>Exemple 2 : Amortisseur</u>

Considérons le système décrit par la figure ci-dessous :



Par application du Principe Fondamental de la Dynamique, l'équation différentielle régissant le comportement de la masse M soumise à une force *u*(*t*) est donnée par :

$$My''(t) + fy'(t) + Ky(t) = ut$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation et en choisissant la position *y*(*t*) de la masse comme sortie, on obtient la fonction de transfert du système comme le rapport de *Y* (*p*) sur *U*(*p*), soit :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{Mp^2+fp+K}$$

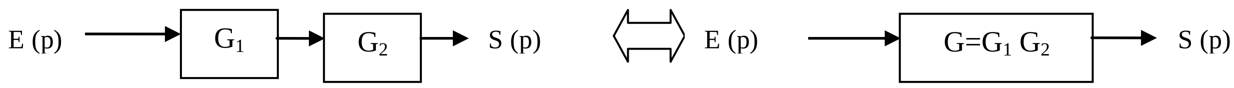
2- TERMINOLOGIE DES SHEMAS FONCTIONNELS :

D'une manière générale, un schéma fonctionnel est constitué par un assemblage de quatre types d'éléments : des rectangles, des comparateurs, des points de dérivation et les flèches représentants la circulation orientée des signaux.

2.1-Association de plusieurs éléments en cascades (série) :

On peut effectuer la multiplication de tout ensemble fini d'éléments montés en série, c'est-à-dire que si on monte n constituants ou éléments de fonctions de transfert G_1,$G_{2,}$…..G_n en cascade (en série) ils sont équivalents à un seul élément G dont la fonction de transfert est donnée par : $G= G_1.G_2…..G_n$

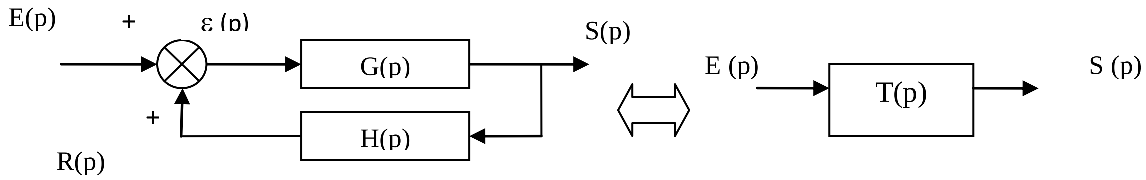
Exemple :



La multiplication est commutative, c'est-à-dire que $G_1.G_2= G_2.G_1$

2.2- Systèmes en boucle fermée :

C'est un système dont le signal de commande dépend de la sortie, c'est-à-dire : le signal de sortie est comparé avec le signal d'entrée.



D'après le schéma fonctionnel nous pouvons écrire :

$S (p) = \varepsilon (p) G (p)$

$R (p) = S (p) H (p)$

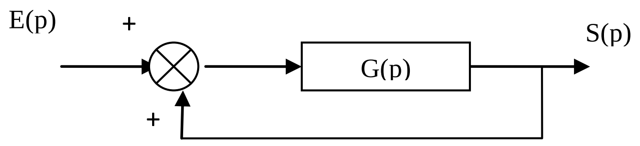
$\varepsilon (p) = E (p) + R (p)$.

Donc: $S (p) = [E (p) + R (p)]G (p) \Rightarrow S (p) = [E (p) + S (p) H (p)] G (p)$

$\Rightarrow S (p) = E (p) G (p) + S (p) H (p) G (p) \Rightarrow S (p) (1- H (p) G (p)) = E (p) G (p)$

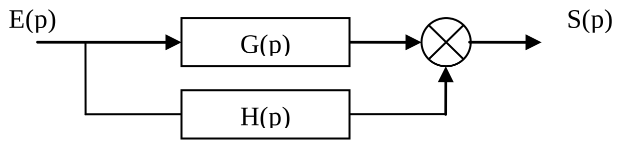
$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 - H(p)G(p)} = T(p)$$

2.3- Retour unitaire :



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 - G(p)} = T(p)$$

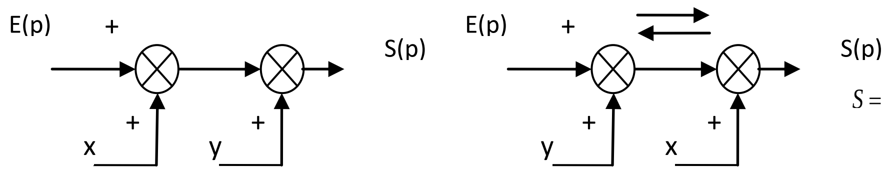
2.4- Eléments en parallèles :



$$S(p) = EG + EH = E(G + H)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = G(p) + H(p) = T(p)$$

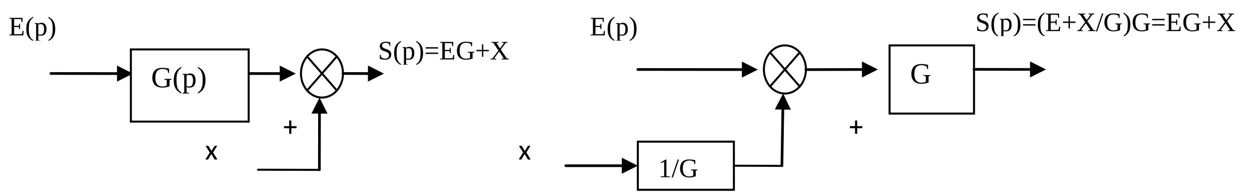
2.5- Association de deux comparateurs :



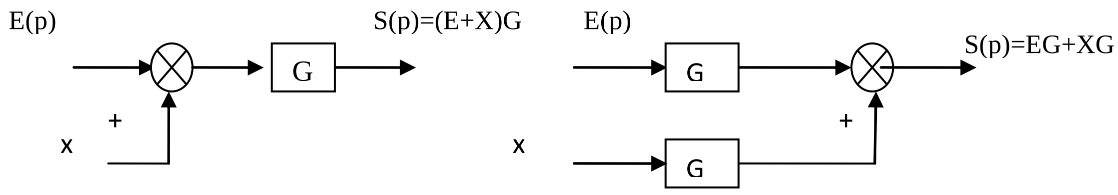
$S = E + X + Y = E + Y + X$

2.6- Déplacement de comparateurs :

a- A gauche d'un élément :

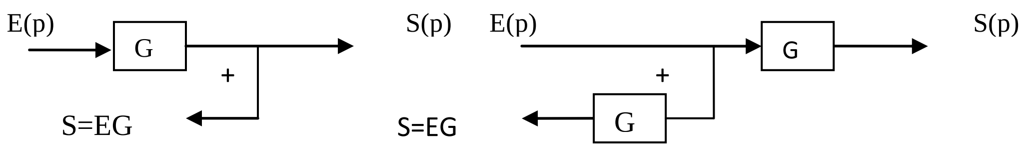


b- A droite d'un élément :

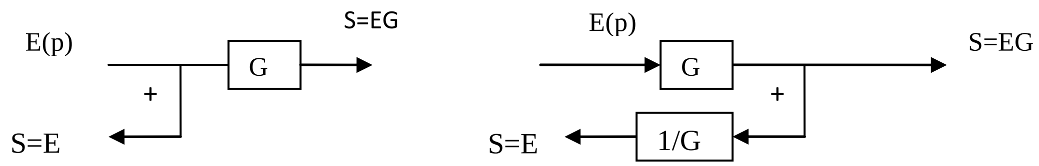


2.7- Déplacement d'un point de dérivation :

a- A gauche d'un élément :



b- A droite d'un élément :



3- SYSTEMES EN ENTREES MULTIPLES. APPLICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION :

Quand on a plusieurs signaux dans un système linéaire, on traite chacun d'eux indépendamment des autres. Le signal de sortie produit par tous les signaux agissant en même temps se calcule de la manière suivante :

1- Rendre tous les signaux nuls, sauf un seul.

2- Calculer la réponse produite par le signal choisi agissant seul.

3- Répéter les étapes 1 et 2 pour chacun des signaux d'entrés restant.

4- Ajouter algébriquement toutes les réponses calculées. Cette somme représente la grandeur de sortie totale obtenue quand tous les signaux d'entrée agissent ensemble.

4-EXERCICES :

Exercice n° 1 :

On applique une impulsion à l'entrée d'un système asservi, et on observe pour le signal de sortie la fonction e^{-2t}. Trouver la fonction de transfert du système.

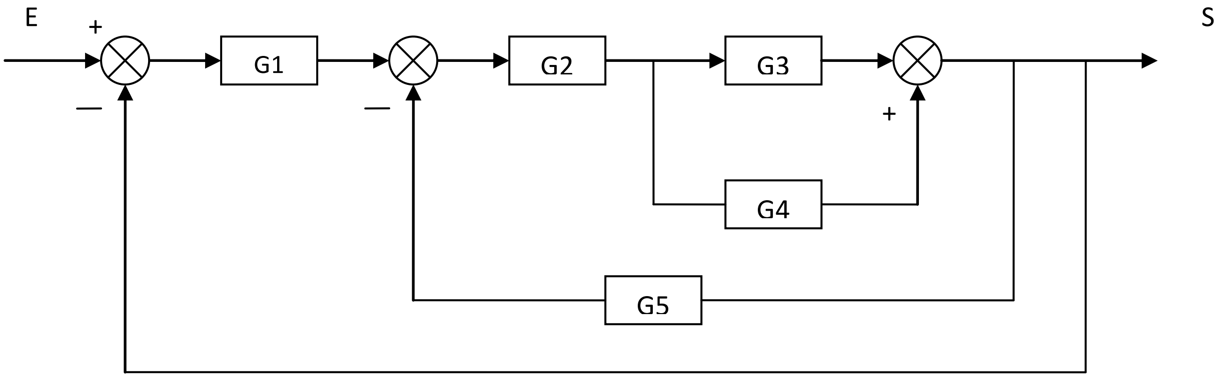
Exercice n° 2 :

La sortie $s_1(t)$ d'un système asservi est : $2\,(1- e^{-2t})$ pour une entrée $e_1(t) = 2$.

Trouvez la sortie de ce système pour une entrée $e_2(t) = 2t$.

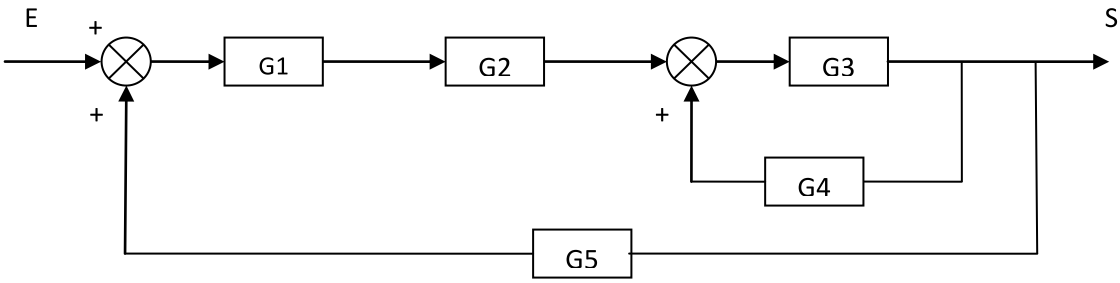
Exercice n° 3 :

Trouvez la fonction de transfert équivalente pour le système asservi suivant :



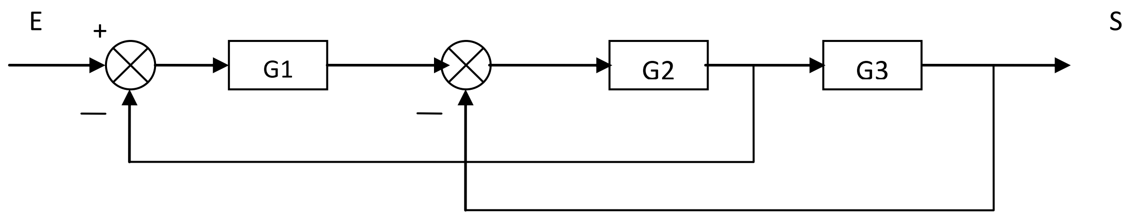
Exercice n° 4 :

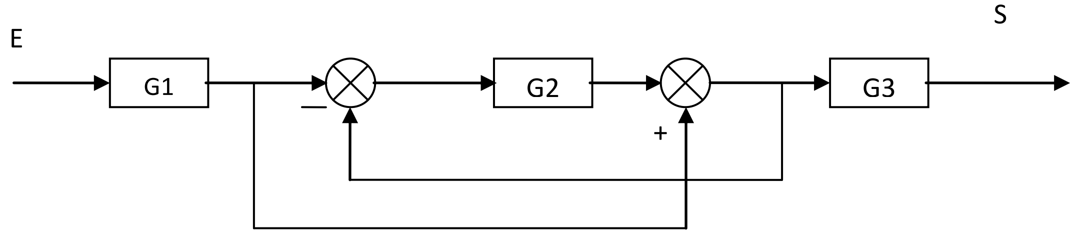
Trouvez la fonction de transfert équivalente pour le système asservi sauvant :



Exercice n° 5 :

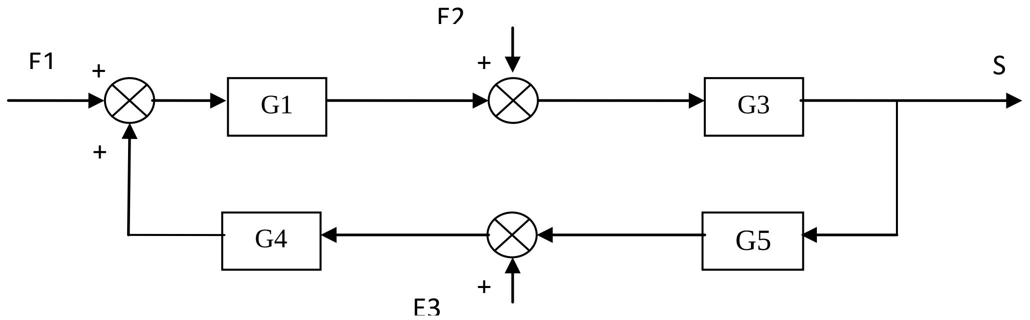
Trouvez les fonctions de transfert équivalentes pour les systèmes asservis sauvant :





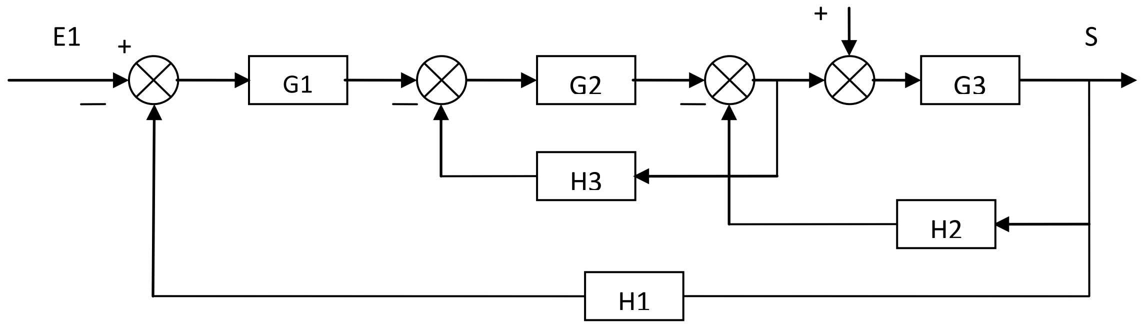
Exercice n° 6 :

Trouvez le signal de sortie S pour le système asservi suivant :



Exercice n° 7 :

Trouvez le signal de sortie S pour le système asservi suivant :



Correction exercice 1 : $T(p) = \dfrac{1}{p+2}$

Correction exercice 2 $T(p) = \dfrac{4}{p^2(P+2)}$; Après décomposition : $s(t) = -1 + 2t + e^{-2t}$

Correction exercice 3 : $T(p) = \dfrac{G_1(G_2G_4 + G_2G_3)}{1 + G_2G_5(G_4 + G_3) + G_2G_1(G_3 + G_5)}$

Correction exercice 4 : $T(p) = \dfrac{G_2G_1G_3}{1 + G_2G_3 + G_2G_1}$

Correction exercice 5 : $T(p) = G_1G_3$

Correction exercice 6 : Application du principe de superposition :

E2=E3=0 $S1 = E1\dfrac{G_1G_2}{1 + G_1G_2G_3G_4}$

E1=E3=0 $S2 = E2\dfrac{G_2}{1 + G_1G_2G_3G_4}$

E1=E2=0 $S3 = E3\dfrac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2G_3G_4}$

Correction exercice 7 : Application du principe de superposition :

E2=0 $S1 = E1\dfrac{G_1G_2G_3}{1 + G_1H_2 + G_2H_3 + H_1G_1G_2G_3}$

E1=0 $S2 = E2\dfrac{G_3 + G_2H_3}{1 + G_1H_2 + G_2H_3 + H_1G_1G_2G_3}$

CHAPITRE IV
SYSTEMES LINEAIRES

1- SYSTEMES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE :

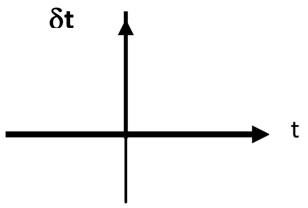
1.1- Définition : On appel système du premier ordre tout système dont le fonctionnement est décrit par une équation différentiel du premier ordre.

$\tau \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \Rightarrow$ τ p S(p) + S(p) = E(p) $\Rightarrow$ $T(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1+\tau p}$ Fonction de transfert du système du premier ordre.

2- REPONSES INDICIELLES D'UN SYSTEME DE PREMIER ORDRE :

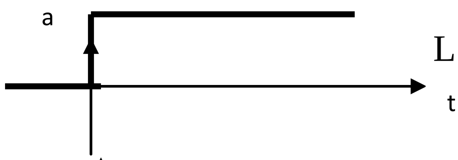
On appel réponse indicielle d'une fonction la réponse s(t) à une entrée e(t) connu et non périodique [6]. Les entrées donnant des réponses indicielles :

a- Entrée impulsion : Pic de Dirac : $e(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \delta t & t = 0 \end{cases}$



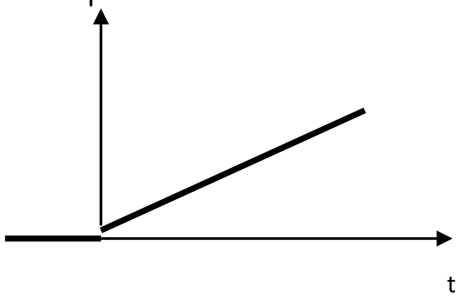
L [δt] = 1

b- Entrée échelon : $e(t) = \begin{cases} 0 & t \langle 0 \\ a & t \rangle 0^+ \end{cases}$



L [e(t)] = a/p

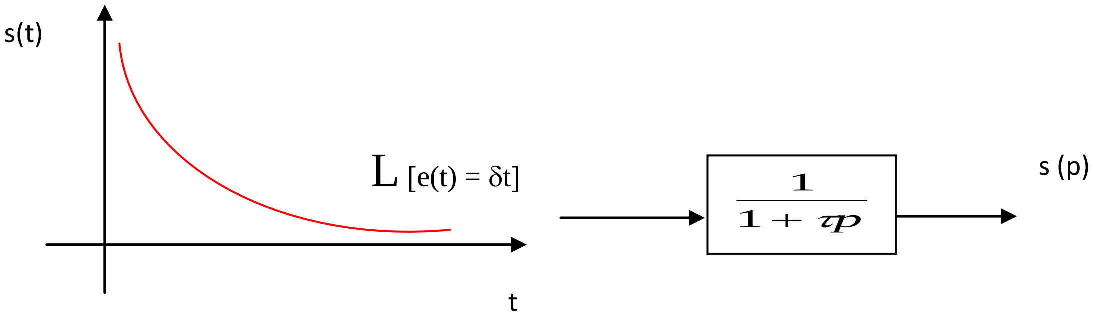
c- Entrée échelon : $e(t) = \begin{cases} 0 & t \langle 0 \\ at & t \rangle 0^+ \end{cases}$



L [e(t)] = a/p^2

<u>2-1- Réponse au Pic de Dirac :</u> Soit une équation différentiel du premier ordre tel que :

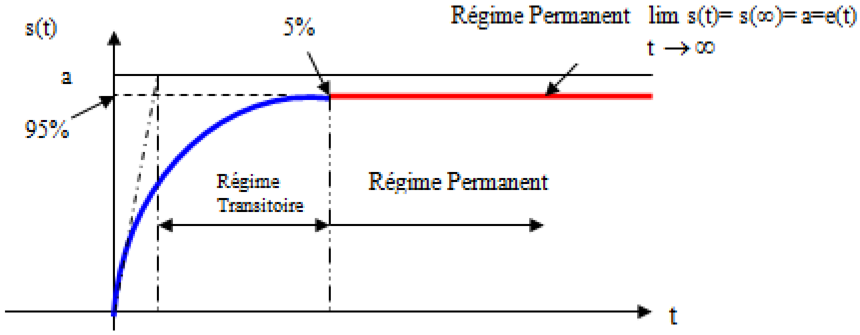
$$\tau\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t) \quad \text{Avec :} \quad T(p)=\frac{1}{1+\tau p} \quad et \quad S(p)=T(p)E(p) \quad \Rightarrow \quad s(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



<u>2-2- Réponse à une entrée échelon :</u>

Soit une équation différentiel du premier ordre tel que : $\tau\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$

Avec : $T(p)=\frac{1}{1+\tau p} \quad et \quad E(p)=\frac{a}{p} \quad \Rightarrow$ L $^{-1}$ [s (p)] = $a(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$



T_R : Temps de réponse. Il est défini à 5% du régime définitif d'un système linéaire du 1er ordre pour une entrée échelon. On considère que le régime est permanent.

s(T_R) = 95% s (∞) ⇒ $a(1-e^{-\frac{T_R}{\tau}})$ = 0.95 a ⇒ 1-e^{-x} = 0.95⇒ x=3⇒ T_R=3τ

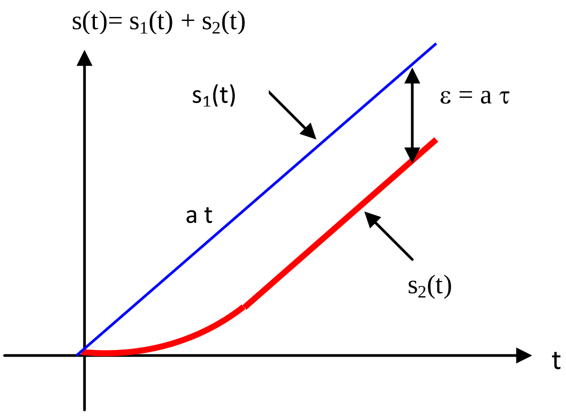
avec τ : Constante de temps.

<u>2-3- Réponse à une entrés rampe :</u>

e (t)= a t ⇒ E(p) = a / p^2 ⇒ s(t) = a t - a τ (1 – e$^{- t/\tau}$)

① Permanent ② Transitoire

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \infty$$

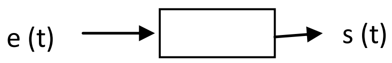


<u>Erreur de traînage :</u>

$\varepsilon = a\,\tau$

$\varepsilon\,(t) = s\,(\infty) - s\,(t)$

<u>2-4-Réponses harmoniques d'un système asservi linéaire :</u> C'est la réponse d'un système à une entrée périodique. Elle permet d'étudier le système en régime permanent.



$e\,(t) = E \sin(\omega t) \Rightarrow s\,(t) = S \sin(\omega t + \varphi)$

φ : Phase = Argument.

$e\,(t) \longrightarrow E\,(p)$ avec $p = j\,\omega$

$T\,(p) = S(p) / E(p)$

3- SYSTEMES LINEAIRES DU DEUXIEME ORDRE :

<u>3.1- Définition :</u> Un système linéaire du deuxième ordre est décrit par une équation différentielle du second ordre : $T^2 \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\eta T \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = K_s e(t)$

(Ks : gain statique)

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante : $T^2p^2S(p)+2\eta TpS(p)+S(p)=K_sE(p)$

On peut donc écrire que la fonction de transfert du système est :

$T(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{K_s}{T^2p^2+2\eta Tp+1}$ avec $\eta>0$ et $T>0$ On pose : $T=1/\omega_n$

Ou : $$T(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{\frac{1}{\omega_n{}^2}p^2+\frac{2\eta\omega_n}{\omega_n{}^2}p+1}=\frac{K_s\omega_n{}^2}{p^2+2\eta\omega_n p+\omega_n^2}$$

ω_n : Fréquence naturelle du système non amorti.

η : Le rapport d'amortissement ou cœfficient d'amortissement.

$\alpha = \eta/T = \eta\omega_n$: Le coefficient d'amortissement.

$1/\alpha = 1/\eta\omega_n$: La constante de temps.

La fonction de transfert T(p) peut possède deux racines :

$$T^2p^2+2\eta Tp+1 \Rightarrow (p-p_1)(p-p_2)=(p-\frac{\eta+\sqrt{\eta^2-1}}{T})(p-\frac{\eta-\sqrt{\eta^2-1}}{T})$$

1- $\eta>1 \Rightarrow p_1$ et p_2 sont deux racines réelles négatives ou positives $\Rightarrow$ le système est stable. (Régime sur amorti).

2- $\eta=1 \Rightarrow p_1$ et p_2 sont des racines doubles $\Rightarrow$ le système est juste oscillant. (Régime amorti critique).

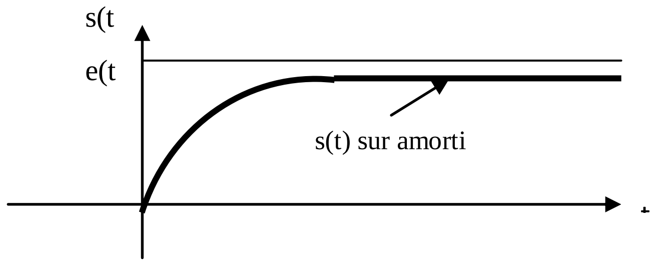
3- $0<\eta<1 \Rightarrow p_1$ et p_2 sont deux racines complexes $\Rightarrow$ le système est instable (il oscille : amortissement sur critique).

<u>3.2- Réponses a une entrée échelon :</u> Soit un système linéaire du deuxième ordre. L'entrée du système est un échelon e(t) = 1.

$$S(p)=\frac{1}{p(T^2p^2+2\eta Tp+1)}$$

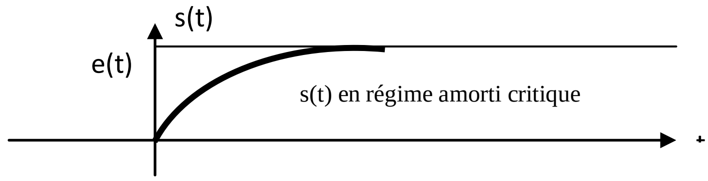
<u>Discussion suivant la valeur de η</u>

<u>a- pour η>1 :</u> $s(t) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+1}} e^{-(\eta-\sqrt{\eta^2+1})\omega_n t}$



<u>b- pour η=1 :</u> $s(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t).$

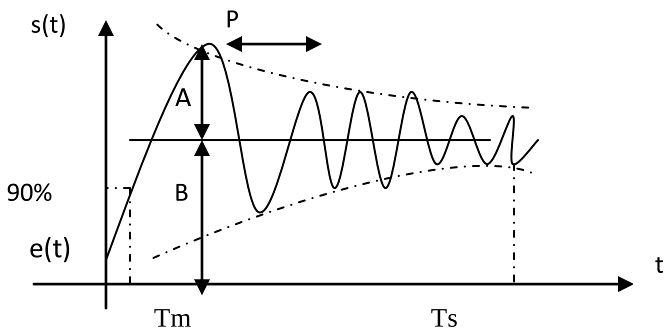
<u>Le système est en amortissement critique.</u>



<u>c- 0<η<1</u> $s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} e^{-\eta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\eta^2}\,\omega_n t + \varphi)$

avec $\varphi = arctg(\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}})$

Le système étant en régime d'amortissement sur critique.



$\frac{A}{B} = \exp(\frac{-\pi\eta}{\sqrt{1-\eta^2}})$ est le dépassement, et $p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\eta^2}}$ est la période.

T_m est le temps que met la réponse à un échelon pour être à 90% de la valeur finale. Avec s(∞)=e(t).

Ts : est le temps de stabilisation : c'est-à-dire le temps que met la réponse a un échelon pour atteindre un certain pourcentage donné de sa valeur finale (2 à 5%).

<u>3.3- La résonance :</u> Lorsque la fonction de transfert T_{dB} est maximum, la fréquence de résonance est égale à :

$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\eta^2}$; ω_R existe si $1-2\eta^2 > 0 \Rightarrow \eta \leq 0.7$

Le coefficient de surtension est égale à : $Q = \dfrac{1}{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}$

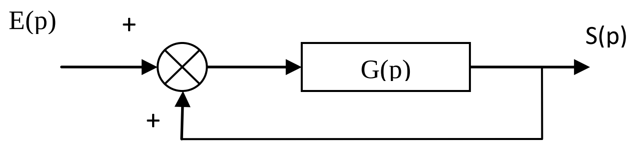
$\eta < 0.7$ ==> Systèmes oscillants (Les oscillations sont visibles)

$\eta > 0.7$ ==> Pas d'oscillations

4- EXERCICES :

<u>Exercice 1:</u>. Soit un système linéaire du 1^er^ ordre défini à 8% de sont régime définitif pour une entrée échelon. Le temps de réponse du système $T_R = 4s$. Déterminez le temps de réponse de ce système.

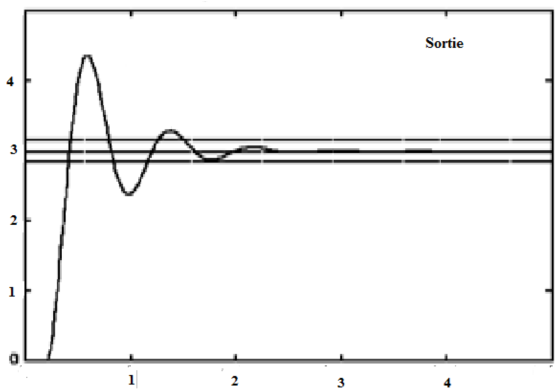
<u>Exercice 2:</u> Soit un système d'écrit par le schéma fonctionnel suivant :



$$G(p) = \frac{k}{p(p+2)}$$

Trouvez les domaines de variations de k pour les trois régimes possibles.

<u>Exercice n° 3 :</u> La réponse d'un système du deuxième ordre est donnée par le graphe ci-dessous :



1-Relever à partir du graphe le dépassement A/B ainsi que le temps de montée.

2-D'après le graphe, le système est-il stable ?

Exercice n° 4 : Soit la fonction de transfert suivante :

$$T(p) = \frac{2K}{(P+2K)(P+1)}$$

1 Pour quelle valeur de K le système est il en régime d'amortissement critique.

2 Pour $\eta = 0.5$ Calculer : Le cœfficient de surtension Q, ω_R, et le dépassement A/B.

<u>Correction exercice 1 :</u> $1-e^{-x} = 0.92a=0.92$; $x=-\ln(1-0.92)=2.52$; $T_R=2.52\ \tau$

<u>Correction exercice 2 :</u>

$$T(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{k}{p(p+2)}}{1+\frac{k}{p(p+2)}} = \frac{k}{p^2+2p+k} = \frac{\omega_n^2}{p^2 2\eta\omega_n + \omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases}\omega_n^2 = k \\ 2\eta\omega_n = 2\end{cases} \Rightarrow \eta = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Pour $0 < \eta < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 \Rightarrow k > 1$ Régime d'amortissement sur critique.

Pour $\eta = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 \Rightarrow k = 1$ Régime amorti critique.

Pour $\eta > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > 1 \Rightarrow k < 1$ Régime sur amorti

<u>Correction exercice 3 :</u> $\frac{A}{B} = \frac{4,5-3}{3} = 0,5$, Le temps de montée τ=0,25s, système instable.

<u>Correction exercice 4 :</u> Amortissement critique $\Rightarrow \eta=1$. $\omega_n = 1$. K=0.5.

Pour $\eta=0.5$: Q=1.15, ω_R n'existe pas car k complexe. $\frac{A}{B} = 0,16$

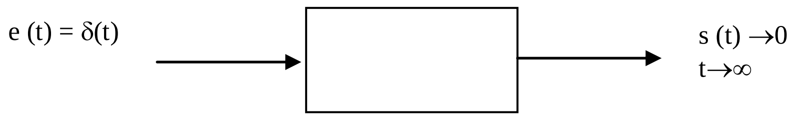
CHAPITRE V

STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES.

1- DEFINITION:

Un système stable peut être définit comme un système qui reste au repos à moins que l'on excite au moyen d'une source extérieure et qui revient au repos dés que toute excitation cesse.

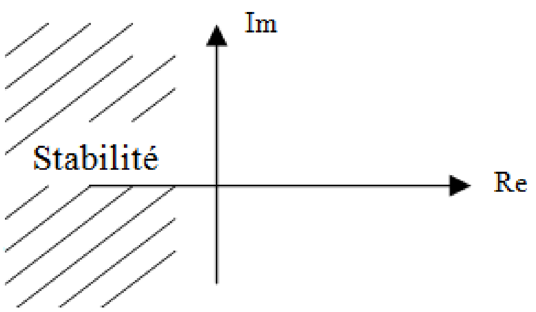
Un système stable peut être définit comme un système dont la réponse à l'impulsion tend vers zéro quand t tend vers l'infini.



2- CONDITION FONDAMENTALE DE STABILITE:

Un système linéaire est stable à la condition nécessaire est suffisante que tous les pôles de la fonction de transfert ont une partie réel négative.

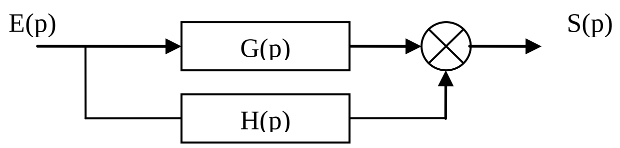
- Re < 0 ⇒ système stable
- Re = 0 ⇒ système juste oscillant.
- Re > 0 ⇒ système instable.



3- CRITERES DE STABILITE ROUTH ET HURWITZ:

Il existe deux types de critères de stabilité : Critères algébriques et géométriques.

3-1- Critères algébriques : Ce critère est applicable à l'équation caractéristique d'un système en boucle fermée. $F(p) = \dfrac{G}{1+GH}$ 1+GH = 0 est l'équation caractéristique.



3-1-a- Critère de ROUTH: C'est un critère qui permet de savoir si les racines de l'équation algébrique du genre : $A_mP^m + A_{m-1}P^{m-1} + \dots + A_1P + A_0P^0 = 0$ ont leurs parties négatives sans avoir à les résoudre.

Conditions nécessaires et suffisantes :Le critère de ROUTH n'est applicable que si tous les A_i de l'équation algébrique sont positifs.

Exemple : $p^5+2p^3+2p^2+p=0$ (Nous pouvons appliquer le critère de ROUTH)

Construction de la table de ROUTH : Soit l'équation caractéristique: $1+T(p) = A_mP^m + A_{m-1}P^{m-1} + \dots + A_1P + A_0P^0 = 0$

On arrange les coefficients sur la ligne.

	$A_mP^m + A_{m-1}P^{m-1} + \dots + A_1P + A_0P^0 = 0$		
p^m	A_m	A_{m-2}	A_{m-4}
p^{m-1}	A_{m-1}	A_{m-3}	A_{m-5}
p^{m-2}	b_1	b_2	b_3
p^{m-3}	c_1	c_2	c_3
P^0	d_1	d_2	d_3

$$b_1 = \frac{A_{m-1}A_{m-2} - A_mA_{m-3}}{A_{m-1}}; \quad b_2 = \frac{A_{m-1}A_{m-4} - A_mA_{m-5}}{A_{m-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 A_{m-3} - A_{m-1} b_2}{b_1} \;; \qquad c_2 = \frac{b_1 A_{m-5} - A_{m-1} b_3}{b_1}$$

Un système est stable si tous les éléments de la première colonne de la table de ROUTH sont positifs. Si un coefficient de cette ligne est nul ou négatif, alors le système est instable [7].

3-1-b- Critère de Hurwitz:

Le déterminant de Hurwitz

Soit l'équation caractéristique: $A_m P^m + A_{m-1} P^{m-1} + \dots + A_1 P + A_0 P^0 = 0$

Le critère de Hurwitz n'est applicable que si tous les A_i sont positifs.

$$\begin{vmatrix} A_{m-1} & A_{m-3} & A_{m-5} & \cdots \\ A_m & A_{m-2} & A_{m-4} & \cdots \\ 0 & A_{m-1} & A_{m-3} & \cdots \\ 0 & A_m & A_{m-2} & \cdots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

Δ_1 Δ_2 Δ_3

4- EXERCICES:

Exercice n° 1 : Soit le système d'écrit par : $T(p) = \dfrac{K}{(1+p)(2+p)(5+p)}$

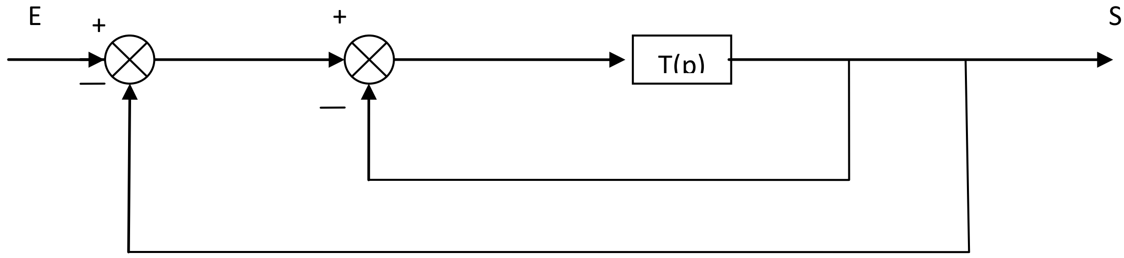
Pour quelle valeur de K le système est stable. Vérifier la stabilité par les critères de ROUTH et Hurwitz .

Exercice n° 2 :Soit le système d'écrit par : $T(p) = \dfrac{K}{(3+p)(1+Ap)}$

Pour quelle valeur de K et de A le système est stable. Vérifier la stabilité par les critères de ROUTH et Hurwitz .

.

Exercice n° 3 : Soit un système asservi décrit par le schéma suivant:



$T(p) = \dfrac{K}{(1+2p)(1+p)^3}$ Vérifier la stabilité par les critères de ROUTH.

<u>Correction exercice 1 :</u> Equation caractéristique : $p^3+8p^2+17p+10+k=0 \Rightarrow -10<K<126$

<u>Correction exercice 2 :</u> Equation caractéristique : $Ap^2+(3A+1)p+3+k=0 \Rightarrow A>0$ et $K>-3$

<u>Correction exercice 3 :</u> Equation caractéristique : $2p^4+7p^3+9p^2+5p+2k+1=0 \Rightarrow -0.5<K<2.2$

CHAPITRE VI

LES DIAGRAMMES DE BODES ET NYQUIST

1- INTRODUCTION :

Soit un système du 1er ordre : $T(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ on pose p = j ω

$$\Rightarrow T(p) = \frac{1 - j\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} = \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} - j\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$$

$\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}$ Partie Réel.

$\frac{-\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$ Partie Imaginaire.

<u>Le module de T(p) :</u> $|T(p)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} = \left(1+\tau^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

<u>La phase de T(p) :</u> $tg\varphi = \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = -\tau\omega \Rightarrow \varphi = -artg\,\tau\omega$

φ : Phase = Argument.

A partir des lieux de transfert qui représentent les variations du module et de la phase de la fonction de transfert d'un système en fonction de la fréquence (ω), on peut prévoir la stabilité des systèmes en boucle fermée à partir de leurs fonctions de transfert en boucle ouverte [8].

A partir de $\begin{cases} |T(j\omega)| \\ \varphi(j\omega) \end{cases}$ en Boucle Ouverte $\Rightarrow$ Stabilité du système en Boucle Fermé.

La réponse en fréquence (*Hz*) consiste à tracer séparément en fonction de la pulsation ω (*rd/s*) le module et la phase de cette réponse.

La courbe d'amplitude où courbe gain est obtenue à partir du module.

La courbe de phase est obtenue à partir l'argument.

Ces courbes permettent d'effectuer des mesures de stabilité et de définir les marges de gains et de phase qui représentent les marges de sécurité d'un système asservi.

$\begin{cases} |T(j\omega)| = f(j\omega) \\ \varphi(j\omega) = f(j\omega) \end{cases}$ Courbes de Gain et de Phase.

T(jω) $\Rightarrow$ Courbe Asymptotique

On utilise l'échelle semi-logarithmique pour trader les courbes de gain et de phase.

2-ÉCHELLE SEMI-LOGARITHMIQUE :

Un repère semi-logarithmique est un repère dans lequel l'un des axes est gradué selon une échelle linéaire, alors que l'autre axe, est gradué selon une échelle logarithmique.

Une échelle logarithmique est un système de graduation sur une demi-droite, particulièrement adapté pour rendre compte des ordres de grandeur dans les applications. De plus elle permet de rendre accessible une large gamme de valeurs.

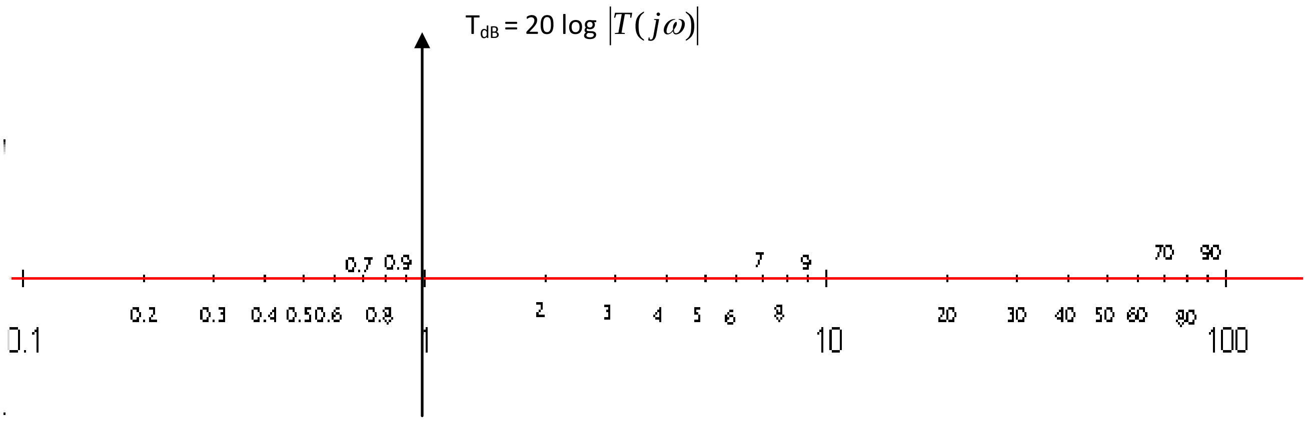
3-DEFINITION DE L'ECHELLE LOGARITHMIQUE :

L'échelle logarithmique est une alternative à l'échelle linéaire. Elle peut s'avérer préférable lorsqu'on étudie un phénomène utilisant une gamme étendue de valeurs, l'échelle linéaire est mal adaptée. On lui préfère une échelle logarithmique qui espace les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes.

La distance qui sépare 1 de 10 est la même que celle qui sépare 10 de 100 et celle qui sépare 0,1 de 1 car log (100) – log (10) = log (10) – log (1) = log (1) – log (0,1). Chacun de ces intervalles s'appelle un module ou décade.

La distance qui sépare 1 de 2 est égale à celle qui sépare 10 de 20 mais est supérieure à celle qui sépare 2 de 3 car log(2) - log(1) = log(20) - log(10) >

log(3) - log(2). Cela induit une sorte d'irrégularité récurrente dans les graduations.



Exemple d'échelle logarithmique à trois décades

L'unité pour le tracé du gain et le Décibel « dB ». Pour la phase on utilise une ordonné normale.

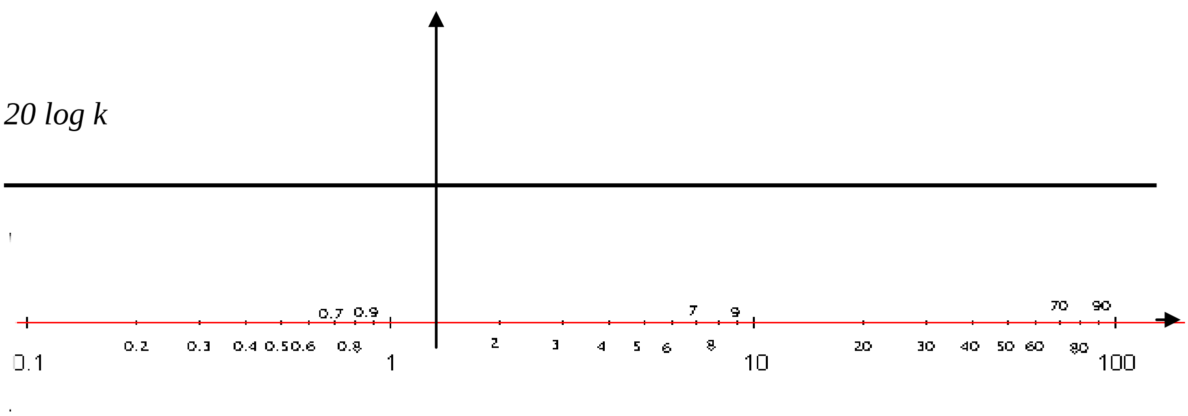
4-TRACE DES DIAGRAMMES DE BODES :

<u>Exemple 1 :</u>

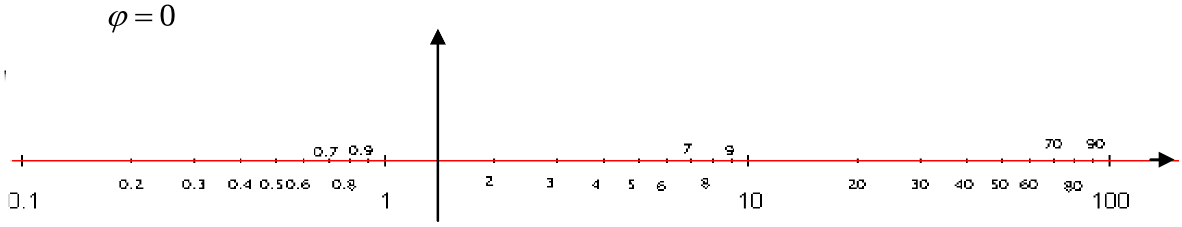
Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = k$ on pose p = j ω

$$T(p) = k \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = k \\ tg\varphi = \dfrac{\text{Im}}{\text{Re}} \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

T_{dB} = 20 log $|T(j\omega)|$



$\varphi = 0$



Exemple 2 :

Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = \tau p$ on pose p = j ω

$$T(j\omega) = j\tau\omega \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \tau\omega \\ \varphi = arctg\,\dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = arctg\,\dfrac{\tau\omega}{0} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ quelque soit ω

Calcul de la fréquence de coupure ω_c :

C'est la fréquence pour laquelle la fonction de transfert s'annule T_{dB}=0.

$T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0 \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \tau\omega_c = 0 \Rightarrow \tau\omega_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

Calcul des limites de T_{dB} :

$\omega = \omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0$

$\omega \to 0^+ \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \tau 0^+ \to -\infty$

$\omega \to +\infty \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \tau\infty \to +\infty$

ω	$\to 0^+$	ω_c	$\to +\infty$
T_{dB}	$\to -\infty$	0	$\to +\infty$
φ	π/2	π/2	π/2

Calcul de la pente : Il faut deux points pour tracer la pente.

1^er point : $\omega = \omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \tau\omega_c = 0$

2^eme point: Entre ω et 10ω il y a une décade.

$\omega' = 10\ \omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \tau\omega' = 20 \log 10\tau\omega_c = 20_{dB}$

<u>La pente</u> : 20_{dB} par décade.

<u>Exemple 3 :</u>

Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = \dfrac{1}{\tau p}$ on pose p = j ω

$$T(j\omega) = (j\tau\omega)^{-1} \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = (\tau\omega)^{-1} \\ \varphi = arctg \dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = arctg \dfrac{(\tau\omega)^{-1}}{0} = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ quelque soit ω.

<u>Calcul de la fréquence de coupure ω_c :</u>

C'est la fréquence pour laquelle la fonction de transfert s'annule $T_{dB}=0$.

$T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0 \Rightarrow T_{dB} = 20 \log (\tau\omega_c)^{-1} = 0 \Rightarrow \tau\omega_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

<u>Calcul des limites de T_{dB} :</u>

$\omega = \omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0$

$\omega \to 0^+ \Rightarrow T_{dB} = 20 \log (\tau\omega)^{-1}$

$T_{dB} = -20 \log \tau 0^+ \to +\infty$

$\omega \to +\infty \Rightarrow T_{dB} = -20 \log \tau\infty \to -\infty$

ω (rd/s)	$\to 0^+$	ω_c	$\to +\infty$
T_{dB}	$\to +\infty$	0	$\to -\infty$
φ	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$

<u>Calcul de la pente :</u> Il faut deux points pour tracer la pente.

1er point : $\omega = \omega_c \Rightarrow T_{dB} = -20 \log \tau\omega_c = 0$

2eme point: $\omega' = 10\,\omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log(\tau\omega')^{-1} = 20 \log (10\tau\omega_c)^{-1} = -20_{dB}$

La pente : 20_{dB} par décade.

Exemple 4 : Cas général: $T(p) = (\tau p)^n$

$$T(j\omega) = (j\tau\omega)^n \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = (\tau\omega)^n \\ \varphi = n \ \ arctg \dfrac{\text{Im}}{\text{Re}} = arctg \dfrac{(\tau\omega)^n}{0} = n\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Calcul de la fréquence de coupure ω_c :

$T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0 \Rightarrow T_{dB} = 20 \log (\tau\omega_c)^n = 0 \Rightarrow \tau\omega_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

Calcul des limites de T_{dB} :

$\omega = \omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0$

$\omega \to 0^+ \Rightarrow T_{dB} = 20 \log (\tau\omega)^n$

$T_{dB} = n20 \log \tau 0^+ \to n(-\infty)$

$\omega \to +\infty \Rightarrow T_{dB} = n20 \log \tau\infty \to n(+\infty)$

Calcul de la pente :

1er point : $\omega = \omega_c \Rightarrow T_{dB} = n20 \log \tau\omega_c = 0$

2eme point: $\omega' = 10\,\omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log(\tau\omega')^n = n20 \log (10\tau\omega_c) = n\, 20_{dB}$

La pente : 20_{dB} par décade

Exemple 5 :

Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = (1 + j\tau\omega)$ on pose p = j ω

$$T(j\omega) = (1 + j\tau\omega) \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \left(1^2 + (\tau\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi = arctg \dfrac{\tau\omega}{1} = arctg\, \tau\omega \end{cases}$$

Calcul de la fréquence de coupure ω_c :

T_{dB} = 20 log $|T_c|$ =0 ⇒ T_{dB} = 20 log $\left(1+(\tau\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 20\log(\tau\omega)$ pour ω>>0 ⇒

$\omega_c = \frac{1}{\tau}$

<u>Calcul des limites de T_{dB} :</u>

- ω = ω_c ⇒ T_{dB} = 20 log $|T_c|$ = 0

- $\omega \to 0^+$ ⇒ T_{dB} = 20 log $\left(1+(\tau\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0^+$ ⇒ $(\tau\omega) \to 0^+$ ⇒ T_{dB}= 0

et ⇒ $\varphi = arctg\ \tau 0 \Rightarrow \varphi = 0$

- $\omega \to +\infty$ ⇒ T_{dB} = 20 log $\left(1+(\tau\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 20\log(\tau\omega)$ $T_{dB} \to +\infty$

et ⇒ $\varphi = arctg\ \tau\infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

ω (rd/s)	$\omega<\omega_c$	$\omega>\omega_c$
T_{dB}	0	$\to +\infty$
φ	0	π/2

<u>Calcul de la pente :</u> Il faut deux points pour tracer la pente.

<u>1er point</u> : ω = ω_c ⇒ T_{dB} = 20 log $\left(1+(\tau\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 20\log(\tau\omega_c)$= 0

<u>2eme point:</u> ω'= 10 ω_c ⇒ T_{dB} = 20 log$(\tau\omega')$ = 20 log $(10\tau\omega_c)$ = 20_{dB}

<u>La pente</u> : 20_{dB} par décade.

<u>Exemple 6 :</u>

Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = (1+ j\tau\omega)^{-1}$ on pose p = j ω

$$T(j\omega) = (1+j\tau\omega)^{-1} \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \left(1^2+(\tau\omega)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \varphi = -arctg\,\frac{\tau\omega}{1} = -arctg\,\tau\omega \end{cases}$$

Calcul de la fréquence de coupure ω_c :

$T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0 \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \left(1+(\tau\omega)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx -20\log(\tau\omega)$ pour $\omega >> 0 \Rightarrow$
$\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

Calcul des limites de T_{dB} :

- $\omega = \omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log |T_c| = 0$

- $\omega \to 0^+ \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \left(1+(\tau\omega)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \to 0^+$

$\Rightarrow (\tau\omega) \to 0^+ \Rightarrow T_{dB} = 0$

Et $\Rightarrow \varphi = -arctg\, \tau 0 \Rightarrow \varphi = 0$

- $\omega \to +\infty \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \left(1+(\tau\omega)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx -20\log(\tau\omega)$ $T_{dB} \to -\infty$

Et $\Rightarrow \varphi = -arctg\, \tau\infty \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

ω (rd/s)	$\omega << \omega_c$	$\omega >> \omega_c$
T_{dB}	0	$\to -\infty$
φ	0	$-\pi/2$

La pente : 20_{dB} par décade.

Exemple 7 : Cas général: $T(p) = (1+j\tau\omega)^n$

$$T(j\omega) = (1+j\tau\omega)^n \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \left(1^2+(\tau\omega)^2\right)^{\frac{n}{2}} \\ \varphi = n \;\; arctg\dfrac{\tau\omega}{1} = n \;\; arctg\, \tau\omega \end{cases}$$

Fréquence de coupure : $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

La pente : n 20_{dB} par décade.

ω (rd/s)	$\omega \ll \omega_c$	$\omega \gg \omega_c$
T_{dB}	0	→n ∞
φ	0	n π/2

Exemple 8 :

Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = (1+2p)^{-2}$

$$T(j\omega) = (1+j2\omega)^{-2} \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \left(1^2+(2\omega)^2\right)^{-\frac{2}{2}} \\ \varphi = -2 \quad arctg\dfrac{2\omega}{1} = -2 \quad arctg 2\omega \end{cases} \quad \begin{cases} |T(j\omega)| = \left(1^2+4\omega^2\right)^{-1} \\ \varphi = -2 \quad arctg 2\omega = -2\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Fréquence de coupure : $\omega_c = \dfrac{1}{2}$

La pente : n 20_{dB} = - 40_{dB} par décade.

ω (rd/s)	ω << 0.5	ω >> 0.5
T_{dB}	0	→- ∞
φ	0	-2 π/2 = -π

Exemple 9 :

Soit un système avec une fonction de transfert T(p) = T_1(p) T_2(p)

$$|T(j\omega)| = |T_1(j\omega)| \; |T_2(j\omega)| \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_{dB} = 20\log T_1 T_2 = 20\log T_1 + 20\log T_2 = T_{1dB} + T_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

$$T(p) = \frac{2p}{1+2p+p^2} = \frac{2p}{(1+p)^2}$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{2j\omega}{(1+j\omega)^2} = 2j\omega \quad \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

T(p) = T_1(p) T_2(p) $\Rightarrow$ $\begin{cases} |T| = |T_1| + \|T_2\| = T_{1dB} + T_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$

1- T_1(p)=2jω $\Rightarrow$ $\begin{cases} |T_1| = 2\omega \Rightarrow T_{1dB} = 20\log 2\omega \\ \varphi_1 = n \quad arctg\dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = \dfrac{\pi}{2} \\ \omega_{c1} = \dfrac{1}{2} rad/s \\ pente: 20_{dB} \quad par \quad décade \end{cases}$

2- T_2(p)= $(1 + j\omega)^{-2}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} |T_1| = (1 + \omega^2)^{-1} \\ \varphi_1 = n \quad arctg\dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = -2arct\omega \\ \omega_{c1} = 1 \quad rad/s \\ pente: -40_{dB} \quad par \quad décade \end{cases}$

ω	ω<0.5	0.5<ω<1	ω>1
T_{1dB}	Pente : $+20_{dB}$	Pente : $+20_{dB}$	Pente : $+20_{dB}$
T_{2dB}	0	0	Pente : -40_{dB}
T_{dB}	Pente : $+20_{dB}$	Pente : $+20_{dB}$	Pente : -20_{dB}
φ_1	π/2	π/2	π/2
φ_2	0	0	-π
φ	π/2	π/2	-π/2

<u>4-1 Critères de stabilité géométriques [9] :</u> On mesure le degré de stabilité par les marges de gain et de phase

<u>a- Méthode analytique :</u>

ΔG et Δφ peuvent être calculés de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta G = \dfrac{1}{|T(j\omega_\pi)|} \quad avec \quad ArgT(j\omega_\pi) = -\pi \\ \Delta\varphi = 180° - ArgT(j\omega_1) \quad avec \quad |T(j\omega_1)| = 1 \end{cases}$$

Dans le cas où ΔG et Δφ sont positifs, alors le système est stable.
déduire la stabilité.

b- Méthode graphique :

Un système est stable si : $\Delta G < 0$ et $\Delta\varphi > 0$ sur le diagramme de Bode.

$\Delta G < 0$ par rapport à l'axe de ω

$\Delta\varphi > 0$ par rapport à l'axe $-\pi$

5- TRACE DES DIAGRAMMES NYQUIST :

L'analyse de Nyquist consiste dans un procédé graphique en la détermination de la stabilité des systèmes en boucles fermée à partir des variations du module et de la phase en fonction de transfert.

5-1 Constitution des diagrammes de Nyquist : Pour une fonction de transfert T(p) relative à un système en boucle ouverte, le diagramme de Nyquist est le lieu des points définit :

a- En coordonnées polaires : Définit par un rayon vecteur égal à la valeur du module de $T(j\omega)$ et un angle polaire égal à l'argument de $T(j\omega)$. Le lieu est gradué en par rapport a la fréquence ω.

$$T(j\omega) = |T(j\omega)|\varphi$$
$$T(j\omega) = |T(j\omega)|(\cos\varphi_\omega + j\sin\varphi_\omega)$$

b- En coordonnées rectangulaires : Définit par une courbe donnant la variation de la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de la fonction de transfert.

$$\mathrm{Im}\,(T(j\omega)) = f\,(\,\mathrm{Re}\,(T(j\omega)))$$

5-2 Caractéristiques des courbes de Nyquist : Les courbes de Nyquist possèdent la caractéristique de conjugaison, c'est-à-dire que le graphe $-\infty<\omega<0$ est symétrique par rapport à l'axe horizontal du graphe ci-dessous $0<\omega<+\infty$

Exemple Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = (1 + j\omega)^{-1}$ on pose $p = j\,\omega$

1- Coordonnées polaire :

$$T(j\omega) = (1 + j\tau\omega)^{-1} \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \left(1^2 + (\tau\omega)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \varphi = -arctg\,\dfrac{\tau\omega}{1} = -arctg\,\tau\omega \end{cases}$$

ω (rd/s)	0	1	10	∞
$\lvert T\rvert$	1	0.7	0.1	0
φ	0	π/4	-84	-π/2

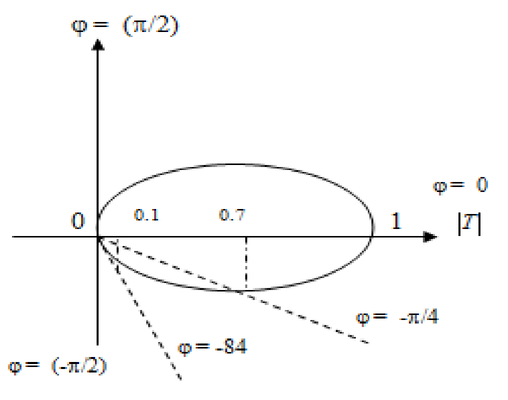
2- Coordonnées rectangulaire :

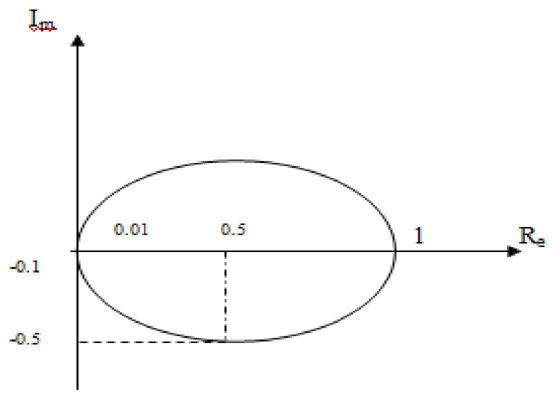
$$T(p) = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$\dfrac{1}{1+\omega^2} = R_e(T(j\omega))$ Partie Réel.

$\dfrac{-\omega}{1+\omega^2} = I_m(T(j\omega))$ Partie Imaginaire

ω (rd/s)	0	1	10	∞
R_e	1	0.5	10^{-2}	0
I_m	0	-0.5	-10^{-1}	0





6- EXERCICES :

Soit le système décrit par : $T(p) = \dfrac{25}{(0.5+0.1p)(0.5+0.2p)(1+2.5p)}$

1-Tracer les diagrammes asymptotiques et réels de Bode.

2-Déterminer graphiquement $\omega_{1,}$ ω_π, ΔG et $\Delta\varphi$.

3-Conclusion sur la stabilité.

$$T(p) = \frac{25}{(0.5+0.1p)(0.5+0.2p)(1+2.5p)} = \frac{25}{0.5(1+0.2p)0.5(1+0.4p)(1+2.5p)}$$

$$\Rightarrow T(p) = \frac{100}{(1+0.2p)(1+0.4p)(1+2.5p)} \Rightarrow T = 20\log 100 + T_{1_{db/des}} + T_{2_{db/des}} + T_{3_{db/des}}$$

$$T_1 \begin{cases} |T_1| = (1+(2.5)^2)^{-1/2} \\ \varphi_1 = -\operatorname{arctg} 2.5 \\ \omega_{C1} = 1/2.5 = 0.4 \text{ rd/s} \end{cases}$$

$$T_2 \begin{cases} |T_2| = (1+(0.4)^2)^{-1/2} \\ \varphi_2 = -\operatorname{arctg} 0.4 \\ \omega_{C2} = 1/0.4 = 2.5 \text{ rd/s} \end{cases}$$

$$T_3 \begin{cases} |T_3| = (1+(0.2)^2)^{-1/2} \\ \varphi_3 = -\operatorname{arctg} 0.2 \\ \omega_{C3} = 1/0.2 = 5 \text{ rd/s} \end{cases}$$

	$\omega<0.4$	$0.4<\omega<2.5$	$2.5<\omega<5$	$\omega>5$
100	20log100	20log100	20log100	20log100
T_1 *(dB/dec)*	0	-20	-20	-20
T_2 *(dB/dec)*	0	0	-20	-20
T_3 *(dB/dec)*	0	0	0	-20
T *(dB/dec)*	20log100=40dB	-20	-40	-60
φ	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$

REFERENCES :

[1] P.Gatt. TS2 CIRA Régulation - Chap I Rappels 2009-2010 page 1-18 http://perso.numericable.fr/cira/pdf/Cours/Regulation/1%29%20Boucles%20de%20regulation.pdf

[2] Stéphane LE METEIL. BTS2 CIRA. Résume du cours sur la transformation de LAPLACE. 2005

[3] Benoît Marx. Centre de Recherche en Automatique de Nancy. 2010. http://www.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/harmo_fourier_laplace_ENSG.pdf

[4] Mohammed-Karim FELLAH, Cours d'asservissements linéaires continus

[5] Eric Magarotto, Cours de Régulation. IUT Caen - Département Génie Chimique et Procédés. Université de Caen. 2004.

[6] Bernard BAYLE, Systèmes et asservissements à temps continu Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg année 2007–2008

[7] V.Boitier, Université Paul Sabatier Toulouse III, septembre 2005

[8] Edouard Laroche Asservissement des systèmes linéaires a temps continu

[9] J. J. Di Stefano, A.R. Stubberud, I. J. Williams, Systèmes asservies 1 cours et exercices. SERIE SCHAUM.