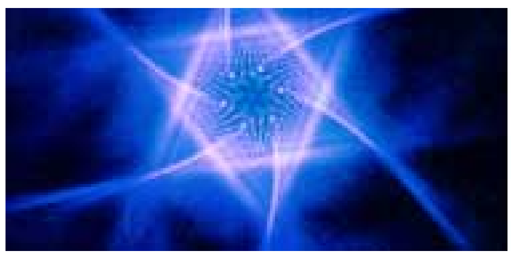
Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana

SUPSI

Corso di Fisica 1

DINAMICA



Prof. Andrea Danani

DTI- Dipartimento Tecnologie Innovative
SMF- Unità di Scienze Matematiche e Fisiche
Galleria 2
6928 Manno

Anno accademico 2011-2012

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo sforzo di capire l'universo è tra le pochissime cose che innalzano la vita umana al di sopra del livello di una farsa, conferendole un po' della dignità di una tragedia.

Steven Weinberg (dal capitolo finale di I primi tre minuti, 1977)

La parola Fisica deriva dal termine greco $\varphi\upsilon\sigma\iota\zeta$ che significa natura. Fino alla fine del XVIII secolo, lo studio della natura era l'oggetto di un'unica materia, la filosofia naturale. Con l'aumentare delle conoscenze, si sono sviluppate due discipline separate per lo studio della natura: le scienze biologiche, che hanno per oggetto lo studio degli esseri viventi, e le scienze fisiche, come la Fisica e la Chimica, che si occupano invece della materia inanimata.

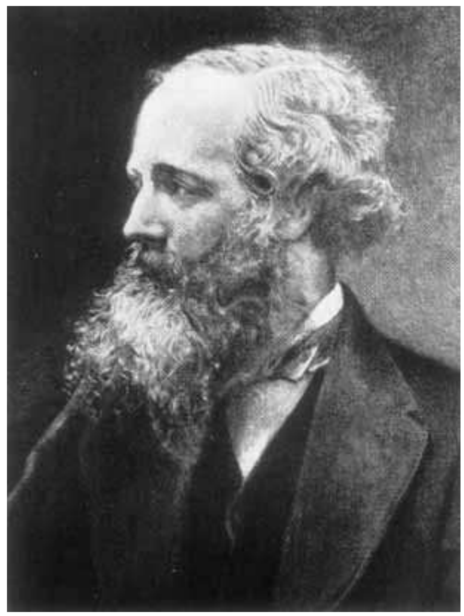
1.1 Il metodo scientifico: dalle leggi al modello

La Fisica, in particolare, studia i costituenti della materia e le loro interazioni per spiegare i fenomeni naturali e le proprietà della materia. Tale studio è condotto mediante l'applicazione del metodo scientifico o metodo sperimentale, la cui prima formulazione si deve a Galileo Galilei (1564-1642, nella figura a fianco). Il metodo scientifico sta alla base anche di altre scienze quantitative, come la Chimica, la Biologia e l'Astronomia. Esso consiste innanzitutto nella osservazione di un fenomeno, nella sua ripetizione in un laboratorio, eliminando i fattori ritenuti inessenziali e variando le cause che lo determinano.

Ciò richiede la misura accurata di alcune quantità ben determinate, dette *grandezze fisiche*, e la ricerca di relazioni che le leghino tra loro, cioè di *leggi fisiche*. Il confronto tra leggi fisiche consente l'individuazione dei principi fondamentali che governano una certa classe di fenomeni. Tutte le conseguenze che possono essere dedotte da questi principi formano una teoria fisica: essa, oltre ad includere le leggi fisiche a partire dalle quali era stata costruita, consente di determinare altre leggi e predire cosi i risultati di nuovi esperimenti. Una teoria fisica è valida finché le verifiche sperimentali cui è sottoposta non diano risultati in disaccordo con le sue previsioni. L'applicazione del metodo scientifico in Fisica ha mostrato che fenomeni apparentemente diversi sono governati dalle stesse leggi e che un piccolo numero di principi consente di interpretare e prevedere un campo di esperienze vastissimo.

Ad esempio, tutta la **Meccanica classica** è costruita su tre soli principi e una singola legge, la legge di gravitazione universale formulata da Isaac Newton (1643-1727), che governa il moto di un sasso lanciato da un ragazzo, l'alternanza delle maree, la traiettoria di un missile balistico, le proprietà del moto dei corpi celesti ed è responsabile della formazione delle nebulose, delle stelle e delle galassie.

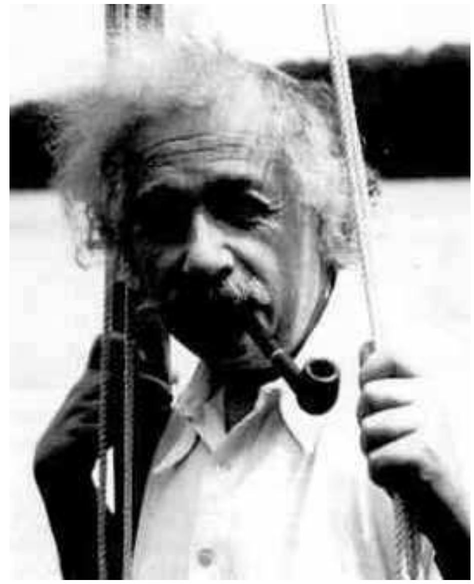
Isaac Newton



James Maxwell

Allo stesso modo, le equazioni di James Maxwell (1831-1879) quando furono formulate sintetizzarono in quattro semplici relazioni la descrizione di tutti i fenomeni elettrici e magnetici e consentirono di predire l'esistenza delle onde elettromagnetiche. Per dare un'idea della vastità del loro campo di applicazione, basti osservare che esse descrivono al tempo stesso il funzionamento dei circuiti di un normale apparecchio telefonico e le proprietà delle onde elettromagnetiche, da quelle attive nei forni a microonde a quelle che riceve o trasmette un telefono cellulare a quelle che i nostri occhi percepiscono come i colori dell'arcobaleno fino ai raggi X delle lastre radiografiche.

Quando l'osservazione sperimentale è in disaccordo con la teoria è necessario riformulare uno o più dei suoi principi in modo da costruire una nuova teoria che riproduca i risultati di quella precedente, nel contesto in cui essa è valida, ed abbia un campo di applicabilità più esteso per includere anche i fenomeni che la prima non riesce a spiegare. Ciò avviene continuamente e determina la vitalità dello sviluppo della Fisica. Un esempio è quello che risale a circa un secolo fa, quando si è trovato che la Meccanica classica è inadeguata per lo studio di fenomeni in cui le velocità dei corpi sono prossime a quella della luce o per lo studio di processi che si svolgono all'interno di atomi e nuclei. Per la descrizione della prima classe di fenomeni è stata formulata la **Meccanica relativistica** da Albert Einstein (1879-1955, foto a fianco) . Essa riproduce i risultati della Meccanica classica nel limite di bassa velocità dei corpi e prevede ad esempio che la durata media della vita di una particella che si muove a velocità vicine a quella della luce è molto maggiore di quella determinata nel sistema in cui essa è ferma. Per la descrizione dei fenomeni alle scale atomiche e nucleari è stata sviluppata la **Meccanica quantistica**, la cui costruzione ha impegnato i migliori fisici teorici e sperimentali dell'inizio del Novecento. Essa prevede ad esempio che per un atomo sono possibili solo alcuni ben determinati valori discreti dell'energia e che è possibile passare da un livello energetico all'altro assorbendo o emettendo l'energia necessaria sotto forma di quanto di luce o fotone.



Le nuove teorie fisiche che sono state formulate hanno profondamente cambiato i concetti di spazio, tempo e misura (con conseguente impatto anche in campo filosofico). Al giorno d'oggi, è il cosiddetto **modello standard**, elaborato da Weinberg e Salam negli anni '70, che si mantiene valido per l'unificazione delle forze fondamentali che esamineremo nel prossimo paragrafo.

1.2 Le forze fondamentali e il modello standard

Tutti i fenomeni naturali conosciuti possono essere descritti tramite 4 forze elementari, dette anche interazioni fondamentali. Essendo la realtà un tutt'unico, le 4 forze agiscono sempre assieme. Per esempio noi siamo vivi perchè siamo fatti di atomi i quali sono fatti di nuclei (in cui agiscono le forze nucleari) e di elettroni che vi ruotano attorno (grazie alla forza elettromagnetica). Gli atomi di cui siamo fatti sono legati fra loro dalle forze chimiche (prodotte dalla forza elettromagnetica) e formano le innumerevoli molecole che alimentano le numerosissime reazioni chimiche che ci tengono in vita. Il nostro corpo poi è legato dalla forza peso (forza gravitazionale) al nostro pianeta per cui non fluttuiamo liberamente nello spazio come fossimo in una navicella spaziale. Il sole tiene in orbita attorno a sè la terra e gli altri pianeti (forza gravitazionale) e la terra ha una struttura sferica grazie alla forza gravitazionale che la tiene insieme. Il sole poi riscalda ed illumina (forza nucleare ed elettromagnetica) la terra permettendo la vita, facendo piovere, alternando il giorno alla notte (grazie anche alla forza gravitazionale), ecc ....

Il tutto è organizzato dalla forza gravitazionale in sistemi stellari, galassie, ammassi galattici e super ammassi galattici mentre questo stesso tutto è formato da atomi e particelle in cui agiscono le forze elettromagnetiche e nucleari. Vediamo più in dettaglio le quattro interazioni, riassunte nella Tabella (1.1).

Interazione	Raggio d'azione	Campi di applicazione
Gravitazionale	infinito	formazione delle stelle sistemi planetari struttura in grande scala dell'universo big bang, buchi neri
Elettromagnetica	infinito	campi e onde elettromagnetiche proprietà chimiche della materia, vita
Nucleare debole	molto corto	decadimenti radioattivi
Nucleare forte	cortissimo	nuclei atomici fissione e fusione nucleare emissione di energia dalle stelle

Tabella 1.1: Le quattro interazioni fondamentali

1.2.1 Interazione gravitazionale

La forza gravitazionale agisce fra tutti i corpi dotati di massa. Essa è molto debole ed è percettibile solo fra corpi macroscopici. E' sempre attrattiva e agisce su larga scala in tutto l'universo permettendo l'esistenza di stelle, pianeti e galassie.

Il valore della forza gravitazionale fra due punti di massa m_1 e m_2 distanti R è dato dalla legge di gravitazione di Newton:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \quad , \; G = 6,67 \cdot 10^{-11} \; Nm^2/kg^2$$

1.2.2 Interazione elettromagnetica

La materia è costituita da particelle elettricamente cariche positivamente o negativamente (o di carica nulla). Due cariche elettriche si attirano se hanno segno opposto o si respingono se hanno segno uguale.

La forza elettrica fra due cariche Q_1 e Q_2 distanti R è data dalla legge di Coulomb:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad , \; k = 9 \cdot 10^9 \; Nm^2/C^2$$

Una carica elettrica in movimento produce, oltre ad un campo elettrico, anche un campo magnetico. I fenomeni magnetici, quindi, sono prodotti da cariche elettriche in movimento (in una calamita sono gli elettroni che vi generano il campo magnetico). Non esiste, quindi, una forza magnetica a sè stante, separata da quella elettrica, anche se i fenomeni magnetici sembrano apparentemente cosi diversi da quelli elettrici. La descrizione dei fenomeni elettrici e magnetici tramite una sola forza rappresenta il primo caso storico di unificazione fisica.

L'atomo è formato da un nucleo positivo contenente protoni e neutroni e da elettroni negativi che gli ruotano velocemente attorno. Essendo l'atomo nel suo complesso elettricamente neutro, il numero dei protoni eguaglia il numero degli elettroni. Questo numero è detto numero atomico. La somma del numero dei protoni e dei neutroni che compongono un nucleo è detto peso atomico. La massa di protoni e neutroni è molto grande rispetto a quella degli elettroni (circa 2000 volte, ed è per questo motivo che gli elettroni ruotano attorno al nucleo e non viceversa).

Gli elettroni delle orbite atomiche più esterne sono la causa dei legami chimici fra gli atomi che costituiscono le molecole di cui è composta la materia (e noi stessi).

La forza elettromagnetica e quella gravitazionale formano lo scenario usuale della nostra vita quotidiana nonché la causa della vita stessa. Sono state le prime forze ad essere conosciute e studiate (la forza nucleare è una scoperta recente, il neutrone fu scoperto solo nel 1932). Le forze nucleari sono come impacchettate nei nuclei atomici e raramente si manifestano.

1.2.3 Interazione nucleare debole

E' responsabile del decadimento radioattivo del nucleo atomico. Alcuni nuclei sono instabili e si spezzano spontaneamente producendo parti più piccole come altri nuclei più leggeri, particelle alfa (nuclei di elio) e beta (elettroni), nonché energia elettromagnetica (raggi gamma).

In natura ogni atomo ha un numero atomico ben preciso (il numero dei protoni o degli elettroni). Il peso atomico, invece, può essere diverso e questo perchè a parità di protoni si possono avere nel nucleo differenti numeri di neutroni. L'idrogeno, per esempio, ha numero atomico 1 (un protone ed un elettrone) ma può avere peso atomico 1 (idrogeno normale, in percentuale altissima), 2 (deuterio, un protone ed un neutrone, in percentuale bassa) e 3 (trizio, un protone e due neutroni, in percentuale bassissima). Dal punto di vista delle proprietà elettriche (chimiche) si tratta sempre di idrogeno. Dal punto di vista delle proprietà nucleari, idrogeno, deuterio e trizio sono molto diversi fra loro.

Atomi di ugual numero atomico e diverso peso atomico si chiamano isotopi. Gli isotopi di uno stesso atomo possono essere stabili od instabili, ovvero i loro nuclei permangono tali nel tempo oppure si disintegrano in parti più piccole con possibile emissione anche di energia elettromagnetica (raggi gamma). La maggioranza degli isotopi in natura sono stabili ma molti non lo sono. Altri diventano instabili se bombardati con particelle.

Il carbonio 14 (C_{14}) è un isotopo molto interessante perchè è utilizzato per la datazione dei fossili. Il carbonio ha numero atomico 6 mentre il suo isotopo più diffuso è l'isotopo C_{12}. E' presente anche il C_{13}. C_{12} e C_{13} sono stabili. Vi sono tracce anche di C_{14} che è instabile e si trasforma in azoto 14 (N_{14}) emettendo una particella beta (un elettrone). Questa disintegrazione avviene casualmente per cui nessuno può prevedere quando un singolo nucleo di C_{14} si disintegrerà . A livello statistico, però , esiste un parametro, la cosiddetta vita media o tempo di dimezzamento, che è assolutamente preciso. Il nucleo di C_{14} ha una certa ben precisa probabilità di di decadere. Su un numero grandissimo di nuclei questa probabilità determina una vita media di 5730 ± 40 anni (come si vede l'indeterminazione è davvero piccola!).

Tale vita media significa che a partire da un chilogrammo di C_{14}, dopo 5730 anni ne rimangono esattamente 500 grammi (cioè la metà). Supponendo che la percentuale del C_{14} rispetto a C_{12} e C_{13} nella nostra biosfera sia costante nel tempo, ogni essere vivente ne contiene una certa quantità costante in percentuale (lo assorbe dagli alimenti, dall'acqua e dall'aria).

Quando un essere vivente muore cessa di assumere C_{14} il quale da quel momento decadrà continuamente, senza essere rimpiazzato, con una vita media di 5730 anni.

In un fossile, quindi, si può calcolare la percentuale di C_{14} rimasto e di conseguenza ricavare il tempo trascorso dalla sua morte, ovvero l'età del fossile.

1.2.4 Interazione nucleare forte

E' responsabile della struttura dei nuclei atomici ed è estremamente forte, sebbene agisca in un range cortissimo.

Il nucleo atomico è molto piccolo e concentrato. L'interazione nucleare forte riesce a vincere la forza di repulsione elettrica fra i protoni di uguale carica (che a distanze sempre più piccole tende all'infinito) e permette l'esistenza del nucleo atomico. Altrimenti i protoni, respingendosi, non potrebbero stare uniti nel nucleo. Se liberata, questa forza produce energie enormi (pila atomica, bomba atomica, bomba H, energia radiante prodotta dalle stelle).

Una stella si forma da una gigantesca nube cosmica (soprattutto idrogeno e polvere) estremamente rarefatta che per forza gravitazionale (centripeta) comincia a condensarsi in una struttura sferica sempre più densa. Raggiunta una certa densità (grazie alla gravità crescente) gli atomi della stella in formazione cominciano ad urtarsi sempre più ed a riscaldarsi. Aumentando la densità sotto l'azione della gravità crescente, si raggiunge un livello di agitazione termica degli atomi tale da creare urti sempre più energici. A questo punto gli elettroni degli atomi escono dalle orbite che li vincolano al nucleo e si forma il plasma, ovvero un miscuglio ad alta energia di nuclei ed elettroni. Sotto l'azione della gravità sempre crescente si raggiunge finalmente un livello di agitazione dei protoni e neutroni tale che essi cominciano ad urtarsi cosi fortemente da innescare le forze nucleari (che hanno un raggio d'azione cortissimo). I protoni riescono cosi a vincere le forze elettriche repulsive e cominciano a fondersi (fusione nucleare) formando atomi di elio. La stella si accende ed inizia la sua vita. La reazione nucleare che avviene in una stella è quindi $D + D \rightarrow He + E$ (un nucleo di deuterio D + un altro nucleo di deuterio formano uno nucleo di elio con l'emissione di una certa energia).

L'energia viene prodotta perché la massa dell'elio che si forma è lievemente inferiore alla somma delle masse dei due nuclei di deuterio che l'hanno formato. Questo difetto di massa si trasforma in energia (secondo la nota formula $E = mc^2$). L'energia prodotta è enorme (essendo il prodotto della massa per la velocità della luce al quadrato) e viene emessa dalla stella sotto forma di radiazione elettromagnetica. Essa è l'energia che permette la vita sul nostro pianeta.

La fusione nucleare fra due nuclei di deuterio in un nucleo di elio è quindi la reazione nucleare che trasforma fredde nubi cosmiche di gas e polvere in caldissime stelle (tutto questo grazie alla forza di gravità). L'uomo è riuscito solo a riprodurre la fusione nucleare in forma esplosiva, non controllata (bomba H). Enormi sforzi si stanno facendo da decenni per riprodurla in forma controllata. Quando ciò sarà possibile, l'umanità finalmente disporrà di energia praticamente illimitata (l'idrogeno è presente nell'acqua in quantità inesauribile) ed allora sarà l'inizio di una nuova era.

Al momento il processo di fusione nucleare controllata è stato ottenuto solo per tempi brevissimi. Il problema fondamentale che ancora non è stato risolto è come confinare il plasma ad altissima energia in modo che si inneschi la fusione nucleare. Non potendo utilizzare, come in una stella, l'energia gravitazionale (centripeta), si utilizzano campi magnetici estremamente forti dove confinare il plasma. Quando però si innesca la reazione nucleare, l'aumento improvviso di energia fà si che il plasma esca dal confinamento magnetico e la fusione cessi.

Una stella, quindi, brucia idrogeno producendo elio il quale non è più utilizzabile per reazioni nucleari producenti energia. Siccome ogni stella ha una quantità di idrogeno ben definita, ogni stella ha cosi una ben precisa evoluzione (nascita, vita e morte). La morte di una stella può dar luogo a fenomeni diversi, dipende dalla massa della medesima. Se la massa è superiore ad una certa soglia (massa critica) la stella, raffreddandosi e contraendosi (collasso gravitazionale) si trasforma in un buco nero. Il nostro sole non ha una massa sufficiente, per cui non diventerà un buco nero.

1.2.5 Teorie e unificazione

Le 4 forze possono essere descritte matematicamente da due teorie : la *relatività generale* e la *meccanica quantistica*.

Nei primi 30 anni del '900 furono poste le basi logico-matematiche alle due teorie grazie ai lavori rivoluzionari di Einstein, Heisenberg, Schroedinger e molti altri.

La teoria della relatività generale descrive la forza gravitazionale ed è una teoria basata sui concetti geometrici classici del continuo. Siccome i fenomeni che descrive sono tutti a larghissima scala, la struttura corpuscolare microscopica della materia può in essa essere trascurata.

Viceversa, la meccanica quantistica descrive i fenomeni microscopici legati al funzionamento degli atomi e delle particelle. In tali fenomeni la forza gravitazionale è trascurabile poiché agisce apprezzabilmente solo fra corpi macroscopici.

La meccanica quantistica basa i propri concetti sulla discontinuità delle grandezze fisiche (i cosiddetti quanti) in uno scenario completamente in contraddizione con quello classico. Le due teorie sono perciò radicalmente antitetiche sia come forma (veste matematica) che come contenuto. Occupandosi però di fenomeni normalmente non paragonabili, possono essere portate avanti ed utilizzate separatamente.

Solo in particolari fenomeni, per esempio nei buchi neri, le due teorie vengono ad interagire. Quando cioè , per esempio, il campo gravitazionale è talmente forte da compattare cosi densamente la materia facendone interagire i componenti microscopici (atomi e particelle) col campo gravitazionale stesso.

Nel 1979, Sheldon Glashow, Steven Weinberg e Abdus Salam ottennero il premio Nobel per aver elaborato il cosiddetto *Modello Standard* che descrive, unificandole, tre delle quattro forze: le due nucleari e l'elettromagnetismo. Si tratta di una teoria di campo quantistica, consistente sia con la meccanica quantistica che con la relatività speciale.

Ad oggi, quasi tutte le verifiche sperimentali delle tre forze descritte dal Modello Standard si sono dimostrate in accordo con quanto previsto da esso; la più spettacolare fu senz'altro quella della scoperta dell'esistenza del bosone Z^0 previsto dalla teoria, fatta nel 1983 al CERN e che permise a Carlo Rubbia di ottenere il premio Nobel.

Il modello standard non è però una teoria completa delle interazioni fondamentali, perché non comprende la gravità (non può spiegare il moto dei pianeti, per esempio) e non è compatibile con la relatività generale.

Lo sforzo attuale dei fisici è quello di creare una teoria unica che fondi in sè la teoria della relatività generale con la meccanica quantistica, il microcosmo con il macrocosmo. Le difficoltà sono enormi ed è comune convinzione che occorrerà un'altra rivoluzione copernicana.

1.3 I rami della fisica

Oggigiorno il campo di azione della Fisica è vastissimo ed include tra le altre le seguenti aree: Meccanica dei corpi, Meccanica dei fluidi, Termodinamica, Acustica, Ottica, Onde ed Elettromagnetismo, Relatività , Meccanica Quantistica, Fisica Atomica e Molecolare, Fisica degli Stati Condensati, Fisica del Plasma, Fisica Nucleare, Fisica delle Particelle Elementari. A questi vanno affiancati i settori di ricerca con connotati interdisciplinari come Astrofisica e Cosmologia, Biofisica, Fisica dell'Ambiente, Fisica Sanitaria e Geofisica. Un discorso a parte merita il settore della energetica, a causa della rilevanza che le questioni connesse con il risparmio e la produzione di energia hanno per la società : a tali questioni possono rispondere positivamente la ricerca in Fisica Nucleare con gli studi sulla fusione dei nuclei e quella sulla Fisica dell'idrogeno. Infine vale la pena di citare due indirizzi di ricerca di recente sviluppo, come la Fisica Astroparticellare, che coniuga le conoscenze e gli strumenti dell'Astrofisica e quelli della Fisica delle Particelle Elementari per ricostruire la storia dell'Universo dai primi istanti di vita fino ad oggi, e la Econofisica, che applica i metodi della Meccanica Statistica allo studio del comportamento di sistemi complessi come ad esempio i mercati finanziari.

1.4 Fisica e Tecnologia

Reciproco e proficuo è anche lo scambio tra la Fisica e la Tecnologia. Se da una lato la Fisica ha bisogno di strumenti di misura e di rivelazione sempre più sensibili che gli fornisce la produzione tecnologica, dall'altro ogni singola scoperta scientifica può aprire la strada per innumerevoli e imprevedibili applicazioni tecnologiche. Un paradigma di questa interconnessione è dato dal computer: la moderna ricerca in Fisica, che lo impiega diffusamente per l'acquisizione o l'elaborazione di dati o per la simulazione di processi, necessita da un lato di prodotti sempre più raffinati e veloci, ma dall'altro contribuisce essa stessa allo sviluppo tecnologico del computer grazie ai risultati degli studi sui semiconduttori, sui cristalli liquidi, sull'optoelettronica e sui computer quantistici. Un esempio analogo si potrebbe fare parlando degli acceleratori di particelle: la ricerca in Fisica delle interazioni fondamentali domanda da una lato tecnologia avanzatissima per la costruzione di acceleratori e rivelatori di particelle sempre più potenti e sensibili, ma offre già nell'immediato alla medicina un nuovo strumento diagnostico, con la radiazione di sincrotrone, ed un utile strumento terapeutico, con i fasci di protoni usati per la cura dei tumori. Fanno invece parte della nostra vita quotidiana già da tempo molti strumenti ottenuti come applicazione dei risultati (e talvolta anche come sottoprodotti) della ricerca in Fisica: il tubo a raggi catodici dei comuni televisori, la radiografia (che deriva dagli studi sulla radioattività), la Tomografia Assiale Computerizzata (detta TAC e utilizzata originariamente per la rivelazione di particelle subnucleari), le tecniche di Risonanza Magnetica Nucleare, le tecniche terapeutiche basate sul laser (che nacque da un'idea di Einstein), le fibre ottiche, gli schermi a plasma e molti altri. Infine, lo strumento tecnologico che tanto sta cambiando il nostro modo di comunicare, cioè il World Wide Web, è nato presso il più grande laboratorio di ricerca europeo, il Centro Europeo di Ricerche Nucleari o CERN di Ginevra, come strumento per rendere immediato lo scambio di informazioni tra i gruppi di ricerca in Fisica delle particelle elementari sparsi per il mondo. E' stato proprio al CERN che sono stati creati il primo browser ed il primo server WWW e con essi il software che rende possibile la comunicazione, cioè URL, HTTP e HTML.

Capitolo 2

Misure e grandezze fisiche

2.1 Misurare oggetti

Si dice spesso che la fisica è la scienza che descrive i fenomeni in natura. E' però importante specificare che questa descrizione avviene tramite delle grandezze che devono essere misurabili, altrimenti si parla di metafisica. La massa di un tavolo o la lunghezza di un auto sono grandezze misurabili, la bellezza di una poesia o l'umore di una persona non lo sono, perlomeno in senso scientifico. Per descrivere una grandezza fisica bisogna innanzitutto definire un'unità , il che significa una quantità della grandezza associata a 1.0. Poi si definisce un campione di quell'unità , il che significa un oggetto di riferimento con cui vengono confrontati altri oggetti di quella grandezza. Fra le grandezze implicate nelle leggi della fisica troviamo ad esempio la lunghezza, il tempo, la massa, la temperatura, la pressione, la resistenza elettrica. L'unità di lunghezza è il metro, e il campione del metro è definito come la lunghezza del tratto rettilineo percorso nel vuoto dalla luce in una certa frazione di secondo. Definire un'unità e il suo campione è un'operazione generalmente definita da una convenzione fra scienziati. La cosa importante è farlo in modo sensato oltre che pratico.

I righelli, che approssimano la lunghezza standard, ci forniscono uno di questi mezzi per misurare le lunghezze. Molti dei nostri confronti sono necessariamente indiretti. Non si può usare un righello per misurare il raggio di un atomo o la distanza di una stella. Il numero delle grandezze fisiche è cosi grande che organizzarle è diventato un serio problema. Fortunatamente esse non sono tutte indipendenti. Cosi ciò che si fa è scegliere, con accordi internazionali, un piccolo numero di grandezze fisiche, come la lunghezza e il tempo, e assegnare a ciascuna di esse dei campioni di unità . Definiamo quindi tutte le altre grandezza della fisica in base a queste grandezze fondamentali e ai campioni delle loro unità . La velocità , per esempio, è definita in base alle grandezze fondamentali lunghezza e tempo, e ai campioni delle rispettive unità di misura. I campioni fondamentali dovrebbero essere accessibili oltre che invariabili. Se definiamo l'unità di misura della lunghezza come la distanza fra il naso e il dito indice con il braccio teso, avremo certamente un'unità di misura accessibile, ma che varierà , naturalmente, da persona a persona. L'esigenza di precisione nella scienza e nella tecnica ci spinge esattamente nella direzione opposta. A noi interessa prima di tutto l'invariabilità , e poi facciamo un grande sforzo per rendere facilmente accessibili a tutti coloro che ne hanno bisogno dei fedeli duplicati dei campioni fondamentali.

2.2 Il sistema internazionale delle unità di misura

Nel 1971 la 14^a Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure ha selezionato sette grandezze come grandezze fondamentali, che quindi costituiscono la base del Sistema Internazionale di Unità , abbreviato internazionalmente in SI, derivato dal comune sistema metrico. La tabella 1-1 elenca i nomi delle unità delle tre grandezze fondamentali (lunghezza, massa e tempo). Le unità per le grandezze sono state scelte a ≪scala umana≫.

Nel SI molte unità derivate sono state definite in funzione di queste unità fondamentali. Per esempio l'unità SI della potenza, chiamata watt (abbreviata in W), è definita in funzione delle unità di massa, lunghezza e tempo. Quindi, come si vedrà in seguito, $Watt = W = kg\ m^2/s^3$. Per esprimere numeri molto grandi o molto piccoli, in fisica viene usata la cosiddetta notazione scientifica, che utilizza le potenze di 10. In questa notazione, ad esempio, 3560000000 m $= 3.56 \cdot 10^9$ m e 0.000000492 s $= 4.92 \cdot 10^7$ s. A volte la notazione scientifica, da quando si usano i calcolatori, si presenta con un aspetto ancora più sintetico, cioè 3.56 E9 m oppure 4.92 E-7 s, dove ≪E≫, abbreviazione di ≪esponente≫, sta in luogo di moltiplicato per 10 elevato alla.

Come ulteriore comodità , quando abbiamo a che fare con misure di grandezze molto grandi o molto piccole, usiamo i prefissi elencati nella Tabella(2.1). Come si può vedere, ciascun prefisso rappresenta un fattore dato da una certa potenza del 10. Associare un prefisso a un'unità significa moltiplicarla per il relativo fattore. Ad esempio, un dato valore di potenza elettrica può essere cosi espresso: $1.27 \cdot 10^9$ Watt = 1.27 gigawatt = 1.27 GW, o un particolare intervallo di tempo: $2.35 \cdot 10^9$ secondi = 2.35 nanosecondi = 2.35 ns. Alcuni prefissi, come quelli usati nei millimetri, nei centimetri, nei chilogrammi, nei megabyte, sono già familiari.

Fattore	Prefisso	Simbolo	Fattore	Prefisso	Simbolo
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano-	n
10^{6}	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^{3}	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^{2}	etto-	h	10^{-2}	centi-	c
10^{1}	deca-	da	10^{-1}	deci-	d

Tabella 2.1: Prefissi per le unità SI*

2.3 Lunghezza

Nel 1792, è adottato come unità del sistema di misure il metro, definito come la *decimilionesima parte della distanza fra il Polo Nord e l'Equatore*. Si passò poi a una nuova definizione di metro come la distanza tra due linee sottili incise vicino alle estremità di una barra di platino iridio, la barra del metro campione, custodita presso l'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure vicino a Parigi.

Nel 1959 nei paesi anglosassoni la iarda fu definita legalmente come:

$$1 \text{ iarda} = 0.9144 \text{ metri (esattamente)}$$

il che equivale a

$$1 \text{ pollice} = 2.54 \text{ centimetri (esattamente).}$$

La tabella seguente dà alcune lunghezze interessanti.

LUNGHEZZA	METRI
Distanza del quasar più lontano osservato (1996)	$2 \cdot 10^{26}$
Distanza della galassia di Andromeda	$2 \cdot 10^{22}$
Distanza della stella più vicina (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
Distanza del pianeta più lontano (Plutone)	$6 \cdot 10^{12}$
Raggio della Terra	$6 \cdot 10^{6}$
Altezza del monte Everest	$9 \cdot 10^{3}$
Spessore di questa pagina	$1 \cdot 10^{-4}$
Lunghezza d'onda della luce	$5 \cdot 10^{-7}$
Lunghezza di un virus tipico	$1 \cdot 10^{-8}$
Raggio dell'atomo di idrogeno	$5 \cdot 10^{-11}$
Raggio di un protone	10^{-15}

Tabella 2.2: Alcune lunghezze

Nel 1960 fu adottata una nuova unità di misura per il metro, basata sulla lunghezza d'onda della luce. Il metro fu cosi ridefinito come $1'650'763.73$ lunghezze d'onda di una particolare luce color rosso arancio emessa dalla scarica in un tubo a gas rarefatto di cripton-86. Questo ostico numero di lunghezze d'onda fu scelto in modo che la nuova unità di misura fosse il più possibile in accordo con il vecchio campione del metro-barra. Gli atomi di cripton-86 del campione atomico di unità di misura della lunghezza si trovano dappertutto, sono identici fra loro ed emettono luce esattamente della stessa lunghezza d'onda. Come ha osservato Philip Morrison del MIT, ogni atomo è una riserva di unità campione naturali, più sicuro dell'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure.

Verso il 1983 l'esigenza di maggior precisione era arrivata a un punto tale che perfino il campione a cripton-86 non era più adeguato. Fu allora adottata una decisione coraggiosa. Il metro fu ridefinito come la distanza che percorre un'onda di luce in uno specifico intervallo di tempo. Con le parole della delibera della 17^a Conferenza Generale sui Pesi e Misure:

Il metro è la lunghezza che la luce percorre nel vuoto
in un intervallo di tempo pari a 1/(299792458) secondi

Questo numero fu scelto in modo tale che la velocità c della luce potesse essere esattamente c= 299792458 m/s. Le misurazioni della velocità della luce sono diventate estremamente precise, tanto che ha avuto senso, per ridefinire il metro, adottare la velocità della luce come grandezza di riferimento più rigorosamente definita.

2.4 Tempo

Al tempo sono legati due questioni fondamentali relative a un evento. Da un lato interessa collocarlo in modo da poter stabilire una corretta sequenza dei fatti, dall'altro conoscere qualè la sua durata. Perciò qualsiasi unità di misura del tempo deve poter dare risposta a due domande: *Quando è accaduto?* e *Quanto è durato?*. La Tabella (2.3) riporta la misura di alcuni intervalli di tempo.

Intervallo di tempo	Secondi
Tempo calcolato per la vita di un protone	$1 \cdot 10^{39}$
tà dell'Universo	$5 \cdot 10^{17}$
Eia della piramide di Cheope	$1 \cdot 10^{11}$
Durata media della vita umana	$2 \cdot 10^{9}$
Durata di un giorno	$9 \cdot 10^{4}$
Intervallo fra due battiti cardiaci umani	$8 \cdot 10^{-1}$
Vita media del muone	$2 \cdot 10^{-6}$
Il più breve impulso luminoso prodotto e misurato in laboratorio (1989)	$6 \cdot 10^{-15}$
Vita media della particella più instabile	$1 \cdot 10^{-23}$
Il tempo di Planck (ossia il più breve tempo trascorso dal Big Bang oltre il quale si possono applicare le leggi della fisica come noi le conosciamo)	$1 \cdot 10^{-43}$

Tabella 2.3: La misura di alcuni intervalli di tempo

Qualsiasi fenomeno ripetitivo può essere utilizzato come unità di misura del tempo. La rotazione della Terra, che determina la lunghezza del giorno, è stata usata a questo scopo per secoli. Un orologio al quarzo, nel quale un anello di quarzo vibra in continuazione, può essere tarato, mediante osservazioni astronomiche, sul periodo di rotazione della Terra e usato in laboratorio per misurare intervalli di tempo.

Negli ultimi anni, la misura dell'unità di misura del tempo si basa sulla la tecnologia dell'orologio atomico. La Figura (2.1) mostra un orologio di questo tipo, basato sulla frequenza caratteristica dell isotopo del cesio-133, installato presso il National Institute of Standards and Technology (NIST). Esso costituisce, negli USA, il campione del Coordinated Universal Time (UTC), i cui segnali di tempo sono disponibili per radio sulle onde corte e per telefono.

Figura 2.1: Il campione di unità di misura del tempo basato sulla frequenza atomica del cesio al NIST. È il campione primario per la misura del tempo negli Stati Uniti. Si può chiamare il numero telefonico ++1(303)4997111 per regolare il proprio orologio.

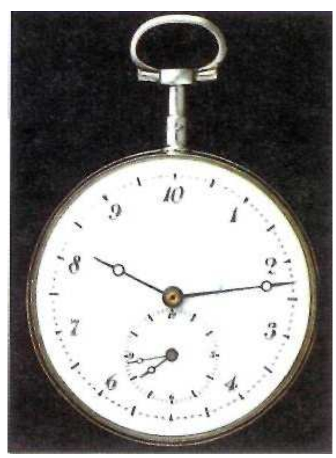


Figura 2.2: Quando fu proposto il sistema metrico nel 1792 l'ora fu ridefinita per stabilire la durata di un giorno in 10 ore, ciascuna suddivisa in 100 centesimi. Ma l'idea non ebbe un gran successo. Chi fabbricò questo orologio da 10 ore lo dotò saggiamente di un piccolo quadrante che conservava la tradizionale suddivisione del giorno in $2 \cdot 12$ ore di 60 minuti. I due quadranti indicano la stessa ora?

Per sincronizzare un orologio con precisione, bisogna sempre calcolare il tempo necessario a questi segnali per arrivare dal NIST fino al luogo in cui ci si trova.

La 133^a Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure adottò nel 1967 un campione di unità del secondo basato sull'orologio al cesio:

Un secondo è il tempo necessario alla luce (di una specifica lunghezza d'onda) emessa da un atomo di cesio- 133 per effettuare $9'192'631'770$ oscillazioni.

In base ai calcoli teorici, due orologi al cesio dovrebbero funzionare 6000 anni prima che si verifichi uno scarto superiore a 1 s fra le loro letture del tempo.

2.5 Massa

2.5.1 Il chilogrammo

Il chilogrammo è l'unica tra le unità di misura SI che è definita in relazione ad un manufatto e non a una proprietà fisica.

Il grammo entrò a far parte del Sistema Metrico Francese il 1^o agosto 1793, definito come la massa di un centimetro cubo di acqua alla temperatura di 3.98^oC a pressione atmosferica standard. Questa particolare temperatura venne scelta poiché per essa l'acqua possiede la sua massima densità . Il 7 aprile 1795 fa la sua comparsa il chilogrammo, come suo multiplo (1 kg = 1000 g).

Tale definizione era difficile da realizzare accuratamente, anche perché la densità dell'acqua è legata in parte alla pressione, e l'unità di pressione include la massa tra i fattori, introducendo una dipendenza circolare nella definizione del chilogrammo.

Per evitare questo problema, il chilogrammo venne ridefinito come la massa precisa di una particolare massa standard, creata per approssimare la definizione originale e realizzata nel 1875. Il prototipo internazionale del chilogrammo (*Le Grand Kilo*), un cilindro retto a base circolare che misura 39 cm in altezza e diametro, composto da una lega di platino e iridio, è conservato al Bureau International des Poids et Mesures (Ufficio internazionale dei pesi e delle misure) presso il pavillon de Breteuil a Sè vres, Francia (vedi Fig.2.3).

Dal 1889, il SI definisce l'unità di misura come pari alla massa di questo prototipo. Copie ufficiali del prototipo, sono rese disponibili come prototipi nazionali, che vengono confrontati con il prototipo di Parigi all'incirca ogni 10 anni.

Per definizione, l'errore nella replicabilità del prototipo è pari a zero; in realtà , è valutato nell'ordine dei 2 microgrammi. Questo risulta dalla comparazione del prototipo con le sue copie ufficiali, che sono, per quanto possibile, composte dallo stesso materiale e conservate nelle stesse condizioni. Non ci sono motivi per ritenere che il prototipo sia più o meno stabile delle copie ufficiali, la procedura di comparazione viene eseguita ogni 40 anni circa. Sembra che il chilogrammo originale abbia perso circa 50 microgrammi negli ultimi 100 anni per ragioni ancora sconosciute.

La scomodità legata all'accessibilità dei campioni unita alla loro dubbia accuratezza hanno convinto i tecnici e gli scienziati a cercare una definizione di chilogrammo maggiormente

Figura 2.3: *Le Grand kilo*, l'unità di misura della massa

soddisfacente. É perciò in corso uno sforzo per introdurre una nuova definizione di chilogrammo, per mezzo di costanti fondamentali o atomiche. Ciò allo scopo di renderla maggiormente precisa e realizzabile in ogni laboratorio specializzato.

Ecco alcune delle proposte su cui si sta lavorando:

- Legare la definizione di chilogrammo al numero di Avogadro. Il valore di questa costante universale è pari al numero di particelle contenute in una mole di una qualunque sostanza. La difficoltà tecnica di questo approccio è legata alla necessità di contare con precisione il numero di atomi della sostanza prescelta e quindi, rendere l'incertezza con cui si conosce il numero di Avogadro minore di quella legata al chilogrammo campione attuale.

- L'utilizzo della levitazione di un superconduttore, che mette in relazione il chilogrammo alle quantità elettriche tramite la levitazione di un corpo superconduttore in un campo magnetico generato da una spira superconduttrice, e misurando la corrente elettrica circolante nella spira.

- Il chilogrammo è quella massa che subisce una accelerazione di 2×10^{-7} m/s^2 se soggetta alla forza che si sviluppa tra due conduttori retti, paralleli, di lunghezza infinita e sezione circolare trascurabile, posti nel vuoto alla distanza di un metro, attraverso cui scorre una corrente elettrica costante di $6,24150962915265 \times 1018$ cariche elementari al secondo.

2.5.2 Un secondo campione di massa

Le masse degli atomi si possono confrontare fra loro con molto maggior precisione di quanto non si possano confrontare con il kilogrammo campione. Per questa ragione è stato definito un secondo campione per l unità di misura della massa. É l'atomo del carbonio-12 al quale, per accordo internazionale, è stata attribuita la massa di 12 unità di massa atomica (u). Il rapporto fra le due unità è:

$$1\ u = 1.6605402 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}\ .$$

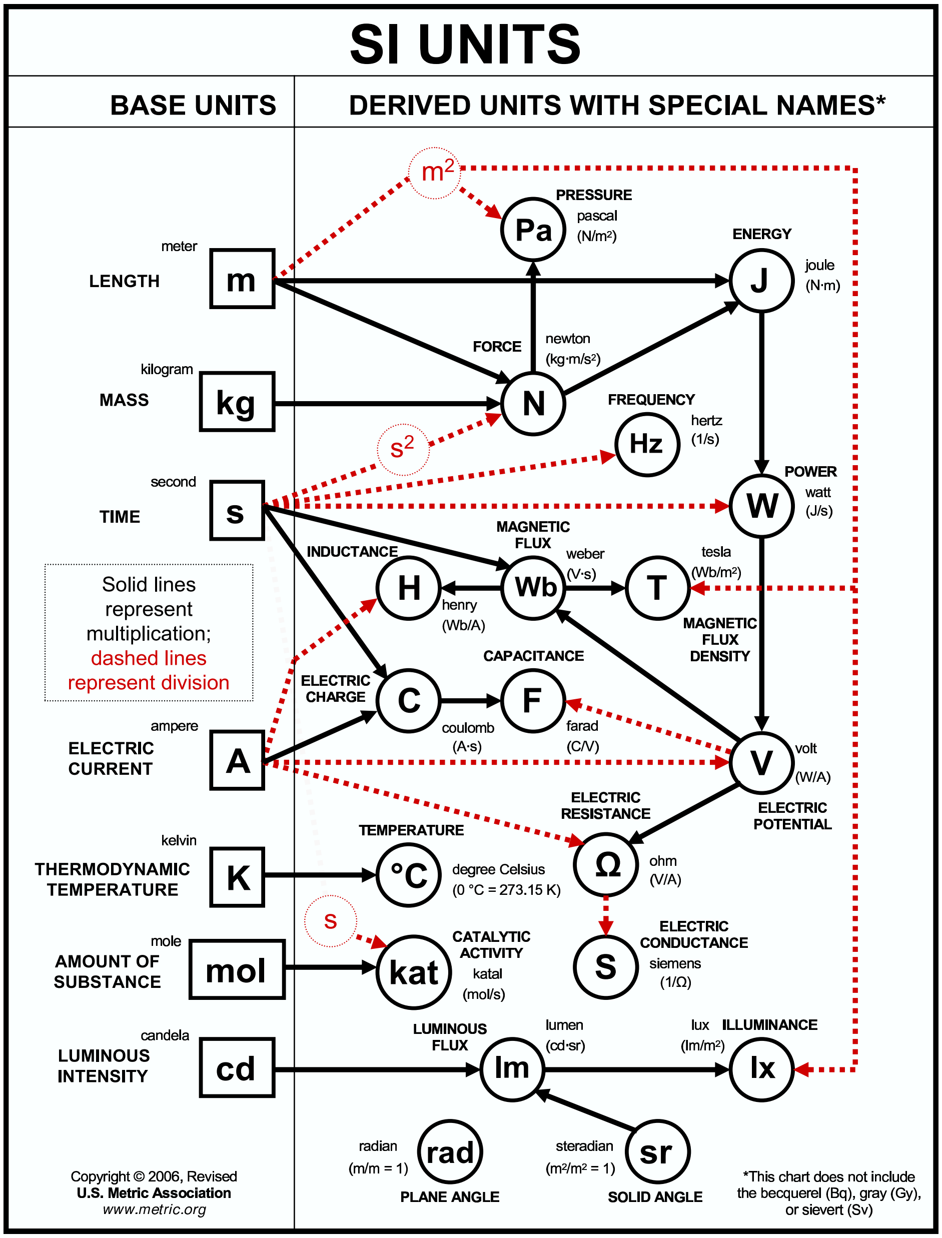
con un incertezza di ±10 negli ultimi due decimali. Con uno spettrometro di massa gli scienziati possono, con ragionevole precisione, determinare le masse di altri atomi in relazione alla massa dell atomo di carbonio-12. Quello che attualmente manca è un sistema affidabile per estendere questa precisione a campioni di unità di massa più comuni, come il kilogrammo [1].

OGGETTO	KILOGRAMMI
L'universo conosciuto	$l \cdot 10^{53}$
La nostra galassia	$2 \cdot 10^{41}$
Il Sole	$2 \cdot 10^{30}$
La Luna	$7 \cdot 10^{22}$
L'asteroide Eros	$5 \cdot 10^{15}$
Piccola montagna	$l \cdot 10^{12}$
Un transatlantico	$7 \cdot 10^{7}$
Un elefante	$5 \cdot 10^{3}$
Un acino d'uva	$3 \cdot 10^{-3}$
Un granello di polvere	$7 \cdot 10^{-10}$
Una molecola di penicillina	$5 \cdot 10^{-17}$
Il protone	$2 \cdot 10^{-27}$
L'elettrone	$9 \cdot 10^{-31}$

Tabella 2.4: Alcune misure di massa

[1] L'unità di massa atomica non fa parte del SI. Essa è tuttavia ammessa dalla maggior parte delle normative internazionali, anche se per il momento resta ancora il kilogrammo campione a far fede come unità di massa.

2.5.3 Tabella di conversione delle unità



Capitolo 3

Moto rettilineo

3.1 Il punto materiale, equazioni del moto

Un corpo si dice in moto relativamente ad un altro corpo quando la sua posizione, misurata rispetto all'altro corpo cambia nel tempo. Si dice *cinematica* lo studio del moto dei corpo indipendentemente dalla cause che lo hanno generato.

Per una completa determinazione del movimento di un corpo occorre conoscere il moto di ciascuna particella che lo compone. Tuttavia, in questa prima parte prescindiamo dalle sue dimensioni, dalla forma, della composizione chimica, ecc. considerandolo unicamente come un punto, che denomineremo *punto materiale*. Questa rappresentazione dei corpi risulta efficace in tutte le circostanze in cui le loro reali dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze coperte lungo il percorso che ne caratterizza il moto. Così, ad esempio, l'identificazione della Terra con un punto materiale consente un'accurata descrizione del suo moto orbitale intorno al Sole, oppure la pressione esercitata da un gas sulle pareti di un contenitore può essere valutata considerando le molecole del gas come punti materiali.

Lo studio del moto di un corpo richiede la specificazione di un sistema di coordinate cartesiane, fissando un sistema spaziale di riferimento stabilendo un istante iniziale a partire dal quale misurare gli intervalli di tempo. Il moto di un punto materiale P è quindi determinato una volta che è nota la legge di variazione nel tempo delle sue coordinate (*equazioni orarie):*

$$\begin{cases} x = & x(t) \\ y = & y(t) \\ z = & z(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

Con le equazioni orarie (3.1), è possibile scrivere la legge di variazione nel tempo del vettore posizione $\overrightarrow{OP}(t)$ tracciato a partire dall'origine O del sistema di riferimento verso la particella:

$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\ \vec{e}_x + y(t)\ \vec{e}_y + z(t)\ \vec{e}_z \tag{3.2}$$

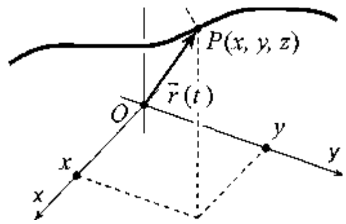


Figura 3.1: Traiettoria descritta dal vettore posizione $\vec{r}(t)$.

Il luogo delle posizioni occupate dal punto P durante il suo moto è una linea detta *traiettoria;* questa può essere retta o curva che, a sua volta può essere piana o sghemba. Nel primo caso il moto si dice *rettilineo,* nel secondo caso *curvilineo.*

Le relazioni (3.1) costituiscono le equazioni parametriche della traiettoria per cui l'eliminazione fra una coppia di esse del parametro t fornisce le equazioni di due superfici nello spazio la cui intersezione, nell'intervallo specificato attraverso la variazione temporale, determina la traiettoria.

ESEMPIO 3.1 *Consideriamo il moto di un punto materiale su di un piano; riferito il movimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, le equazioni del moto siano:*

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \tag{3.3}$$

dove sia x che y sono espresse in metri. Di che traiettoria si tratta?

Soluzione: *eliminando il parametro t fra le due equazioni, si trova:*

$$y(x) = x^2 + 4x + 2 \tag{3.4}$$

cioè la traiettoria descritta è una parabola.

Indicando con Pe P' le posizioni assunte dal punto materiale in corrispondenza degli istanti di tempo t e $t + \Delta t$, si chiama *spostamento* nell'intervallo Δt il vettore:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta x\ \vec{e}_x + \Delta y\ \vec{e}_y + \Delta z\ \vec{e}_z \tag{3.5}$$

dove $\vec{r}(t)$ è il vettore posizione associato al moto di P.

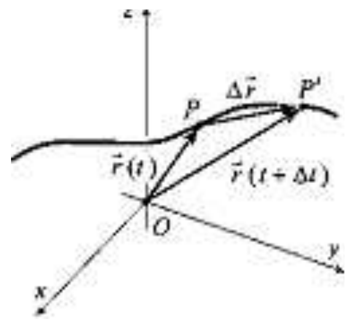


Figura 3.2: Vettore spostamento definito da due istanti successivi.

3.2 Posizione e spostamento

Nel moto rettilineo, per localizzare un oggetto dobbiamo indicare la direzione (vale a dire la retta) lungo la quale si muove e specificarne la distanza a cui si trova rispetto ad un punto fisso O di riferimento. Per sapere se il corpo si trova a destra o a sinistra di tale punto, bisogna dare un orientamento all'asse. Risulteranno positivi i valori della posizione sulla semiretta, che ha origine in 0 e va nel senso dell'asse, mentre saranno negativi quelli sull'altra semiretta, come si può vedere in Fig(3.3).

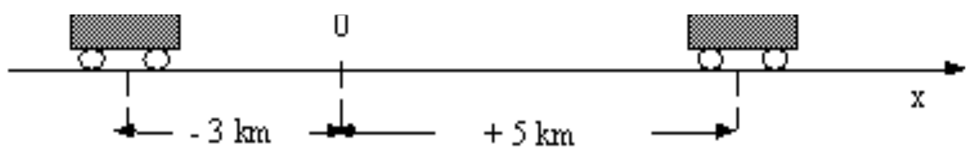
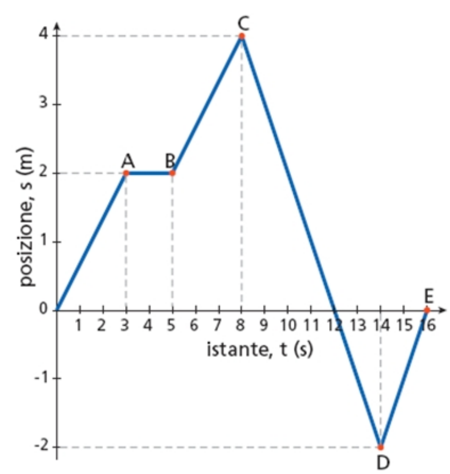


Figura 3.3: Due posizioni determinate su una asse che si estende all'infinito

Nel moto rettilineo il punto materiale si sposta lungo una linea retta; fissata un origine e una direzione, questo tipo di moto è descrivibile adoperando una sola coordinata, generalmente $x = x(t)$ (oppure $s = s(t)$). Sia $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$ la posizione del punto P rispettivamente, ai tempi t_1 e t_2, con $\Delta x = x_2 - x_1$ si indica lo spostamento compiuto nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Dal grafico in cui è rappresentata la posizione di un corpo in funzione del tempo t, è possibile leggere come si è spostato il corpo stesso nel tempo. Per esempio dal grafico $s(t)$ a fianco, si deduce che l'oggetto si sposta in avanti di 2 metri in 3 secondi, resta fermo per 2 secondi, riavanza di 2 metri in 3 secondi, torna indietro di 6 metri in 6 secondi per poi tornare alla posizione iniziale negli ultimi 2 secondi.



Occorre notare che il simbolo Δx rappresenta sempre uno **spostamento** e non necessariamente uno spazio percorso. Lo spostamento è una grandezza vettoriale poiché è caratterizzato da un modulo (la distanza fra i due punti) e da una direzione (verso positivo o negativo).

3.3 Velocità media e istantanea

Da un grafico posizione-tempo possiamo leggere anche quanto velocemente si è spostato un corpo. Basta suddividere l'asse del tempo in intervalli uguali Δt e confrontare gli spostamenti in tali intervalli. Se gli intervalli non sono tutti uguali, sorge naturale confrontare i rapporti fra il cambiamento di posizione $\Delta x = x_2 - x_1$ e il tempo trascorso associato $\Delta t = t_2 - t_1$. A tale rapporto si dà il nome di *velocità media* nell'intervallo di tempo fra t_1 e t_2 e si indica con:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \; . \tag{3.6}$$

La velocità media fornisce un'indicazione concernente il moto del punto P nell'intervallo di tempo Δt durante il quale il punto si sposta lungo il segmento di lunghezza Δx. Se rappresentiamo su un diagramma cartesiano la legge oraria del moto $x = x(t)$, in tale grafico risulta che la velocità media calcolata tra i tempi t_1 e t_2 può essere interpretata come la pendenza della retta passante per i punti (t_1, x_1) e (t_2, x_2) (vedi Fig.3.4).

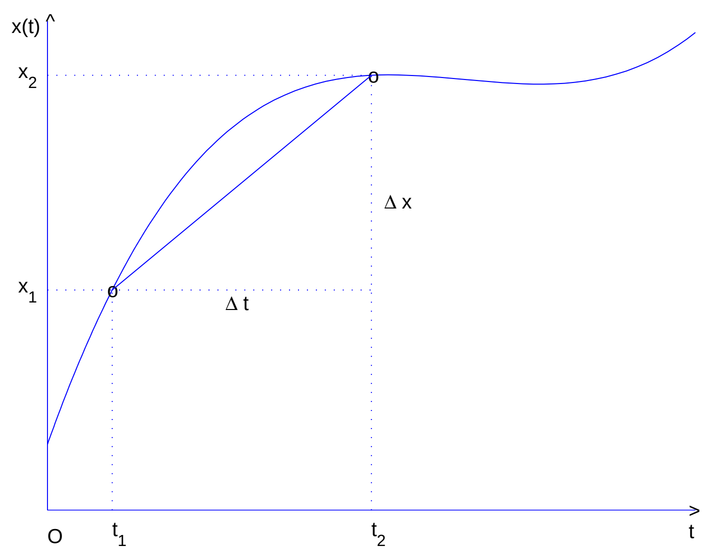


Figura 3.4: La velocità media è la pendenza della retta che congiunge i due punti sul grafico $x(t)$.

Perciò la velocità ha le dimensioni di una lunghezza diviso un tempo, per cui nel Sistema Internazionale *(SI)* risulta $[m/s]$, non essendoci una specifica unità di misura per questa grandezza.

Bisogna chiarire che la velocità media è legata all'intervallo di tempo Δt e non permette ad esempio di stabilire il valore che assume la velocità in corrispondenza di un particolare istante di tempo compreso nell'intervallo considerato. Tuttavia si può pensare di applicare il procedimento di calcolo della velocità media ad intervalli Δt di ampiezza via via decrescenti, al cui interno è contenuto l'istante in cui si vuole stabilire il valore della velocità.

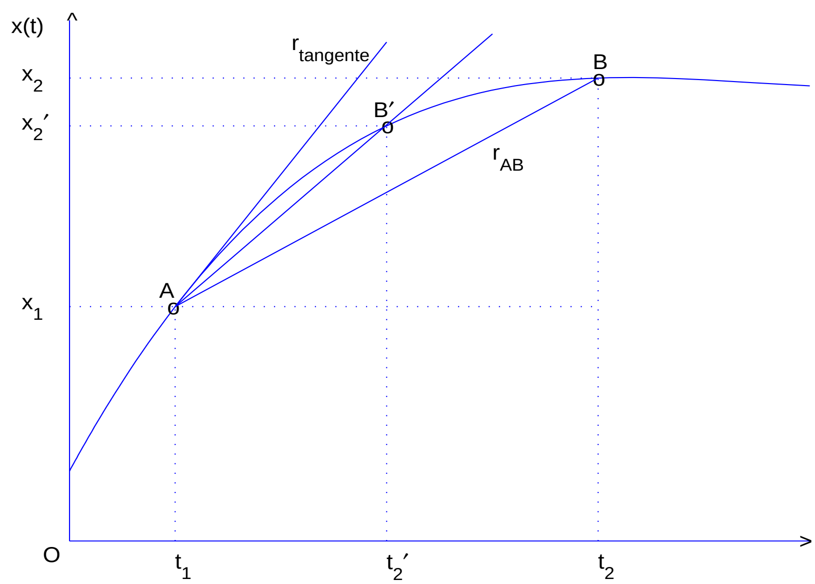


Figura 3.5: La velocità istantanea è la pendenza della retta tangente al grafico $x(t)$

Se scegliamo quindi dei valori di t_2 sempre più vicini a t_1, il punto B si muove verso il punto A e la retta r_{AB} congiungente i due punti tende ad identificarsi con la tangente in A alla curva. Pertanto anche il valore della pendenza di r_{AB} tende ad un valore ben definito e cioè a quello della pendenza di tale tangente (vedi Fig.3.5). Questo valore limite della velocità media viene chiamato *velocità istantanea* all'istante t_1 ed è indicata con $v(t_1)$:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \tag{3.7}$$

L'espressione (3.7) viene detta *derivata* della funzione $x(t)$ rispetto all'istante t nell'istante t_1. Si può generalizzare il discorso per qualsiasi istante t: la velocità istantanea è quindi la funzione derivata della funzione $x(t)$ [1] e viene espressa come:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \tag{3.8}$$

La velocità istantanea è quindi a sua volta una funzione del tempo, eccetto che nel moto rettilineo uniforme dove la velocità istantanea è costante e coincide con il valore della velocità media indipendentemente dalla scelta dell'intervallo di tempo.

L'esempio in Fig.3.6 illustra il passaggio dal grafico $x(t)$ al grafico $v(t)$, ottenuto calcolando la derivata della curva $x(t)$ [2]. Si possono trarre alcune informazioni dai grafici:

a) Quando il grafico $x(t)$ è crescente (decrescente), la velocità è positiva (negativa) poiché l'oggetto va in avanti (indietro).

b) Nei punti in cui l'oggetto cambia direzione, la velocità istantanea è nulla.

c) Nei punti in cui la velocità raggiunge un massimo (minimo) locale, il grafico della posizione passa da concavo a convesso (da convesso a concavo). Vedremo la relazione con il grafico dell'accelerazione in seguito.

Abbiamo visto che in fisica la velocità di un corpo è per definizione una grandezza vettoriale in quanto associata a uno spostamento. E' possibile definire una velocità scalare $\bar{v}$, riferita non allo spostamento ma allo spazio Δs effettivamente percorso fra due punti. Vale a dire:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Nel moto unidimensionale, la velocità scalare coincide con il modulo della velocità vettoriale solo se il movimento avviene nello stesso verso. Altrimenti, se vi sono degli andirivieni, è sempre superiore. Per la velocità istantanea, la velocità scalare coincide con il modulo di quella vettoriale.

Nell'uso comune di tutti i giorni, con la parola velocità in italiano si indica sempre la velocità scalare. Nel linguaggio fisico, si intende sempre quella vettoriale e bisogna specificare in modo esplicito se si tratta di quella scalare. In inglese ad esempio, vi sono due parole distinte: speed per la velocità scalare e velocity per quella vettoriale.

3.4 Accelerazione media e istantanea

Quando la velocità di un corpo varia, si dice che il corpo è sottoposto a una *accelerazione*. L'accelerazione media a_m durante un intervallo di tempo Δt definito da t_1 e t_2 è data da:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

[1] La calcolatrice TI89/92 permette di calcolare direttamente la derivata della funzione $x(t)$, tramite l'istruzione *differentiate* o in modo abbreviato con d. Ad esempio: $d(2t^3, t)$ fornisce la derivata della funzione $x(t) = 2t^3$, ossia $6t$.

[2] $x(t) = 0.8(t^2 - 5)\ sin(2t + 1) + 3$, $v(t) = 1.6\,t \sin(2\,t + 1) + 1.6\,\left(t^2 - 5\right) \cos(2\,t + 1)$

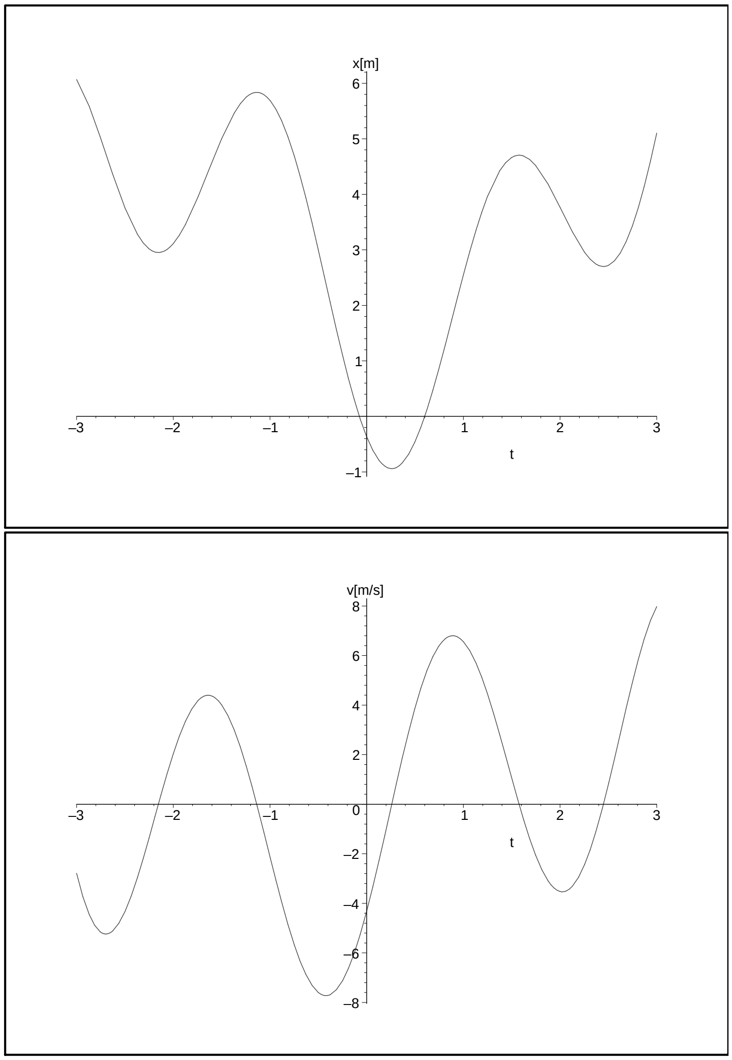


Figura 3.6: Il grafico $x(t)$ e il grafico $v(t)$ corrispondente

In modo simile a quanto fatto in precedenza per passare dal concetto di velocità media a quello di velocità istantanea possiamo definire l'*accelerazione istantanea* $a(t)$ come il limite a cui tende il valore dell'accelerazione media se $\Delta t \to 0$. In altre parole l'accelerazione istantanea all'istante generico t sarà la derivata di $v(t)$ rispetto al tempo:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \; = \; \dot{v}(t) \tag{3.9}$$

Graficamente l'accelerazione istantanea $a(t)$ rappresenta quindi il coefficiente angolare della tangente alla curva $v(t)$ nell'istante t. La sua unità di misura nel S.I. è il $[\mathrm{m/s}]^2$. Un'accelerazione costante di 5 $\mathrm{m/s}^2$ significa ad esempio che la velocità aumenta di 5 m/s ogni secondo.

Nella Fig.3.7, viene riportato il grafico dell' accelerazione dedotto dal grafico $v(t)$ nella Fig. (3.6).

Si possono fare alcune considerazioni:

a) L'accelerazione è nulla quando la velocità raggiunge i suoi valori massimi o minimi locali

b) Quando l'accelerazione è positiva (negativa), la velocità sta aumentando (diminuendo), quindi la pendenza del grafico $v(t)$ è positiva (negativa).

c) Quando l'accelerazione è positiva (negativa), il grafico $x(t)$ corrispondente è concavo (convesso)

3.5 Da x(t) ad a(t) e viceversa

Se è nota l'equazione di moto $x(t)$ di un corpo, vale a dire la sua posizione in funzione del tempo, si possono quindi ottenere la velocità e l'accelerazione corrispondenti tramite derivazione della funzione $x(t)$. Riassumendo

$$x(t) \xrightarrow{\text{derivazione}} v(t) \xrightarrow{\text{derivazione}} a(t) \tag{3.10}$$

In generale, però , è più frequente conoscere a priori l'accelerazione e dover risalire alla velocità e alla posizione. Questo perché come vedremo in seguito studiando le leggi della dinamica, quando è nota la forza che origina il movimento, si può dedurre direttamente l'accelerazione.

L'operazione inversa della *derivazione* viene chiamata *integrazione*. Vedremo ora in cosa consiste nei prossimi paragrafi.

3.5.1 Calcolo dello spostamento Δx dal grafico v(t).

Consideriamo un moto rettilineo uniforme, in cui la velocità $\bar{v}$ è costante. Lo spostamento Δx di un oggetto nell'intervallo Δt sarà dato in tal caso dal prodotto $\bar{v}\Delta t$, che è la misura dell'area del rettangolo avente per base Δt e per altezza $\bar{v}$ nel grafico di $v(t)$.

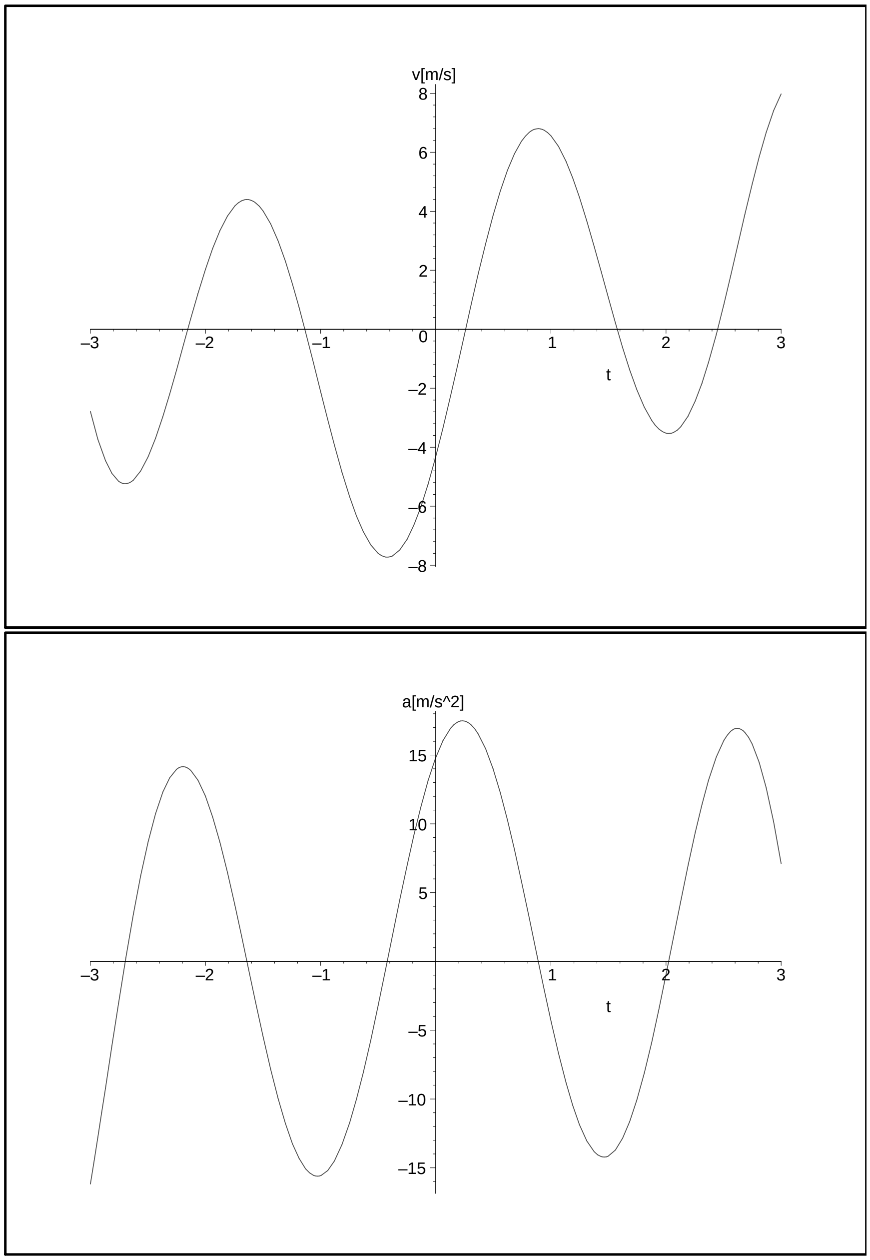


Figura 3.7: Il grafico $v(t)$ e il grafico $a(t)$ corrispondente

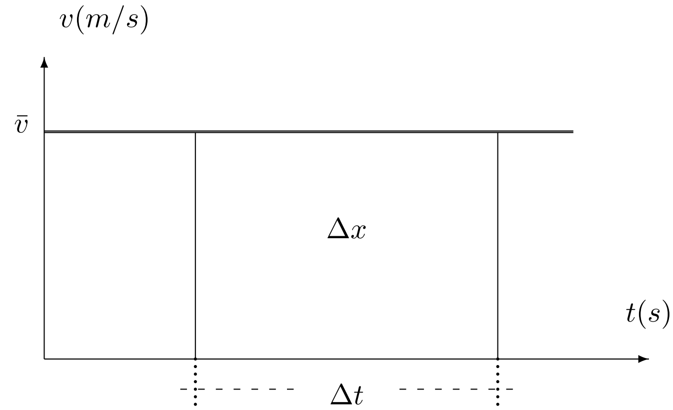


Figura 3.8: Δv quando a è costante

Verificheremo ora che l'area compresa fra la curva velocità e l'asse del tempo è sempre uguale allo spostamento Δx per qualsiasi tipo di moto. A tal scopo consideriamo il moto di un'auto A, che procede a velocità continuamente variabile. Lo spazio percorso da tale auto è solo leggermente differente da quello percorso da un'auto B, che varia a scatti la propria velocità adeguandola a quella di A e mantenendola poi costante per brevi intervalli di tempo Δt. I moti da A e B si avvicineranno sempre più l'uno all'altro più piccoli saranno gli intervalli Δt. Ora il moto dell'auto B è un susseguirsi di moti rettilinei uniformi, per cui lo spazio totale percorso da B sarà rappresentato dalla somma di tutte le aree tratteggiate dei rettangoli nella Fig(3.9). Quando gli intervalli Δt tendono a 0, tale somma coincide con l'area compresa fra la curva velocità dell'auto A e l'asse del tempo.

L'area compresa fra la curva $v(t)$ e l'asse del tempo, cioè il cambiamento di posizione Δx, come **l'integrale definito** della funzione $v(t)$ nell'intervallo compreso fra t_0 e t_1:

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt \tag{3.11}$$

Osservazioni:

a) Quando i valori di $v(t)$ diventano negativi, l'area fra $v(t)$ e l'asse del tempo diventa anche negativa, ammesso che Δt sia positivo; fisicamente ciò significa che il corpo si è spostato in direzione opposta al senso (fissato arbitrariamente) dell'asse x.

b) la posizione all'istante t_1 può essere calcolata sommando allo spostamento Δx (calcolato con la (3.11) la posizione iniziale x_0 al tempo t_0:

$$x(t_1) = x_0 + \Delta x = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt \quad . \tag{3.12}$$

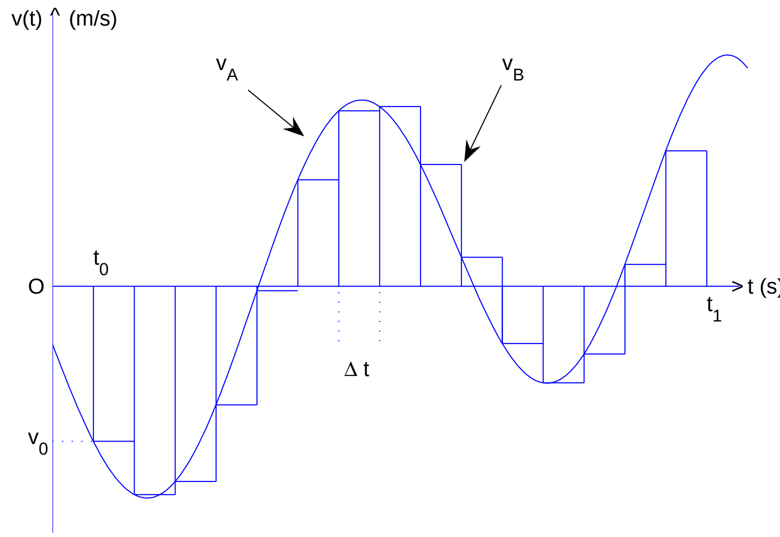


Figura 3.9: Spostamento come area sotto v(t)

3.5.2 Calcolo del cambiamento di velocità Δv dal grafico a(t)

Consideriamo il moto di un corpo con accelerazione costante nel tempo: il cambiamento della sua velocità Δv nell'intervallo di tempo Δt sarà dato in tal caso dal prodotto $a\Delta t$, che è la misura dell'area del rettangolo avente per base Δt e per altezza a nel grafico di Fig(3.10).

Con un ragionamento simile a quello fatto nel paragrafo si può dimostrare che l'area compresa fra la curva accelerazione e l'asse del tempo è sempre uguale al cambiamento di velocità Δv anche nel caso di un moto con accelerazione variabile $a(t)$. Quest'ultima può infatti essere approssimata con un'accelerazione $a_B(t)$, che sia costante per brevi intervalli di tempo Δt e che si adegui man mano alla funzione data $a_A(t)$ (vedi Fig(3.11).

La variazione di velocità nel caso B si calcolerà dunque sommando l'area dei vari rettangoli. Se gli intervalli di tempo considerati Δt tendono a zero, la funzione $a_B(t)$ approssimerà sempre meglio l'accelerazione data $a_A(t)$ e l'area dei rettangoli tenderà a quella compresa fra la curva $a_A(t)$ e l'asse del tempo. Come in precedenza si può scrivere:

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt, \tag{3.13}$$

e, conoscendo la velocità iniziale v_0 all'istante t_0, si può calcolare la velocità $v(t)$ in ogni

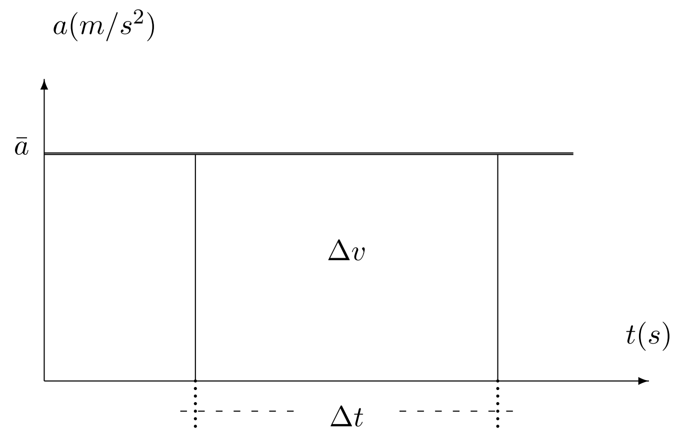


Figura 3.10: Δv quando a è costante

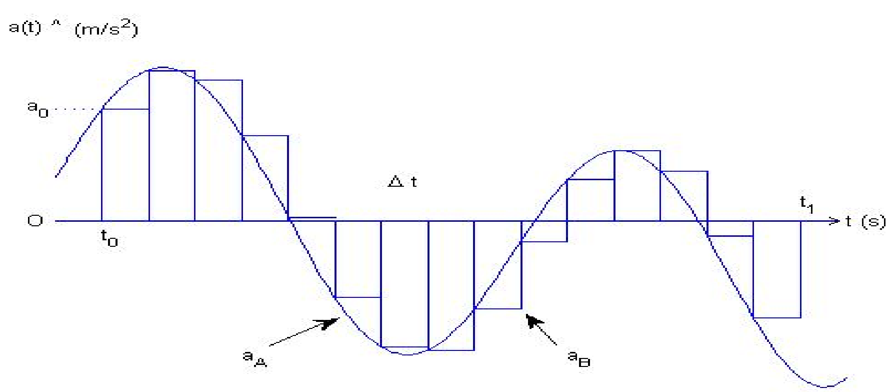


Figura 3.11: Variazione di velocità come area sotto $a(t)$

istante t_1:

$$v(t_1) = v_0 + \Delta v = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)t. \tag{3.14}$$

Analogamente alla (3.10), si può scrivere

$$a(t) \xrightarrow{\text{integrazione}} v(t) \xrightarrow{\text{integrazione}} x(t) \tag{3.15}$$

Lo schema generale può essere scritto nel seguente modo:

$$Equazione: \quad x(t) \underset{\underset{\text{integrazione}}{\xleftarrow{\int}}}{\overset{\text{derivazione}}{\xrightarrow[d]{}}} v(t) \underset{\underset{\text{integrazione}}{\xleftarrow{\int}}}{\overset{\text{derivazione}}{\xrightarrow[d]{}}} a(t)$$

$$Grafico: \quad x(t) \underset{\xleftarrow[\text{area}]{}}{\xrightarrow{\text{pendenza}}} v(t) \underset{\xleftarrow[\text{area}]{}}{\xrightarrow{\text{pendenza}}} a(t)$$

3.6 Il moto rettilineo uniforme: $a = 0$

Se la velocità v è costante, $\Delta v = 0$ e quindi l'accelerazione è a nulla. Il moto in questo caso si chiama **uniforme**.

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \tag{3.16}$$

da cui

$$x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0) \tag{3.17}$$

dove x_0 è la posizione all'istante t_0.

Perciò la posizione di un corpo in un moto uniforme è descritta da una retta la cui pendenza fornisce la velocità . L'intersezione con l'asse delle ordinate rappresenta la posizione all'istante $t = 0$.

ESEMPIO 3.2 *Su una strada rettilinea, un motorino e un auto si trovano in due punti distanti fra loro* 10 *km. Il motorino si mette in moto a velocità costante di* 30 *km/h. Mezz'ora dopo l'auto parte alla rincorsa del motorino, a una velocità costante di* 80 *km/h. Dove e dopo quanto tempo l'auto raggiunge il motorino?*

Soluzione: *Bisogna scrivere le due equazioni di moto e correlarle nello spazio e nel tempo. Il verso positivo dell'asse x corrisponde ovviamente a quello seguito dai due mezzi. Se fissiamo $x = 0$ nel punto in cui parte l'auto e $t = 0$ l'istante in cui parte il motorino, otteniamo:*

$$\begin{cases} x_m(t) = x_{0m} + v_m(t - t_{0m}) & = x_{0m} + v_m t \\ x_a(t) = x_{0a} + v_a(t - t_{0a}) & = v_a(t - t_{0a}) \end{cases} \tag{3.18}$$

Imponendo che i due veicoli si trovino nella stessa posizione, vale a dire $x_{0m} + v_m t = v_a(t - t_{0a})$, si ottiene per l'istante cercato:

$$t = \frac{v_a t_{0a} + x_{0m}}{v_a - v_m} = \frac{80 \cdot 0.5 + 10}{80 - 30} = 1\text{h} \tag{3.19}$$

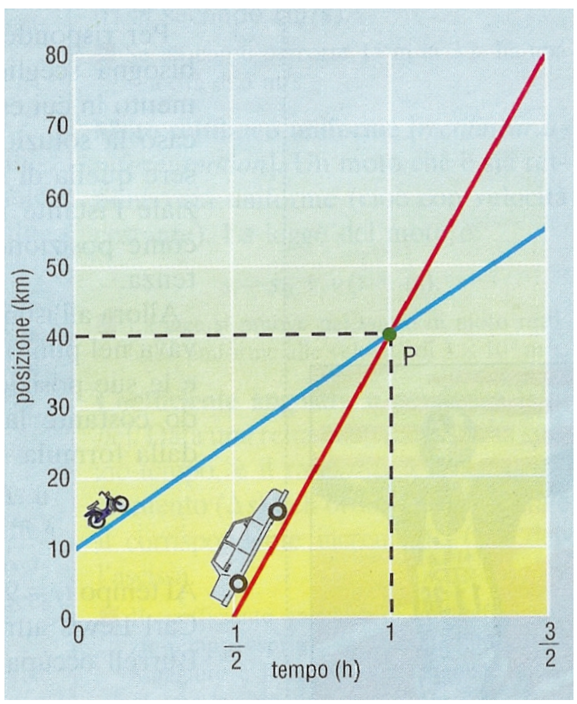


Figura 3.12: Nella figura sopra è rappresentata la soluzione grafica. L'auto raggiunge il motorino un'ora dopo la prima partenza, a una distanza di 40 km. Da notare che in questo caso è possibile utilizzare le unità di misura non SI dato che si tratta di uguaglianze.

3.7 Il moto uniformemente accelerato

Il moto di una corpo è detto uniformemente accelerato se l'accelerazione del moto è costante. In questo caso, il diagramma accelerazione-tempo è costituito da una generica retta orizzontale.

In base al significato geometrico dell'accelerazione si ottiene:

$$v_2 - v_1 = \Delta v = a(t_2 - t_1) \tag{3.20}$$

e quindi:

$$v_2 = v_1 + a(t_2 - t_1) \tag{3.21}$$

che, quando viene riferita al tempo $t = 0$ diventa:

$$v = v_0 + at_0 \ . \tag{3.22}$$

Per il moto uniformemente accelerato il grafico $v(t)$ legato all'equazione (3.22) è quindi una linea retta che interseca l'asse delle velocità in un punto con ordinata pari alla velocità iniziale v_0. Dato che la pendenza di questa retta corrisponde, a meno dei fattori di scala, all'accelerazione, se $a > 0$ il diagramma forma un angolo acuto con l'asse delle ascisse, mentre se $a < 0$ l'angolo è ottuso.

Nel seguito il moto uniformemente accelerato verrà indicato con la sigla m.u.a.

Usando il risultato generale secondo cui lo spostamento è pari all'area sotto il grafico velocità -tempo non è indispensabile usare l'integrale per calcolare lo spostamento di un corpo che si muova di moto uniformemente accelerato: infatti l'area richiesta è quella di un trapezio. Ne segue che per $t_1 = 0$ e per $t_2 = t$ lo spostamento può essere calcolato come:

$$x - x_0 = \frac{v + v_0}{2} t \tag{3.23}$$

Sostituendo al posto di v il valore $v = v0 + at$ si ottiene:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \ . \tag{3.24}$$

Dunque, la coordinata di una particella che si muove di moto uniformemente accelerato è una funzione quadratica del tempo e l'equazione (3.24) è la relazione richiesta. Il grafico $x(t)$ è quindi quello di una parabola. Nella Fig.(3.13), sono rappresentati i tre grafici $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ per il caso $a > 0$.

Usando la definizione di velocità media e l'equazione (3.23), si può dimostrare agevolmente che nel caso di moto uniformemente accelerato, la velocità media è pari alla media aritmetica tra velocità iniziale e finale, vale a dire:

$$< v >= \frac{v1 + v2}{2} \ . \tag{3.25}$$

Questo risultato può semplificare i calcoli quando si analizzano dei moti uniformemente accelerati e si conoscono le due velocità all'estremità dello spostamento. Infatti si ottiene semplicemente che:

$$\Delta x =< v > \Delta t \tag{3.26}$$

senza utilizzare l'equazione quadratica (3.24).

A volte è utile conoscere la velocità raggiunta in funzione dello spostamento compiuto. Per fare ciò , si deve eliminare il tempo dalle relazioni (3.22) e (3.24) ottenendo:

$$v = \sqrt{2a\Delta x + v_0^2} \tag{3.27}$$

dove v è la velocità alla fine dello spostamento Δx se la velocità iniziale è v_0.

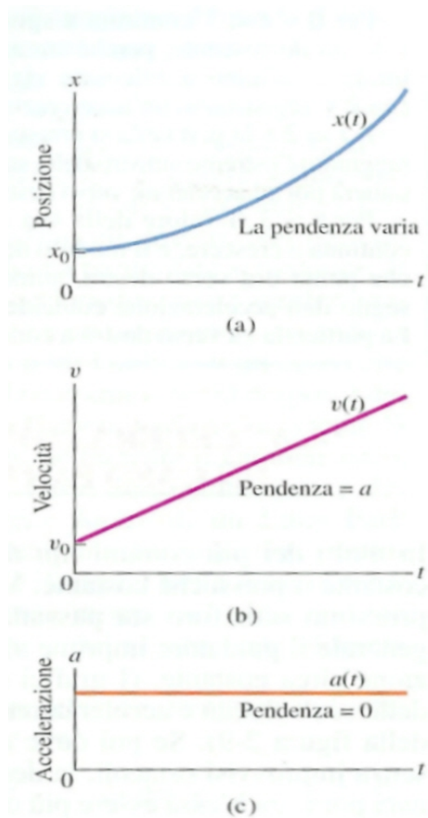


Figura 3.13: I tre grafici $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ per il caso in cui $a > 0$

ESEMPIO 3.3 ***Lo spazio di frenata:*** *un'auto sta viaggiando a 72 km/h. Se possiede una decelerazione di 8 m/s^2, in quanto metri riesce a fermarsi?*

Soluzione: *usando l'eq (3.27), basta porre $v = 0$ e risolvere rispetto a Δx. Quindi:*

$$2a\Delta x + v_0^2 = 0$$

e sostituendo $a = -8\ m/s^2$ e $v_0 = 72\ km/h = 20\ m/s$, si ottiene

$$-2 \cdot 8\Delta x + 20^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 25\ m$$

3.8 Esempio di moto non m.u.a.

Vedremo in questo paragrafo un esempio di moto in cui l'accelerazione non rimane costante nel tempo.

ESEMPIO 3.4 *Consideriamo una particella che si muove sull'asse x secondo l'equazione di moto*

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5 \; . \tag{3.28}$$

- *Quando la particella va in avanti, quando indietro?*
- *In quali intervalli di tempo, il movimento è accelerato? Decelerato?*

Soluzione: *per trovare la velocità e l'accelerazione corrispondenti, bisogna eseguire due derivate:*

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3) \tag{3.29}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 6 = 6(t-1). \tag{3.30}$$

La Fig.(3.14) mostra i tre grafici.

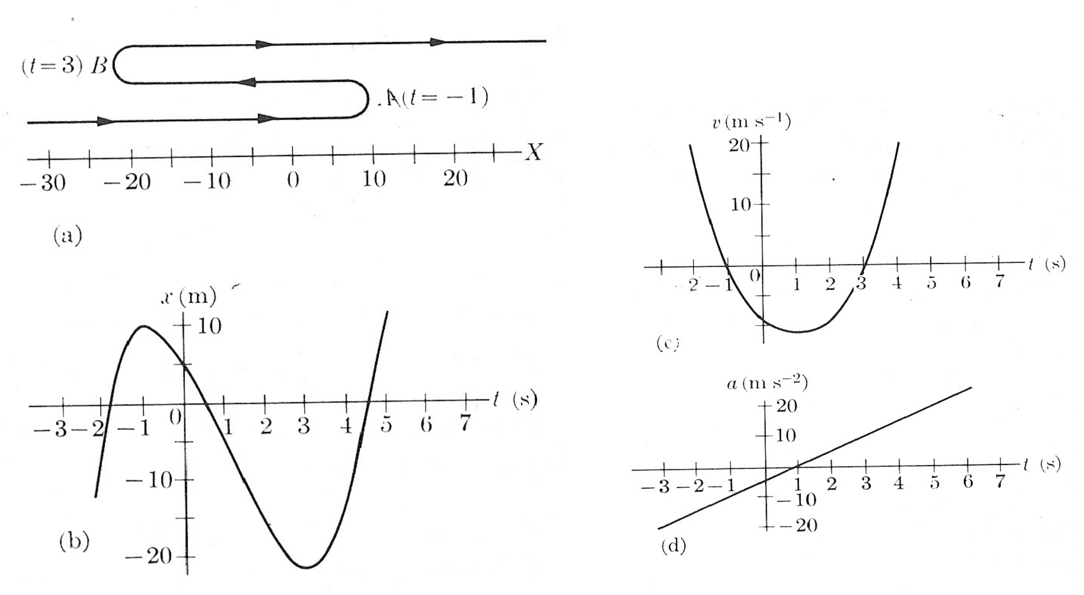


Figura 3.14: La traiettoria (a) e i grafici $x(t), v(t)$ e $a(t)$ (b,c,d) per il moto non m.u.a.

Per $-1 < t < 3$ la velocità è negativa e la particella va all'indietro.
Per $t < -1$, la particella va in avanti e si ferma a $t = 3 - 1$ in $x = 10$ per invertire la marcia. Poi in $t = 3$, la particella si ferma e inverte la marcia in $x = -22$ per continuare ad andare in avanti per $t > 3$. La Fig.(3.14a) mostra la traiettoria con i due istanti corrispondenti alle inversioni di marcia. Dal grafico (3.14d) si deduce che l'accelerazione è positiva per $t > 1$ e negativa per $t < 1$. In $t = 1$, $a = 0$ e la velocità raggiunge il suo valore minimo $v = -12$ m/s. In quell'istante, la concavità del grafico $x(t)$ cambia, come si può notare dal grafico (3.14b).

3.9 Problemi

Esercizio 1 Considera la seguente asserzione:

$\Delta x/\Delta t$ fornisce la velocità media in un intervallo di tempo. Per trovare la velocità a un determinato istante, bisogna quindi dividere la posizione a quell'istante per il tempo a quell'istante, vale a dire $v = x/t$.

Spiega cosa ritieni corretto o sbagliato, argomentando le tue supposizioni.

Esercizio 2 Un ciclista dice a un amico: Sono andato dalla località A alla località B e ho percorso una distanza uguale allo spostamento. Possiamo sicuramente dedurre che il moto è stato

A rettilineo

B uniforme

C curvilineo

D accelerato

Esercizio 3 In una gara podistica il vincitore ha percorso 27 km alla velocità media di 5 m/s.

a) Quanto tempo ha impiegato?

b) Qual è stata la velocità media dell'ultimo classificato, che è giunto al traguardo 18 minuti dopo il vincitore?

Esercizio 4 Due treni stanno viaggiando su due binari paralleli in direzioni opposte, entrambi verso una stazione S. Il treno A, che viaggia a 75 km/h si trova 25 km a est di S mentre il treno B, che viaggia a 60 km/h si trova 24 km a ovest da S.

a) Disegna i grafici della velocità e della posizione in funzione del tempo per entrambi i treni

b) Dopo quanto tempo e in quale punto si incrociano (se non si fermano in S!)?

Esercizio 5 Nella seguente tabella, vengono fornite le posizioni di due treni A e B per cinque istanti successivi. I treni si stanno muovendo su due binari paralleli e le posizioni date sono relative a una stazione, che viene quindi prese come origine per la coordinata.

tempo	t [sec]	4	14	22	36	50
treno A	x_A $[m]$	500	250	50	-300	-650
treno B	x_B $[m]$	-520	-320	-160	120	400

a) Riporta sullo stesso grafico cartesiano i dati forniti dalla tabella per i due treni

b) Quale dei due treni andava più velocemente? Fornisci le due velocità in km/h.

c) In che istante si trovano affiancati?

Esercizio 6 Un'automobile, inizialmente ferma, si muove con accelerazione costante di 3 m/s^2. Qual è l'equazione corretta per la descrizione del moto? Motiva con cura la tua risposta.

$\boxed{\mathbf{A}}$ $v = 3\ t$

$\boxed{\mathbf{B}}$ $v = 3\ t^2 + 3$

$\boxed{\mathbf{C}}$ $v = \frac{3}{2}\ t^2$

$\boxed{\mathbf{D}}$ $v = \frac{3}{2}\ t^2 + 3$

Esercizio 7 Un ciclista che sta viaggiando alla velocità di 36 km/h, in prossimità del traguardo, accelera in modo uniforme e vi giunge in 10 secondi alla velocità di 45 km/h.

a) Con quale accelerazione è scattato il ciclista?

b) Disegna il grafico della velocità in funzione del tempo

c) Quanto era la distanza dal traguardo al momento dello scatto

---

Esercizio 8 I dati tecnici di un'automobile da corsa forniscono la seguente informazione: Percorre il chilometro con partenza da fermo in 24 secondi.

a) Calcolare l'accelerazione (in $\mathrm{m/s^2}$) supponendo che sia costante, e la velocità (in km/h) raggiunta dopo i 24 secondi.

b) Qual è il rapporto fra l'accelerazione di gravità e quella calcolata?

Esercizio 9 Una persona deve attraversare un corso d'acqua largo 40 m. La barca in suo possesso ha un motore che può fornire un' accelerazione di 1 $\mathrm{m/s^2}$ e la velocità massima raggiungibile è di 18 km/h. Quanto tempo impiega a toccare la riva opposta?

Esercizio 10 Un motociclista viaggia a 90 km/h superando il limite di velocità . Un auto della polizia parte da ferma e la insegue con accelerazione costante pari a 2 $\mathrm{m/s^2}$.

a) Disegna il grafico della velocità in funzione del tempo per la moto el'auto

b) Dopo quanto tempo e a quale distanza la polizia raggiunge il motociclista?

c) Qual è la velocità dell'auto quando essa raggiunge la moto?

d) Disegna un grafico della posizione in funzione del tempo per la moto e l'auto

---

Esercizio 11 Un'automobile sportiva parte da ferma con un'accelerazione pari a $a = 8\ \mathrm{m/s^2}$ e raggiunta una certa velocità , prosegue di moto rettilineo uniforme. Se percorre 400 m in 10 sec, calcolare

a) dopo quanto tempo smette di accelerare;

b) qual è la velocità massima che raggiunge.

Esercizio 12 La posizione di un carrello (di massa 400 gr.) su di un binario rettilineo è data per i primi cinque secondi dalla seguente equazione di moto (con t in secondi e x in metri):

$$x(t) = t^2 - 4t + 5 - 4\ln(t + 1)\ , \quad t \leq 5$$

Dal quinto secondo, la forza scompare e il carrello prosegue a velocità costante.

a) Scrivi le equazioni relative alla velocità e all'accelerazione per $t \leq 5$ e per $t > 5$.

b) Trova gli istanti in cui il carrello passa davanti all'origine.

c) Determina in modo esatto la posizione e l'accelerazione istantanea quando il carrello è fermo.

d) Quanto spazio percorre nei primi cinque secondi? Di quanto si sposta?

e) Dove si trova dopo 7 secondi?

3.9.1 Qualche Soluzione

Soluzione 2: Risposta A

Soluzione 3: a) 1 h 1/2 ; b) 4.17 m/s

Soluzione 6: Risposta A

Soluzione 7: a) 0.25 m/s^2 ; c) 112.5 m

Soluzione 8: a) 3.47 m/s^2 300 km/h ; b) 2.83

Soluzione 9: 10.5 sec

Soluzione 11: a) $5,37$ s; b) $154,6$ km/h.

Soluzione 12: b) $t = 0.82$ e 4.40 sec; c) $x = -3.76$ m, $a = 2,31$ m/s^2; d) $\Delta x = -2.17$ m, $\Delta s = 15.36$ m; e) $x(7) = 13.5$ m.

Capitolo 4

Moto in due e tre dimensioni

4.1 Introduzione

Quando si passa da un moto rettilineo a un moto in due o tre dimensioni, lo spostamento, la velocità e l'accelerazione diventano grandezze vettoriali a tutti gli effetti. Non basta più il modulo della grandezza assieme al segno per definire la direzione, ma bisogna scrivere esplicitamente il vettore corrispondente.

Per definire lo spostamento di un corpo, bisognerà quindi indicare di quanto si sposta e in quale direzione (e verso) nello spazio questo spostamento avviene.

ESEMPIO 4.1 *Un auto percorre 3 km verso Est e in seguito 4 km in direzione N 30^o E. Si vuol sapere quanto vale lo spostamento risultante?*

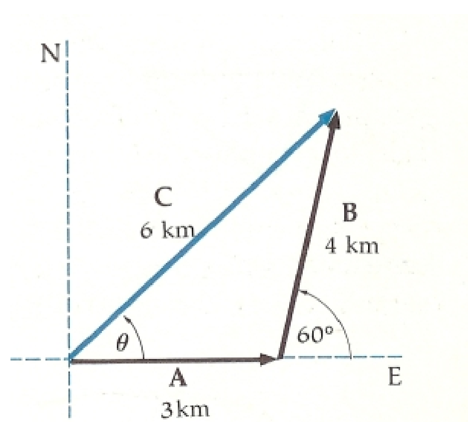
Soluzione: *Tenendo conto del fatto che la direzione N 30^o E corrisponde a un angolo di 60^o rispetto all'orizzontale, si può scrivere che:*

$$\Delta\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta\vec{r}_2 = 4\begin{pmatrix} \cos 60^o \\ \sin 60^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

per cui

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Risulta quindi che lo spostamento è pari a $\Delta r = \sqrt{25+12} \sim 6.08m$, mentre la direzione è data da $\tan^{-1}(2\sqrt{3}/5) = 35^o$, vale a dire N 55^o E.



Lo stesso discorso vale per i vettori velocità $\vec{v}$ e $\vec{a}$, che vengono affrontati nel prossimo paragrafo.

4.2 I vettori velocità e accelerazione

Analogamente al caso unidimensionale, il vettore *velocità media* è definito come il rapporto fra il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ e il tempo impiegato Δt. Per cui:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{4.3}$$

Si può notare dalla figura (4.1) che il modulo del vettore spostamento non è uguale allo spazio percorso Δs misurato lungo la curva, anzi gli è sempre minore o uguale. Il vettore *velocità istantanea* è definito come il valore limite a cui tende il vettore velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero; la direzione è quella della tangente della curva percorsa dalla particella.

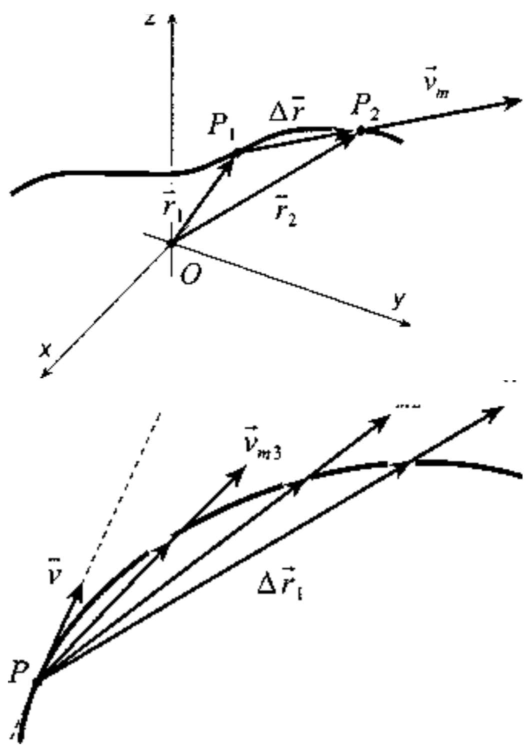


Figura 4.1: La velocità media e quella istantanea

La velocità di un corpo è naturalmente misurata rispetto a un certo sistema di coordinate. Questo sistema può però essere in moto rispetto a un altro sistema di coordinate. Ad esempio supponiamo di nuotare con velocità $\vec{v}$ rispetto all'acqua ferma, ma in realtà stiamo nuotando in un fiume che scorre a velocità $\vec{v}_f$ rispetto alla riva. La velocità rispetto alla riva risulta essere la somma delle due velocità , vale a dire:

$$\vec{v}_t = \vec{v} + \vec{v}_f \tag{4.4}$$

Il vettore accelerazione media è definito come il rapporto fra la variazione del vettore velocità Δv e il tempo impiegato Δt:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{4.5}$$

Il vettore *accelerazione istantanea* è il limite del rapporto (4.5) quando l'intervallo di tempo tende a zero. E' molto importante notare che nel vettore velocità possono variare sia il modulo che la direzione. Dato che l'accelerazione è legata alla variazione di velocità , un corpo può muoversi con modulo costante (il tachimetro segna sempre la stessa velocità) e ciononostante accelerare se varia la direzione del vettore velocità . Un caso importante è il moto circolare che verrà analizzato ora.

4.3 Il moto circolare uniforme

4.3.1 L'accelerazione centripeta

Come primo esempio di moto bidimensionale, analizziamo il **moto circolare uniforme** in cui un corpo si muove su un cerchio o su un arco di cerchio a velocità costante. Benché la sua velocità scalare non vari, il corpo in verità accelera! Infatti, come abbiamo visto, $\vec{v}$ è un vettore quindi se cambia anche soltanto la sua direzione, significa che siamo in presenza di un'accelerazione. Usiamo la figura (4.2) per trovarne l'intensità e la direzione.

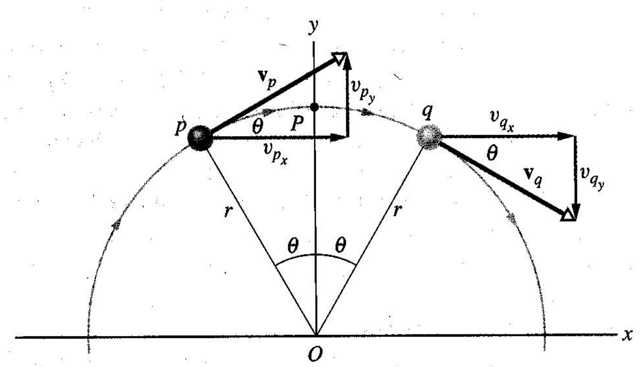


Figura 4.2: Una particella si muove di moto circolare uniforme a velocità scalare v costante su un cerchio di raggio r. Sono indicate le sue velocità $\vec{v}_p$ e $\vec{v}_q$ e le rispettive componenti, nei punti p e q equidistanti dall'asse y.

Questa figura rappresenta una particella in moto circolare uniforme a velocità scalare v su un cerchio di raggio r. I vettori velocità sono tracciati in due punti, p e q simmetrici rispetto all'asse y. Questi vettori, $\vec{v}_p$ e $\vec{v}_q$ hanno uguale modulo v ma, dato che giacciono in diverse direzioni, sono due vettori diversi. Le loro componenti secondo le direzioni x e y sono date da:

$$\vec{v}_p = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix} \;, \qquad \vec{v}_q = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ -v\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Il tempo impiegato dalla particella per spostarsi da p a q alla velocità scalare costante v risulta

$$\Delta t = \frac{\widehat{pq}}{v} = \frac{r \cdot 2\theta}{v} \tag{4.7}$$

in cui $\widehat{pq}$ è la lunghezza dell'arco compreso fra p e q. La variazione di velocità è data da:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_p - \vec{v}_q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

per cui possiamo calcolare le componenti dell'accelerazione media $\vec{a}_m$ che subisce la particella spostandosi da p a q.

Dall'equazione (4.8), la componente orizzontale è nulla e rimane solo la componente verticale. Con (4.7), si ottiene perciò :

$$(a_m)_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\frac{2v\sin\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \;. \tag{4.9}$$

Il segno meno indica che l'accelerazione media è diretta verticalmente verso il basso, cioè verso il centro O del cerchio.

Facciamo ora diminuire l'angolo θ nella figura (4.2) fino a farlo tendere a zero. Questo implica che i punti p e q si avvicinano fino a coincidere con il loro punto medio, indicato con P in alto al cerchio. L'accelerazione media $\vec{a}_m$, della quale qui sopra abbiamo appunto trovato le componenti, tenderà quindi al valore dell'accelerazione istantanea $\vec{a}$ nel punto P. La direzione dell'accelerazione media rimane invariata al diminuire di θ. Per trovare l'intensità dell'accelerazione istantanea, basta osservare che, mentre per θ che tende a 0, il rapporto $\sin\theta/\theta$ tende a 1. Si ottiene perciò :

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{4.10}$$

In conclusione:

Quando vediamo una particella che si muove a velocità (scalare) costante v su un cerchio di raggio r, possiamo affermare che possiede un'accelerazione, diretta verso il centro del cerchio, avente modulo v^2/r.

Inoltre, mossa da questa accelerazione a velocità costante, la particella percorre l'intera circonferenza (pari a $2\pi r$) nel tempo

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.11}$$

È questo il cosiddetto periodo di rivoluzione, o semplicemente *periodo* per il moto in oggetto. In generale si può definire il periodo come il tempo necessario a un corpo per percorrere una traiettoria chiusa esattamente una volta.

Nel moto circolare, molto importante è pure la *velocità angolare* ω definita come l'angolo sotteso al secondo, cioè

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{4.12}$$

Dato che $\Delta l = r\Delta\alpha$ e quindi $\omega = v/r$, si deduce che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4.13}$$

.

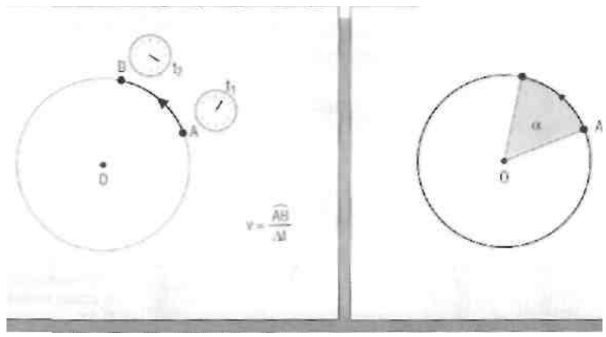


Figura 4.3: Velocità periferica e angolare

4.3.2 Le equazioni di moto

Usiamo il moto circolare per affrontare il caso di equazioni di moto in più di una dimensione. Questo permetterà di generalizzare il risultato ottenuto nel paragrafo precedente. Supponiamo di trattare un corpo si trova in $(R, 0)$ $(\phi = 0)$ all'istante $t = 0$ e viaggia sul cerchio a una velocità v.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\phi(t) \\ R\sin\phi(t) \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

In un periodo T, il corpo compie un angolo 2π (un giro completo). Perciò in un tempo t, compie un angolo $\phi = 2\pi t/T = \omega t$. Sostituendo in (4.14), si ha:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega T) \\ R\sin(\omega T) \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Deriviamo ora le componenti di $\vec{r}(t)$ per ottenere i vettori velocità e accelerazione istantanei. Per la velocità :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega R\sin(\omega T) \\ \omega R\cos(\omega T) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -\sin(\omega T) \\ \cos(\omega T) \end{pmatrix} . \tag{4.16}$$

L'ultima espressione mostra che si tratta di un vettore tangente al cerchio di lunghezza v. Per l'accelerazione:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega^2 T^2 R\cos(\omega T) \\ -\omega^2 T^2 R\sin(\omega T) \end{pmatrix} = \omega^2 T^2 R \begin{pmatrix} -\cos(\omega T) \\ -\sin(\omega T) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Perciò dall'ultimo termine dell'uguaglianza, si può vedere che $\vec{a}$ è dato da $\omega^2 R$ moltiplicato per il versore diretto verso il centro che si muove assieme al corpo. Quindi:

$$a = \omega^2 R = \frac{\omega^2}{R^2} R = \frac{v^2}{R} \tag{4.18}$$

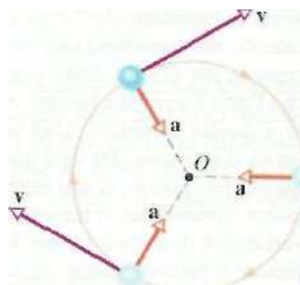


Figura 4.4: Vettori velocità e accelerazione per una particella in moto circolare uniforme.

La figura (4.4) mostra la relazione fra i vettori velocità e accelerazione in diversi momenti durante il moto uniforme circolare. Entrambi hanno intensità costante nel corso del movimento, ma le loro direzioni cambiano continuamente. La velocità è sempre tangente al cerchio nella direzione del moto; l'accelerazione è sempre diretta radialmente verso il centro. Per questo motivo, l'accelerazione associata con il moto uniforme circolare si chiama **accelerazione centripeta** (ossia 'che tende al centro').

4.4 Il moto dei proiettili

4.4.1 Descrizione

Con il moto dei proiettili (detto anche moto dei gravi), si intende un corpo che si muove sotto l'influsso dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$ costante diretta verso il centro della Terra.

Come è noto, l'accelerazione g è indipendente dalle caratteristiche dell'oggetto quali la massa, la densità , la forma; è la stessa per qualsiasi oggetto. Questo fatto si può vedere in modo evidente nella Fig.(4.5): nel vuoto, una mela e una piuma subiscono la stessa accelerazione.

Al livello del mare, nelle latitudini medie (45^o), g vale approssimativamente 9.8 m/s^2. Per lo schiacciamento ai poli, g varia da 9.79 a 9.83 m/s^2. L'approssimazione con g costante si può applicare per quote non troppo elevate (qualche chilometro).

Come primo esempio, osserviamo una fotografia stroboscopica (4.6) di due palle da golf, una lasciata cadere da fermo e l'altra sparata orizzontalmente da un meccanismo a molla.

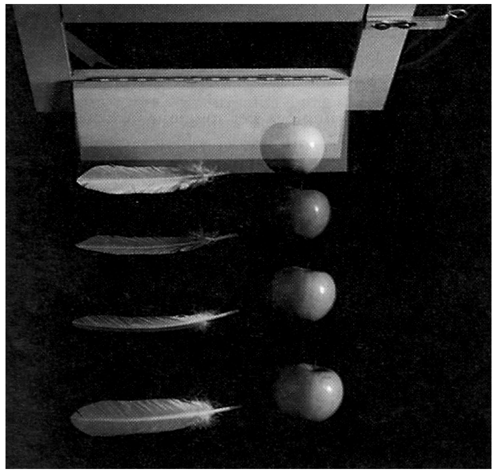


Figura 4.5: Una mela e una piuma in caduta libera nel vuoto

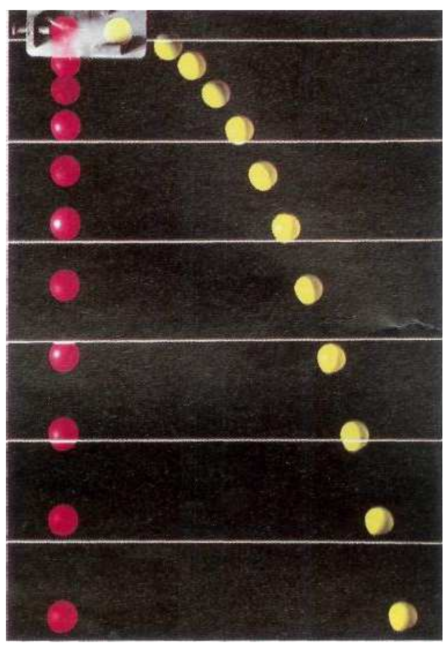


Figura 4.6: Una palla è lasciata cadere da ferma nello stesso istante in cui un'altra è sparata orizzontalmente verso destra. I loro moti verticali sono identici.

Come si può facilmente notare, il loro moto verticale è identico, visto che ciascuna copre la stessa distanza verticale nello stesso intervallo di tempo. *Il fatto che una delle due si muova orizzontalmente mentre cade non ha alcun effetto sul suo moto verticale.* Quindi, in assenza di resistenza dell'aria, si può affermare che se si sparasse una fucilata orizzontalmente e contemporaneamente si lasciasse cadere un proiettile dalla stessa altezza, i due proiettili toccherebbero il terreno nello stesso istante.

Figura 4.7: La componente verticale della velocità di questo virtuoso dello *skate-board* varia, ma non la componente orizzontale, che coincide con la velocità dell'attrezzo, che rimane quindi sempre verticalmente sotto di lui, consentendogli di proseguire la corsa dopo un felice atterraggio

La figura (4.8) rappresenta invece lo schema di un noto esperimento noto anche come monkey gun. Si vede una cerbottana G che usa una pallina come proiettile. Il bersaglio è una lattina trattenuta da un magnete M, contro la quale è puntato a vista il tubo della cerbottana. Un semplice dispositivo fa sganciare la lattina dal magnete nell'istante in cui la pallina esce dalla cerbottana.

Se l'accelerazione di gravità g fosse nulla, la pallina seguirebbe la linea retta indicata nella figura (4.8) e la lattina rimarrebbe sospesa nella sua posizione anche dopo esser stata rilasciata dal magnete. Il proiettile colpirebbe quindi certamente il bersaglio.

Sappiamo, però, che g è *diversa* da zero. Ciononostante la pallina colpisce ugualmente il bersaglio! Come risulta dalla figura, durante il tempo di volo del proiettile sia questo sia il bersaglio coprono la stessa altezza di caduta h rispetto alla posizione che avrebbero avuto in

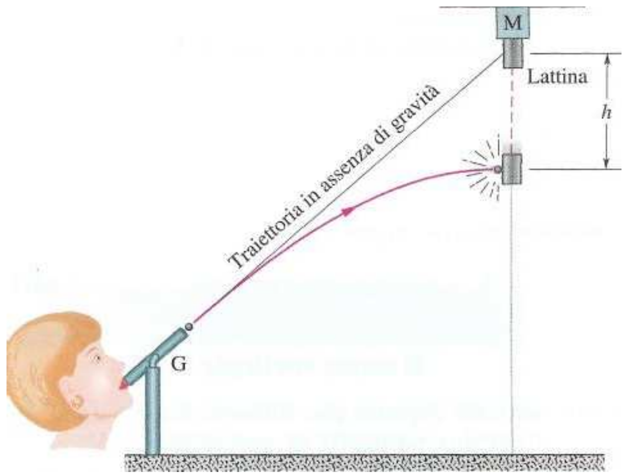


Figura 4.8: La pallina colpisce sempre la lattina. Entrambe cadono di un'uguale altezza h dal punto in cui si incontrerebbero se non esistesse l'accelerazione di gravità

caso di g nulla. E quanto più forte soffia il tiratore, tanto più veloce va il proiettile, e tanto minori sono il tempo di volo e l'altezza di caduta h dei due corpi.

4.4.2 Le equazioni di moto

Consideriamo ora una particella che si muove in due dimensioni, durante una caduta libera, con l'accelerazione di gravità g diretta verso il basso, come mostrato in figura (4.9) con una pallina di golf. Ammettiamo sempre che la resistenza dell'aria non abbia alcun effetto sul moto del proiettile.

La figura (4.10) mostra il percorso che il proiettile seguirà in queste condizioni ideali. Il proiettile è lanciato dal punto $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ con velocità iniziale v_0. Tramite l'angolo di lancio θ_0, si può esprimere il vettore velocità iniziale $\vec{v}_0$ così:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Si può notare che la componente orizzontale della velocità rimane costante mentre quella verticale varia con continuità. La *gittata* R è la distanza orizzontale che il proiettile ha coperto quando ripassa alla quota di lancio.

Durante il suo moto in due dimensioni il proiettile accelera verso il basso, e i suoi vettori di posizione $\vec{r}$ e di velocità $\vec{v}$ variano con continuità. Ma il suo vettore accelerazione a è costante ed è sempre diretto verticalmente verso il basso: il proiettile *non* possiede accelerazione orizzontale. Come si vede nella figura (4.11) l'angolo tra la direzione del vettore velocità e quella del vettore accelerazione non è costante ma varia durante il moto.

In questo moto conosciamo l'accelerazione e dobbiamo risalire alla velocità e alla posizione. Usando un sistema di coordinate come indicato in Fig.(4.10), il vettore accelerazione è dato

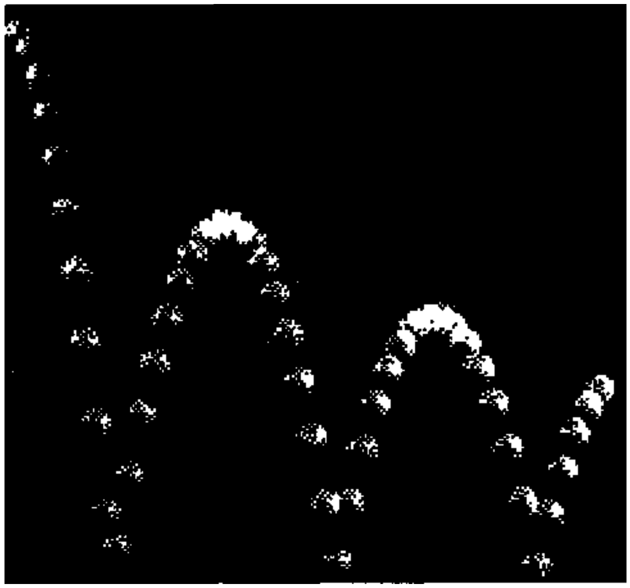


Figura 4.9: Foto stroboscopica di una palla da golf arancione che rimbalza su una superficie dura. Fra due successivi rimbalzi essa descrive le traiettorie di un proiettile.

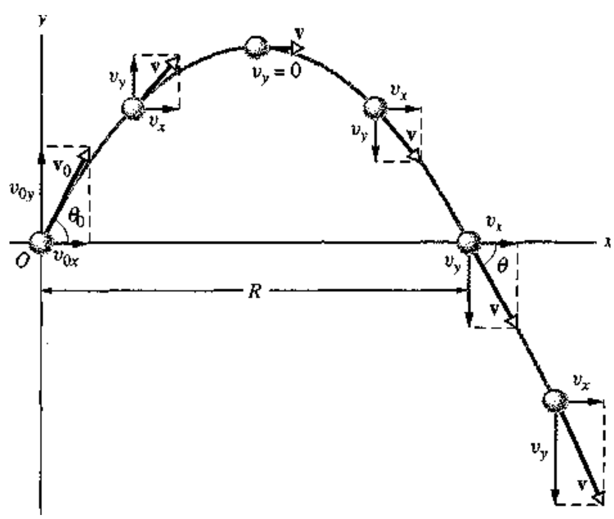


Figura 4.10: Traiettoria di un proiettile. Sono indicate, con le rispettive componenti, la velocità iniziale e le velocità in diversi punti lungo la traiettoria.

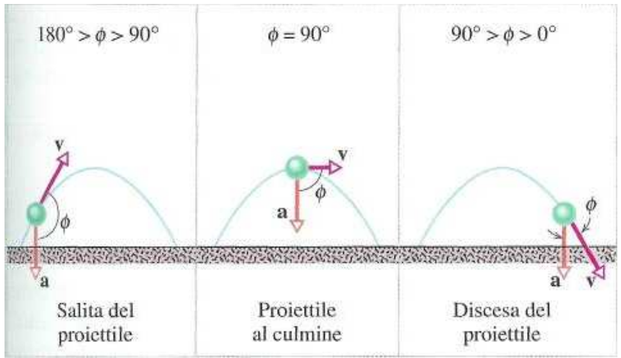


Figura 4.11: Vettori velocità e accelerazione di un proiettile in diversi istanti. Si noti che le direzioni dei due vettori non presentano alcuna relazione fissa.

da:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} . \tag{4.20}$$

Quindi abbiamo un moto rettilineo per il movimento orizzontale e un movimento uniformemente decelerato nella direzione verticale e il moto risultante sarà la composizione vettoriale dei due moti. Ponendo $x_0 = y_0 = 0$ e usando l'equazione (4.19) per la velocità iniziale, si ottiene quindi:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Con le equazioni di moto (4.21), si possono ottenere tutte le informazioni cinematiche.

4.4.3 Traiettoria, gittata

Ad esempio, la **traiettoria** si deduce dalla funzione $y(x)$ che si ottiene passando dalla forma parametrica delle equazioni a quella cartesiana, eliminando il tempo. Perciò :

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \quad \Rightarrow \quad y = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_{0x}})^2 = -\frac{1}{2}(\frac{g}{v_0 \cos\theta})\ x^2 + \tan\theta\ x \quad , \tag{4.22}$$

che corrisponde a una parabola. Il punto più alto raggiunto è il vertice della parabola: l'ascissa è data da:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \tag{4.23}$$

Questo punto si ottiene ovviamente anche dalle equazioni di moto trovando l'istante in cui la velocità verticale $v_y(t)$ si annulla, vale a dire $t_V = v_{0y}/g$. Risostituendo t_V in $x(t)$ si ottiene il valore in (4.23).

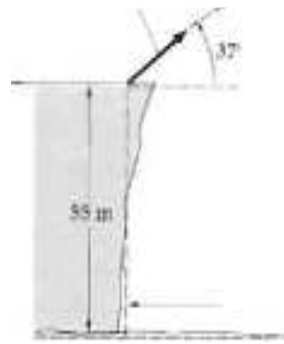
La **gittata** del lancio è definita come la distanza coperta per ricadere alla medesima quota della partenza. Si ottiene trovando l'istante $t_G \neq 0$ per il quale $y(t) = 0$. Per simmetria, il valore t_G corrisponde a $2t_V$, perciò la gittata assume il seguente valore:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) \tag{4.24}$$

Dalla (4.24), si deduce che la gittata massima si ottiene quando $\sin(2\theta) = 1$, cioè per un angolo di 45^o. Inoltre la gittata è uguale per i due angoli α e $90 - \alpha$.

Se la quota del lancio non corrisponde alla quota di arrivo, l'angolo ottimale non è più di 45^o. Nel seguente esempio, viene trattato questo caso.

ESEMPIO 4.2 *Un proiettile viene lanciato da una rupe alta* 55 *m con una velocità iniziale di* 50 *m/s e un angolo rispetto all'orizzontale di* 37^o.



a) In che punto e dopo quanto tempo il proiettile atterra?

b) Qual è la quota massima raggiunta?

c) Con quale velocità (direzione e modulo) tocca terra?

Soluzione: *Le componenti del vettore velocità iniziale sono:*

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 50\cos 37 \\ 50\sin 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

a) Bisogna risolvere l'equazione y(t)=0. Vale a dire:

$$55 + 30t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 10.65, t_2 = -1.48 \tag{4.26}$$

La distanza orizzontale è quindi data da:

$$x(t_1) = 40t = 426m \tag{4.27}$$

b) Ponendo $v_y = 0$ *si ottiene* $t = v_{0y}/g = 30/9.81 = 3.06$ *s. Quindi, la velocità media verso l'alto è 15 m/s e la quota massima è* $y = 15 \cdot 3.06 = 46m$.

c) Il vettore velocità all'impatto è dato da:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 - gt_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -74.7 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

Il modulo è $v = \sqrt{40^2 + (74.7)^2} = 84.54$ *m/s e la direzione è* $\tan^{-1}(74.7/40) = 61.83^o$ *rispetto all'orizzontale verso il basso.*

4.5 Problemi

4.5.1 Moto circolare

Esercizio 13 Durante una lezione di sci, il maestro ti dice: ... Inclina gli spigoli e piegati bene verso l'interno della curva per vincere la forza centrifuga. Alla luce di quanto imparato durante il corso di fisica, quali commenti potresti fare alla sua affermazione (a parte che non ce la fai, ecc..)?

Esercizio 14 a) Convertire 5 radianti in giri

b) Convertire 720 giri/min in rad/s

c) Un pendolo di 1,4 metri di lunghezza in un oscillazione completa descrive un arco di 29 cm. Trovare l'angolo θ in gradi e radianti, cui è sotteso l'arco descritto dal pendolo.

Esercizio 15 Una bicicletta con ruote di raggio pari a 30 cm si muove a velocità costante di 6 m/s; determinare il numero di giri che la ruota compie in 1 secondo e la sua velocità angolare.

Esercizio 16 Un trenino elettrico gira su una pista circolare di raggio 40 cm e percorre un arco di 20^0 in 2 secondi. Calcola l'accelerazione centripeta a cui è sottoposto il trenino.

Esercizio 17 Il pianeta Nettuno ruota attorno al Sole su un'orbita praticamente circolare alla distanza di $4.5 \cdot 10^9$ km. Il periodo di rivoluzione è di $164,8$ anni; trova la velocità, la frequenza e l'accelerazione centripeta in questo moto.

Esercizio 18 Da una nave che sta navigando alla sua velocità massima di 18 km/h è segnalata la caduta in mare di un uomo. Il comandante pensa a due possibilità :

i) fermare la nave e tornare indietro in linea retta sul luogo dell'incidente

ii) virare compiendo un cerchio completo a velocità costante con un'accelerazione centripeta massima applicabile di $0,5$ m/s^2.

La nave può essere fermata in 75 metri e può raggiungere nuovamente la sua velocità massima in 20 secondi. Quale delle due manovre richiede meno tempo?

4.5.2 Moto dei gravi

Esercizio 19 Discuti il problema del monkey-gun visto nel filmato in classe. Se un cacciatore mira alla scimmia su un albero mentre la scimmia si lascia cadere quando vede partire il lancio per evitare la freccia, dimostra che la scimmia verrà colpita indipendentemente dalla velocità iniziale, purchè quest'ultima sia sufficiente.

Esercizio 20 Un cannone ha un angolo di lancio pari a 45^o e spara un proiettile con una velocità di 300 m/s.

a) Che quota raggiunge il proiettile?

b) Quanto tempo resta in aria?

c) Quanto vale la gittata?

Esercizio 21 Se tirando con l'arco a 30 m si scaglia la freccia orizzontalmente mirando il centro del bersaglio, si constata che essa arriva $2,25$ m sotto il centro.

a) Quanto vale la velocità iniziale della freccia?

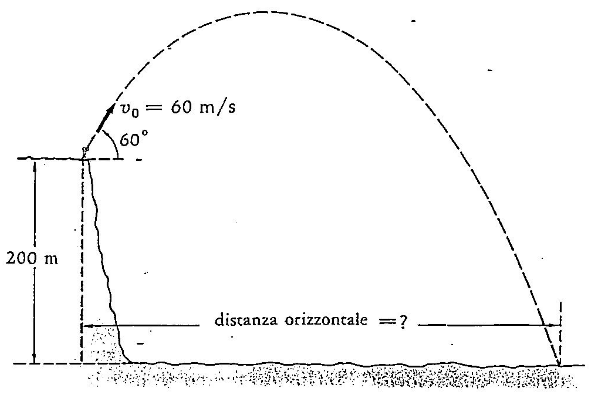
b) Per far arrivare la freccia nel centro del bersaglio come si può correggere il tiro?

Esercizio 22 Un campo da tennis è un rettangolo lungo circa $24,0$ m, largo 8 m ed è diviso da una rete alta 90 cm. La linea del servizio (entro la quale bisogna fare rimbalzare la pallina nella rimessa in gioco) dista $6,40$ m dalla rete. Si trascurino gli effetti rotatori e l'attrito dell'aria.

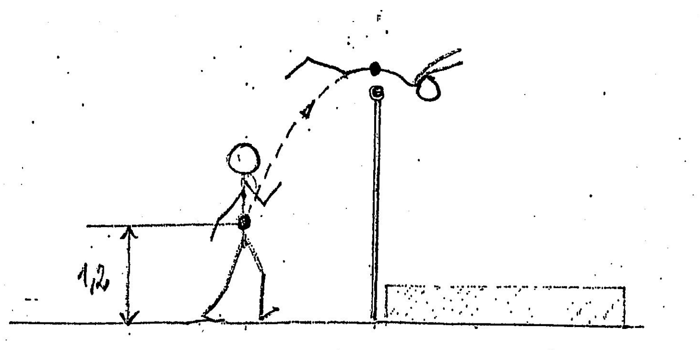
a) A quale velocità minima deve scagliare la pallina il giocatore per farla passare aldilà della rete? Supponi che il servizio venga colpito da una altezza di 2 metri orizzontalmente.

b) Il colpo precedente sarà valido? Se sì, di quanto potrà ancora aumentare la velocità del servizio il giocatore mantenendo valido il servizio?

Esercizio 23 Un proiettile viene sparato in aria dalla sommità di una rupe di 200 metri che sovrasta una pianura. La sua velocità iniziale ha un modulo di 60 m/s e forma un angolo di 60^o con l'orizzontale. Trascurando l'attrito dove e dopo quanto tempo toccherà terra il proiettile?



Esercizio 24 Un saltatore in alto il cui centro di gravità salta usando una tecnica per cui la velocità di stacco, pari a 5 m/s, forma un angolo di 62^O con l'orizzontale.



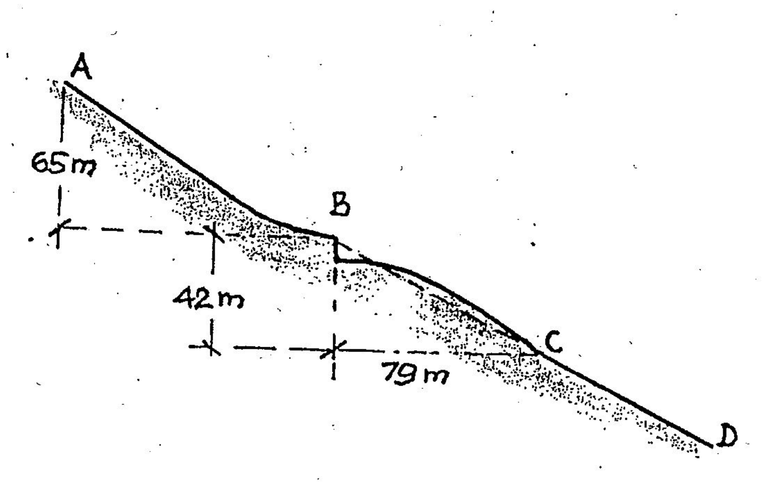
a) Se stacca a una distanza di 80 centimetri dall'asticella, che altezza riesce a superare? (Il salto è buono se passa il centro di gravità)

b) Con quale velocità (modulo e direzione) passa sopra (sotto) l'asticella? Il salto sfrutta al massimo le potenzialità dell'atleta?

c) A quanti metri dovrebbe staccarsi dalla verticale sotto l'asticella per sfruttare al massimo il salto? Che altezza potrebbe superare?

4.5.3 Misti

Esercizio 25 La figura sotto rappresenta una sezione verticale del trampolino di Engelberg e della zona di atterraggio. La lunghezza del trampolino è di 130 metri (tratto AB). Il segmento CD dove il saltatore atterra passa per il punto B.



a) Che velocità raggiunge il salatatore in stacco in B trascurando l'attrito e considerando un coefficiente di attrito pari a $\mu = 0.2$?

b) Calcola la lunghezza del salto (distanza fra B e il punto di atterraggio) se la velocità di stacco è di 26 m/s e trova la velocità con cui atterra.

Sugg: Il punto di atterraggio deve appartenere alla retta BD

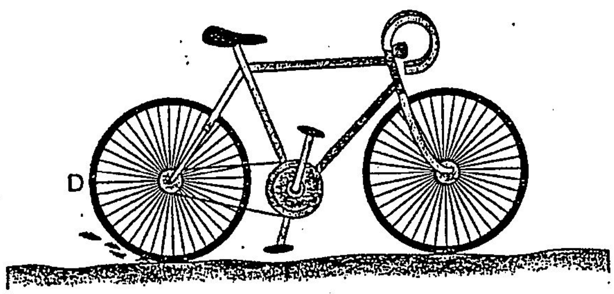
Esercizio 26 Una piattaforma circolare di raggio R=50 cm, disposta orizzontalmente, ruota con velocità angolare costante f imperniata su un asse di altezza $h = 4$ m . La piattaforma è continuamente bagnata e lancia tangenzialmente gocce d'acqua che ricadono a terra definendo un cerchio di raggio massimo pari a 150 cm. Determinare la frequenza con cui ruota la piattaforma (vale a dire i giri al secondo che compie).

Esercizio 27 Una bicicletta da corsa, priva di parafanghi (vedi figura), percorre una strada piana e fangosa alla velocità costante $v = 18$ km/h. Il raggio delle ruote è $R = 30$ cm. Dal punto D della ruota posteriore schizza in aria del fango.

Si chiede:

a) la frequenza di rotazione della ruota;

b) la velocità e l'accelerazione del punto D della ruota, in modulo, direzione e verso;



c) l'altezza massima da terra a cui giungono le particelle di fango;

d) la distanza tra il punto in cui il fango viene raccolto dalla ruota a terra e il punto in cui ricade

Sugg: la bicicletta sta andando avanti quindi non dimenticarti della velocità di traslazione !

4.5.4 Qualche Soluzione

Soluzione 14: a) 0.796 giri ; b) 75.4 rad/s ; c) 11.9^o .

Soluzione 15: $3,185$ giri; 20 rad/s

Soluzione 16: 0.0487 m/s^2

Soluzione 17: 19625.7 km/h ; $1.93 \cdot 10^{-10}$ Hz ; $6.6 \cdot 10^{-6}$ m/s^2

Soluzione 18: La manovra in linea retta: 55 sec contro 62.8 sec.

Soluzione 20: a) 2293.2 m ; b) 43.25 sec ; c) 9174.7 m .

Soluzione 21: a) 44.3 m/s ; b) Alzando di $4,3^o$ il tiro rispetto all'orizzontale.

Soluzione 22: a) 91.22 km/h ; b) Sì. Può aumentare di ca 12 km/h.

Soluzione 23: A 408 metri dalla rupe in 13.6 sec.

Soluzione 24: 2.135 m; 2.58 m/s con un angolo di 24,5^o; a 1.06 metri, salta 2.19 m.

Soluzione 25: a) 35.69 m/s, 28.87 m/s ; b) l=83 m ; v=37.97 m/s;

Soluzione 27: a) $f = 2.65$ Hz ; b) $v = 7.07$ m/s a 45^o; $a = 83.3$ m/s^2 orizzontale ; c) $h = 1.57$ m; d) $d = 5.57$ m;

Capitolo 5

Dinamica del punto materiale

5.1 Introduzione

Se notiamo che la velocità di un corpo cambia o in valore assoluto o in direzione, intuiamo che qualcosa deve aver causato quel cambiamento e che la variazione di velocità è da correlarsi a un'interazione tra il corpo e qualcos'altro che sta nelle vicinanze. Una tale interazione che imprime un'accelerazione a un corpo è detta **forza**; che nel linguaggio comune, corrisponde generalmente a un urto, una spinta, una trazione, ecc. Questa relazione concettuale tra la forza e l'accelerazione da essa provocata si deve a Isaac Newton (1642 - 1727) e lo studio di questa relazione, così come la presentò Newton, si chiama *meccanica newtoniana* o *meccanica classica*. Porremo la nostra attenzione in particolare sulle sue tre fondamentali leggi del moto.

E' bene subito chiarire che la meccanica newtoniana non si applica a tutti i casi. Come abbiamo visto in precedenza, se le velocità coinvolte nell'interazione raggiungono un'apprezzabile frazione della velocità della luce, dobbiamo sostituire la meccanica newtoniana con la teoria della relatività ristretta di Einstein, che è invece valida per qualsiasi velocità, anche prossima a quella della luce. Se i corpi interagenti hanno dimensioni su scala atomica, come gli elettroni all'interno di un atomo, la meccanica newtoniana va sostituita con la meccanica quantistica. Oggi si considera la meccanica newtoniana come un caso particolare di queste due più ampie teorie. Naturalmente rimane un caso particolare di grande importanza, visto che si applica ottimamente al moto di oggetti le cui dimensioni variano dal molto piccolo (quasi alla scala della struttura atomica) al molto grande (oggetti come galassie e agglomerazioni di galassie).

5.2 Prima legge di Newton

Originariamente si riteneva che i moti avessero luogo per l'azione di influenze esterne, o forze, mentre lo stato naturale dei corpi era l'assenza di moto; pertanto, affinché si avesse il moto di un corpo, su di esso doveva essere esercitata continuamente un'azione e, al cessare di questa, il moto sarebbe terminato. Questa idea non è totalmente priva di senso in quanto avvalorata dall'esperienza quotidiana che vede, ad esempio, la necessità di una spinta continua di un corpo su una superficie orizzontale scabra per mantenerne il moto rettilineo uniforme.

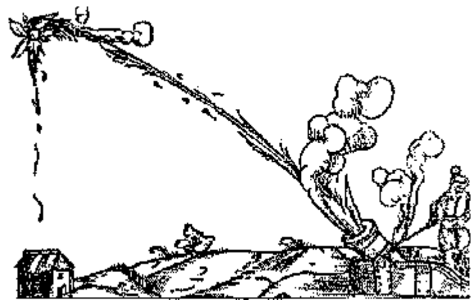


Figura 5.1: Concezione pregalileiana del moto, un corpo si muove in virtù del possesso di una proprietà detta *impeto*, all'esaurirsi dell'impeto il moto cessa.

Una efficace descrizione del moto si ebbe a partire dal XVII secolo, prima con Galileo e quindi con Newton e il valore dei loro studi sta nella capacità di separare dagli aspetti fondamentali gli elementi estranei e perturbatori presenti nell'esperienza. Nella pratica si osserva che al ridursi di questi agenti perturbatori, ad esempio attraverso operazioni di levigatura o lubrificazione, la diminuzione della velocità di un corpo lasciato a sé stesso sulla superficie orizzontale procede sempre più lentamente. È possibile pertanto estrapolare tale caratteristica affermando che qualora si potessero eliminare tutte le perturbazioni, il corpo continuerebbe a muoversi a velocità costante.

Siamo indotti a concludere che non serve una forza per mantenere un corpo in moto a velocità costante. E questo ci porta alla prima delle tre leggi di Newton sul moto. Questo principio viene così enunciato:

Consideriamo un corpo sul quale non agisce alcuna forza. Se il corpo è in stato di quiete resterà in stato di quiete. Se il corpo si sta muovendo a velocità costante continuerà a muoversi allo stesso modo.

In realtà la prima legge di Newton è un'affermazione sui sistemi di riferimento, per il fatto che definisce il tipo di sistemi di riferimento all'interno dei quali sono valide le leggi della meccanica newtoniana. Da questo punto di vista la prima legge si può anche esprimere nel modo seguente:

Se la forza che agisce su un corpo è nulla, è possibile trovare sistemi di riferimento rispetto ai quali quel corpo non subisce alcuna accelerazione

Per questo motivo, la prima legge di Newton è chiamata a volte *principio di inerzia* e i sistemi di riferimento da essa definiti sono detti *sistemi di riferimento inerziali.*

La figura (5.2) mostra come si può verificare se un particolare sistema di riferimento, ad esempio un vagone ferroviario, sia un sistema inerziale oppure no. A vagone fermo si marca sul tavolo la posizione del peso di un pendolo a riposo. Quando il vagone è in moto, il peso rimane sopra il segno *solamente* se il vagone si muove di moto rettilineo a velocità costante. Se il vagone acquista o perde velocità, o sta percorrendo una curva, il pendolo si sposta dalla

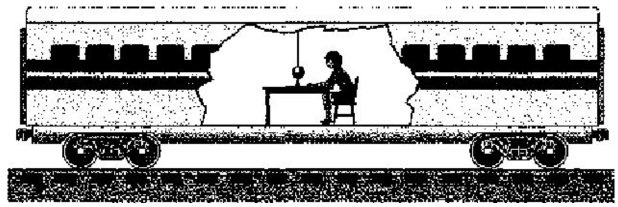
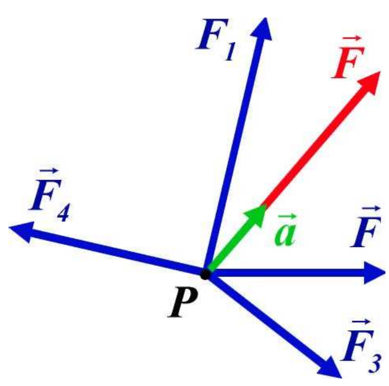


Figura 5.2: Prove su una carrozza ferroviaria per verificare se può essere considerata un sistema di riferimento inerziale.

verticale sopra il segno, e in questi casi il vagone costituisce un sistema di riferimento non inerziale.

5.3 Seconda legge di Newton: concetto di forza

Le cause che determinano una variazione della velocità di un punto materiale in un certo sistema di riferimento sono dette *forze.* Per caratterizzare completamente tale concetto occorre stabilire operativamente il criterio di uguaglianza, le regole di somma ed, infine, l'unità di misura. A tale scopo occorre riferirsi alle risultanze sperimentali. Dall'osservazione che un punto materiale, a riposo su un piano privo di elementi che ne possono alterare il moto, si muove lungo la direzione nella quale viene spinto, segue che la forza ha carattere vettoriale. Il criterio per stabilire l'uguaglianza di due forze può essere stabilito a partire dall'accelerazione che esse determinano; cioè diremo che due forze applicate successivamente ad uno stesso corpo sono uguali se ne determinano la stessa accelerazione, dove, per accelerazione, si intende il vettore accelerazione. Se invece le due forze agiscono lungo direzioni diverse si determina un'accelerazione pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che si hanno quando le due forze agiscono separatamente sul corpo.



Dalle considerazioni precedenti segue che tra la forza e l'accelerazione sussiste una relazione di proporzionalità vettoriale, cioè indicando con $\vec{F}$ la forza risultante su un corpo e con $\vec{a}$ l'accelerazione che essa ne determina, si ha:

$$\vec{F} \propto \vec{a} \quad . \tag{5.1}$$

Sperimentalmente, attraverso l'applicazione di uguali forze a corpi di differente natura, si osserva che la costante di proporzionalità dipende da caratteristiche proprie del corpo. Tale costante manifesta l'inerzia del punto materiale, in quanto stabilisce l'entità dell'accelerazione che subisce il punto materiale quando è sottoposto all'azione di una certa forza.

Questa costante di proporzionalità è detta *massa inerziale*. Indicando con m la massa inerziale, la relazione di proporzionalità (5.1) può essere espressa come:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad . \tag{5.2}$$

La relazione (5.2) prende il nome di *seconda legge di Newton* e afferma che in un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione di un punto materiale prodotta da forze applicate è direttamente proporzionale alla somma delle forze stesse e inversamente proporzionale alla massa del punto. Si osservi che, qualora $\vec{F} = \vec{0}$, dalla (5.2) segue che anche l'accelerazione $\vec{a}$ è nulla, in accordo a quanto affermato dalla prima legge di Newton; pertanto queste due leggi non sono indipendenti; tuttavia è attraverso la prima legge che si definiscono i sistemi di riferimento inerziali dove vale la seconda legge.

Si verifica facilmente che la massa è una grandezza scalare e quindi segue le leggi proprie di tali grandezze. Pertanto dalla (5.2), risulta che corpi caratterizzati dalla stessa massa conseguono un uguale accelerazione quando sono soggetti ad una medesima forza.

Per quanto concerne l'unità di misura, nel sistema *SI,* le dimensioni della forza sono quelle di una massa moltiplicata per una lunghezza diviso il quadrato di un tempo, per cui risulta:

$$[F] = \frac{kg.m}{s^2} \quad .$$

Tale quantità prende il nome di **newton** (N) e rappresenta la forza che occorre applicare ad un punto materiale di 1 kg per conferirgli un'accelerazione di 1 m/s^2 (nella direzione e nel verso della forza).

Sistema	Forza	Massa	Accelerazione
SI	newton (N)	kilogrammo	m/s^2
CGS[a]	dyne	grammo (g)	cm/s^2
Inglese	libbra	slug	ft/s^2

Tabella 5.1: Unità di misura nella seconda legge di Newton per alcuni sistemi di unità

La (5.2) è un'equazione vettoriale che, fissato un opportuno sistema di riferimento, corrisponde alle tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} \sum F_x &= ma_x \\ \sum F_y &= ma_y \\ \sum F_z &= ma_z \end{cases} \tag{5.3}$$

dove al primo membro compaiono le componenti rispetto al sistema di riferimento fissato della risultante $\vec{F}$ delle forze agenti sul corpo di massa m e al secondo membro il prodotto tra la massa di tale corpo e le componenti dell'accelerazione $\vec{a}$. L'applicazione della seconda legge richiede quindi la specificazione di tutte le forze che agiscono sul corpo attraverso il cosiddetto *diagramma delle forze.* In esso il corpo è rappresentato da un punto, e ogni forza esterna (o la forza netta $\vec{F}$) che agisce sul corpo, è rappresentata da un vettore disegnato con la coda sul punto (invece del punto si può disegnare un profilo del corpo).

5.4 Terza legge di Newton

Sperimentalmente si osserva che quando un corpo esercita una forza su di un altro, questo a sua volta esercita una forza sul primo. Tale coppia di forze è caratterizzata da essere uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso. Si può quindi affermare che:

Quando due corpi esercitano delle forze l'uno verso l'altro, queste hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto .

Questa affermazione è nota come *terza legge di Newton.* Tradizionalmente nell'interazione tra due corpi, una delle forze viene arbitrariamente denominata *azione* e l'altra *reazione,* così la legge di Newton viene comunemente espressa attraverso l'enunciato:

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

E' possibile rappresentare matematicamente tale legge considerando l'interazione tra due corpi; supponiamo che il corpo 1 eserciti una forza $\vec{F}_{12}$ sul corpo 2, allora sperimentalmente si verifica che il corpo 2 eserciterà sul corpo 1 una forza $\vec{F}_{21}$ tale che:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad ; \tag{5.4}$$

come è specificato dal diverso ordine degli indici di questa espressione, le due forze agiscono su corpi differenti. Se così non fosse, ovvero le due forze agissero sul medesimo corpo, la risultante delle forze agenti su di esso sarebbe nulla, per cui non potrebbe aversi alcuna accelerazione.

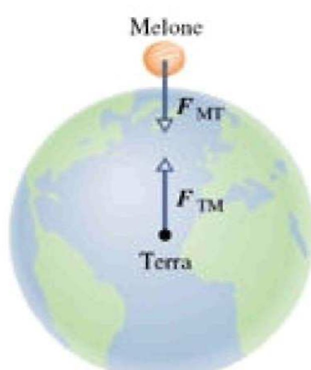


Figura 5.3: La forza esercitata dalla Terra sul melone è uguale a quella fatta dal melone sulla Terra

Per il terzo principio quindi, la forza che la Terra esercita su un corpo è uguale e opposta a quella che esso esercita sulla Terra (vedi Fig.5.3). Ma ovviamente le accelerazioni sono diverse. Vediamo il seguente esempio.

ESEMPIO 5.1 *Un ragazzo di massa $m = 50$ kg sale su un tavolo e salta giù . Calcolare, in modulo, la forza che la Terra esercita sul ragazzo e quella che il ragazzo esercita sulla Terra, l'accelerazione del ragazzo e quella della Terra.*

Soluzione:

Forza sul ragazzo : $F = mg = 490N$
Forza sulla Terra : $F_T = F = 490N$

Le forze sono uguali in modulo ma opposte, per la terza legge.

Accelerazione ragazzo: $a = \frac{F}{m} = \frac{490\ N}{50\ kg} = 9.8m/s^2$
Accelerazione Terra : $a_T = \frac{F}{M_T} = \frac{490\ N}{5.98 \cdot 10^{23}\ kg} = 8.2 \cdot 10^{-22} m/s^2$

Se le forze con cui due oggetti interagiscono avessero intensità diverse, arriveremmo a conclusioni insostenibili. Immaginiamo, per esempio, che la forza causata da una massa più grande sia maggiore di quella dovuta a una massa più piccola. Allora se prendiamo due sassi A e B di masse diverse (m_A maggiore di m_B), la forza di A su B dovrebbe essere maggiore di quella di B (che ha una massa piccola) su A. Leghiamo questi due sassi a un'automobile, uno sul cofano e l'altro sul baule, immaginando di ridurre gli attriti praticamente a zero. Poiché le due forze, per ipotesi, sono diverse, la loro somma è diversa da zero. L'automobile accelererebbe così in direzione di A, senza consumare combustibile e senza dover premere l'acceleratore. É evidente allora che, per evitare questo assurdo, le forze tra le due masse devono avere la stessa intensità (vedi Fig.5.4).

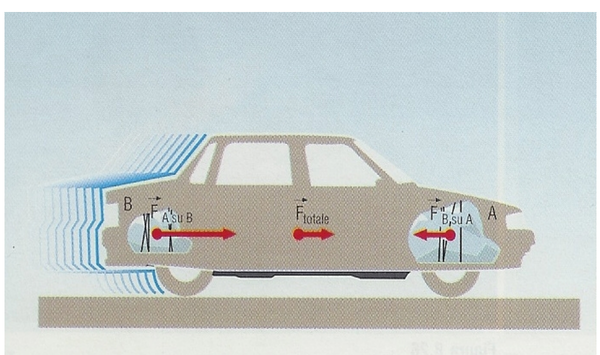


Figura 5.4: Se il terzo principio fosse falso, l'auto accelera senza carburante!

5.5 Alcune forze particolari

5.5.1 Forza Peso

Il *peso* P (o W dall'inglese weight) di un corpo è la forza che lo attrae direttamente verso un corpo astronomico vicino; nelle circostanze di tutti i giorni quel corpo astronomico è la Terra. La forza è dovuta in primo luogo a un'attrazione, detta **gravitazionale** tra le masse dei due corpi. Una descrizione più specifica di questa forza è rimandata a un prossimo capitolo. Per ora consideriamo solo situazioni in cui un corpo con massa m è situato in un punto in cui il modulo dell'accelerazione di gravità è g. In questa situazione l'intensità del vettore (forza) peso è

$$P = mg$$

Nella bilancia a bracci uguali (a sinistra nella Fig.5.5), quando l'apparecchio è in equilibrio, la massa del corpo posto sul piatto del braccio sinistro è uguale alla somma delle masse dei corpi di confronto collocati sul piatto del braccio destro.

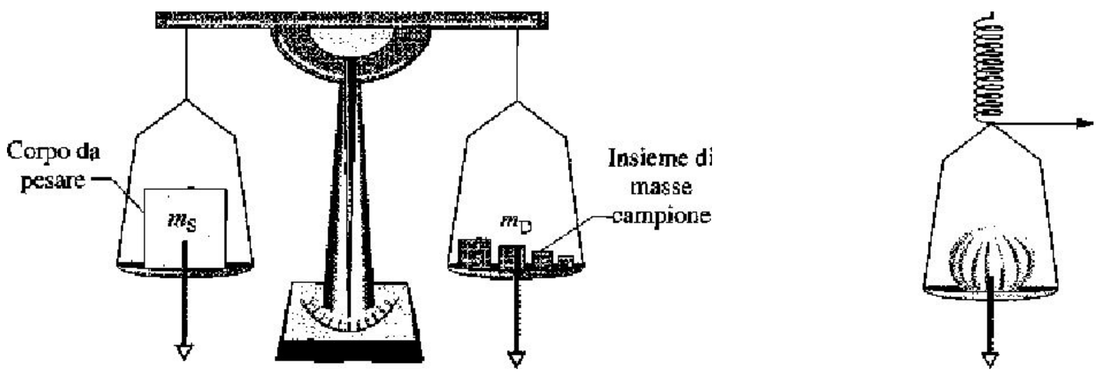


Figura 5.5: Bilancia a bracci uguali e a molla

Possiamo anche pesare un corpo con una bilancia a molla, schematicamente rappresentata a destra nella Fig.5.5. Il peso del corpo allunga una molla, spostando un indice lungo una scala, opportunamente tarata, graduata in unità di massa oppure in unità di peso. (La maggior parte delle bilance domestiche pesapersone funzionano in questo modo, dando una lettura in kilogrammi). Questo tipo di bilancia, che in realtà non misura la massa, ma la forza-peso, andrebbe chiamata più propriamente *dinamometro.* Normalmente è graduata in unità di massa ed è precisa solo se il valore di g è uguale a quello del luogo e del momento in cui la bilancia è stata tarata.

Di solito è sottinteso che il peso si misura in un sistema di riferimento inerziale. Se è invece misurato in un sistema non inerziale la misurazione ci fornisce un **peso apparente,** invece del peso reale, come vedremo nell'esempio nel paragrafo (5.6.2).

5.5.2 Tensione

Quando un filo (o una fune, un cavo, una corda o qualsiasi altro oggetto di questo tipo) è fissato a un corpo e tirato, si dice che è sotto *tensione*. Esso esercita sul corpo una forza di trazione T, applicata al punto di fissaggio del filo e orientata lungo il filo nel verso di allontanamento dal corpo, come indicato nella Fig.(fig:tensione).

Spesso si considera il filo come un oggetto *senza massa* (si considera trascurabile la sua massa in confronto alla massa del corpo) e non soggetto ad allungamento. Esso è concepito solo come un collegamento fra due corpi.

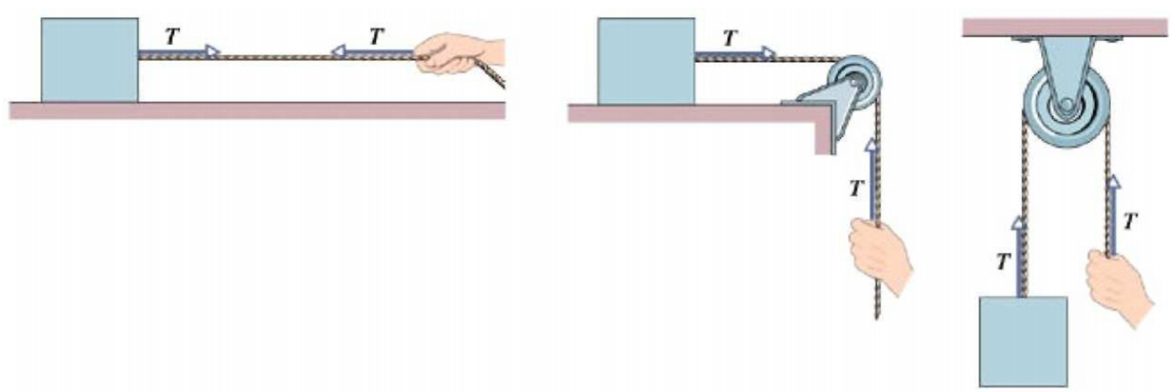


Figura 5.6: La corda è soggetta a tensione ed esercita una trazione sui corpi fissati ai due capi con una forza T (sinistra). Lo stesso vale nel caso in cui la corda scorra intorno a una puleggia priva di massa e di attrito (centro e destra).

5.5.3 Forze di contatto

Quando un corpo è compresso contro una superficie subisce una forza perpendicolare alla superficie stessa. Questa forza di contatto è detta *forza normale* N dove la parola *normale* sta per perpendicolare. Se un corpo è in stato di riposo su una superficie orizzontale come nella Fig.(5.7), N è diretta verso l'alto e ha la stessa intensità del peso del corpo $P = mg$ che è diretto verso il basso.

Più in generale, le forze che vincolano un corpo a poggiare su un altro corpo sono dette anche *forze di sostegno*. Non sono delle forze di reazione nel vero senso della parola, in quanto agiscono fino a quando sono in grado di farlo. Anche la tensione della corda vista in precedenza può essere vista come una forza di sostegno. Sia la corda, sia un tavolo reggono un altro corpo fintanto che non si rompono!

5.5.4 Forza d'attrito

La forza di attrito (detta anche semplicemente attrito) è la forza che si esercita tra due superfici a contatto tra loro e si oppone al loro moto relativo. La forza d'attrito che si

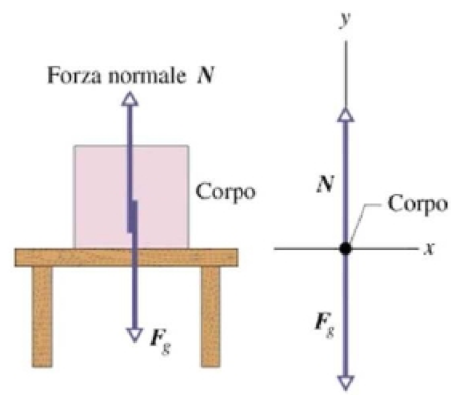


Figura 5.7: Il corpo appoggiato su un tavolo, è soggetto a una forza normale N perpendicolare al piano del tavolo. A destra il corrispondente diagramma delle forze.

manifesta tra superfici in quiete tra loro è detta di *attrito statico*, tra superfici in moto relativo si parla invece di *attrito dinamico*.

Secondo l'interpretazione classica, esistono tre diversi tipi di attrito:

- attrito radente: dovuto allo strisciamento, che avviene su superfici piane;
- attrito volvente: dovuto al rotolamento, che avviene su superfici curve;
- attrito del mezzo: relativo a un corpo immerso in un fluido.

In questo corso, ci occuperemo soprattutto della forza di attrito radente F_a, che si esercita tra corpi solidi in mutuo contatto ed è espresso dalla formula:

$$F_a = \mu \cdot F_\perp \tag{5.5}$$

dove μ è il coefficiente di attrito e $F_\perp$ è la forza di contatto.

Il coefficiente d'attrito è una grandezza adimensionale e dipende dai materiali delle due superfici a contatto e dal modo in cui sono state lavorate. Il coefficiente di attrito statico μ_s è sempre maggiore o uguale al coefficiente d'attrito dinamico μ_d per le medesime superfici. Dal punto di vista microscopico, esso è dovuto alle forze di interazione tra gli atomi dei materiali a contatto.

La forza di attrito definita dall'eq.(5.5) rappresenta la forza di attrito massima che si manifesta nel contatto tra due superfici. Supponiamo di applicare al corpo in Fig.(5.7) una forza di trazione F parallela al piano. Avremo:

- Se F è minore di $\mu_s N$, il corpo non si muove;
- se $F > \mu_s N$, il corpo inizia a muoversi;
- per valori di F ancora maggiori, l'attrito (dinamico) è sempre costante e pari a $\mu_d N$.

Superfici	μ_s	μ_d
Legno - Legno	0.5	0.3
Acciaio - Acciaio	0.78	0.42
Rame - Acciaio	1.05	0.29
Gomma - asfalto	1.0	0.8
Gomma - asfalto (bagnato)	0.7	0.6
Vetro - Vetro	0.95	0.4
Legno sciolinato - Neve	0.1	0.05

Tabella 5.2: Alcuni valori del coefficiente di attrito radente.

Nella tabella (5.2), si trovano alcune combinazioni di materiali con i relativi coefficienti di attrito statico e dinamico.

Nella figura (5.8), si può notare che l'attrito statico si oppone alla trazione impedendo il movimento fino a quando la trazione raggiunge il valore massimo. Poi, l'attrito dinamico si opporà alla trazione durante il moto.

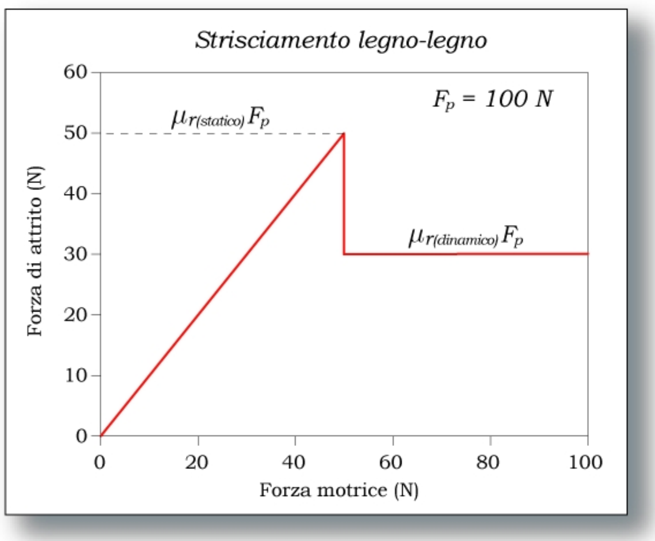


Figura 5.8: Grafico del valore della forza di attrito radente in funzione della forza applicata. Qui $F_p = 100$ N è la forza di contatto. Si noti il passaggio da attrito statico ad attrito dinamico, coincidente con l'inizio del moto del corpo.

5.5.5 Forza centripeta

Nel moto circolare (uniforme) abbiamo visto che è presente un' accelerazione centripeta a_c pari a

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

La seconda legge di Newton ci dice che se c'è una accelerazione, c'è una forza che è parallela e concorde alla accelerazione, quindi è anch'essa centripeta:

$$F_c = m\frac{v^2}{R}$$

Quindi centripeta è l'aggettivo che si dà a una forza reale (o alla risultante di forze reali) quali ad esempio l'attrito, la forza peso, la tensione di un filo, una reazione vincolare, ecc., che **determina un'accelerazione centripeta**.

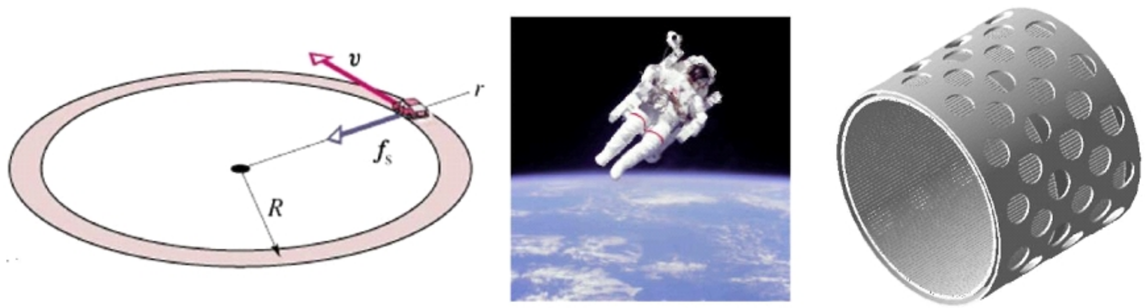


Figura 5.9: Esempi di forza centripeta

5.6 Esempi

5.6.1 Auto in curva

Un auto può compiere una curva perché è presente la forza di attrito fra le gomme e l'asfalto che funge da forza centripeta (vedi Fig.5.9 a sinistra). Senza attrito, l'auto continuerebbe per inerzia tangente al cerchio.

Ponendo quindi che $F_c = F_a$ e $N = mg$, l'equazione di Newton ci dice che:

$$F_a = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \mu_d mg = m\frac{v^2}{R}$$

da cui si ottiene per la velocità massima:

$$v = \sqrt{\mu_d \; gR}$$

Ad esempio, per $R = 30$ m e usando $\mu = 0.8$ dalla tabella (5.2), si ottiene $v = \sqrt{0.8 \cdot 9.81 \cdot 30} = 15.34$ m/s $= 55.24$ km/h.

5.6.2 Il peso in ascensore

Un uomo di massa m si trova su una bilancia fissata sul pavimento di un ascensore, come mostrato in Fig.(5.10). Quale valore indica la bilancia se l'ascensore accelera verso l'alto o verso il basso?

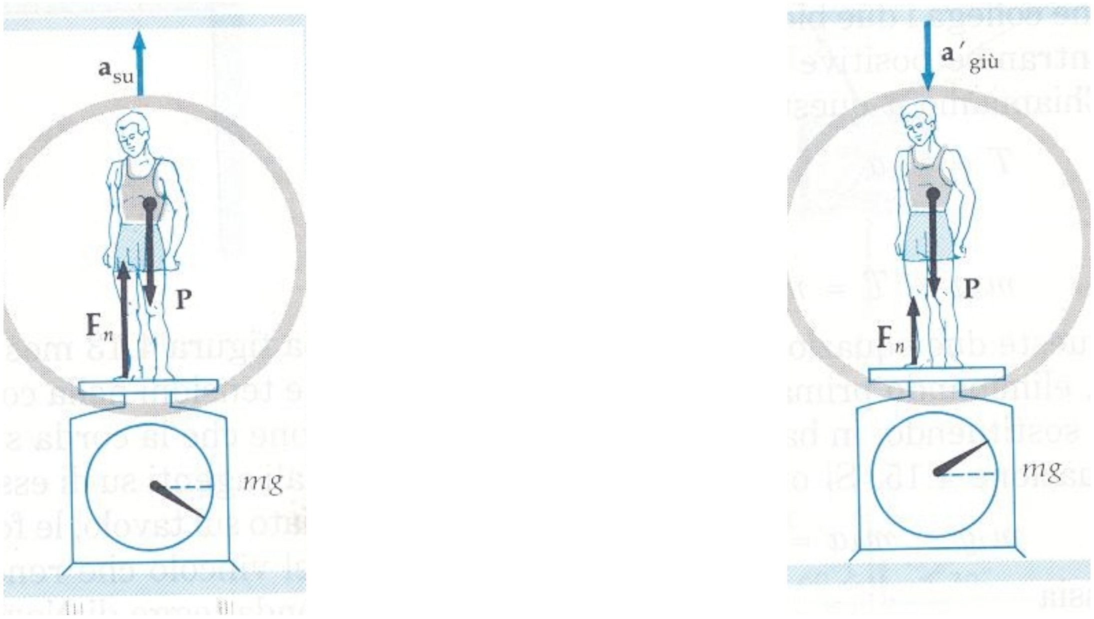


Figura 5.10: La bilancia segna il peso apparente. A sinistra, l'ascensore è accelerato verso l'alto, a destra verso il basso.

Se l'ascensore accelera verso l'alto, le forze che agiscono sull'uomo sono la forza $\vec{F_n}$ esercitata verso l'altro dal piatto della bilancia e il peso $\vec{P}$. La seconda legge di Newton fornisce quindi che:

$$F_n - P = ma \tag{5.6}$$

ossia

$$F_n = P + ma = m(g + a) \tag{5.7}$$

. La forza $\vec{F_n}'$ esercitata dall'uomo sulla bilancia per reazione fornisce il peso apparente misurato dalla bilancia, che è quindi pari in modulo a F_n e superiore al suo peso P.

Analogamente, se l'ascensore è accelerato verso il basso, ponendo la direzione positiva pure verso il basso, si ha:

$$P - F_n = ma' \tag{5.8}$$

ossia

$$F_n = P - ma' = m(g - a') \ . \tag{5.9}$$

In questo caso, il peso apparente è minore di mg. Se $a' > g$, l'uomo si staccherebbe dal piatto della bilancia e andrebbe a urtare il soffitto dell'ascensore!

5.6.3 La macchina di Atwood

Si vuole determinare l'accelerazione con cui si muovono le masse m e m' nella Fig.(5.11). Supponiamo che non vi siano attriti. Se il moto avviene in senso antiorario ($m > m'$), entrambe le masse hanno la stessa accelerazione. Le masse interagiscono per mezzo della

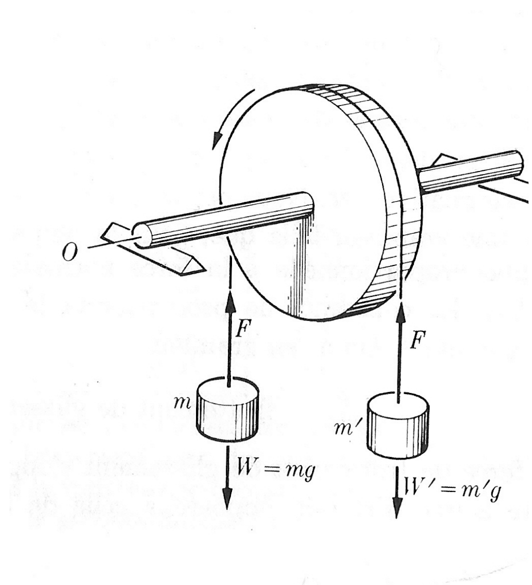


Figura 5.11: La macchina di Atwood

fune e le forze uguali e opposte che esse esercitano una sull'altra è indicata con F. Le equazioni di Newton per le due masse sono date da:

$$\begin{cases} mg - F &= ma \\ F - m'g &= ma \end{cases} \tag{5.10}$$

Eliminando F dalle due equazioni, si ottiene

$$a = \frac{m - m'}{m + m'} g \tag{5.11}$$

per la loro accelerazione comune. La tensione del filo è data da

$$T = \frac{2mm'}{m + m'} g \tag{5.12}$$

Questo dispositivo è detto *macchina di Atwood* e venne usato per determinare un valore di g usando due masse quasi uguali che rendevano l'osservazione del moto più facile.

5.6.4 L'auto in salita

Un auto si muove su una salita con un'inclinazione di 5^o (vedi Fig.5.12). Si vuole calcolare la forza F necessaria per fornire un'accelerazione a verso l'alto ponendo un attrito radente con l'asfalto pari a $\mu = 0.6$. Le forze da prendere in considerazione sono il peso P rivolto verso il basso, la forza F applicata, la forza della strada sulla auto N e la forza di attriti $F_a = \mu N$. L'equazione del moto diventa quindi:

$$F - mgsin\alpha - F_a = ma \tag{5.13}$$

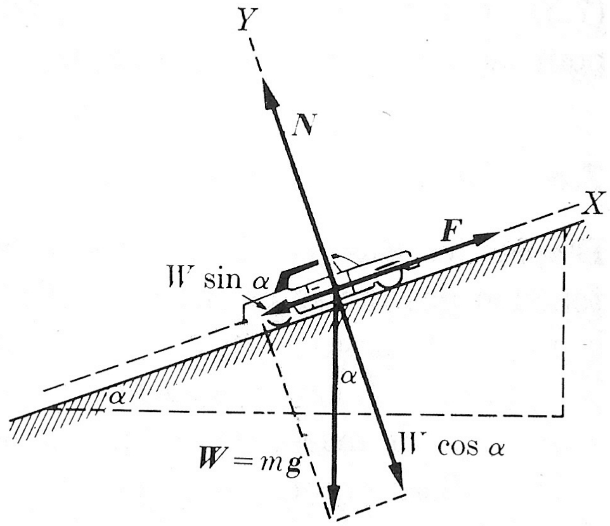


Figura 5.12: Auto in salita

Come si può vedere dalla figura, la forza di contatto è $N = mg\cos\alpha$ per cui:

$$F_a = \mu mg\cos\alpha\ . \tag{5.14}$$

La forza F è quindi:

$$F = m(a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)) \tag{5.15}$$

Se il moto avviene verso il basso bisognerà ricordarsi di invertire la direzione della forza di attrito!

5.7 Il moto oscillatorio

5.7.1 $F = ma$: un equazione differenziale

Nei precedenti paragrafi, abbiamo risolto l'equazione di Newton in casi in cui la forza e quindi anche l'accelerazione sono costanti. I moti risultanti sono di conseguenza un moto uniformemente accelerato o un moto circolare uniforme, se l'accelerazione è centripeta. Questi esempi, in cui spesso la forza principale è il peso, sono però fuorvianti perché fanno perdere di vista la vera natura della seconda legge di Newton. Infatti essa è un'equazione che lega nel caso più generale l'accelerazione (la seconda derivata della posizione) con la posizione stessa e la velocità (prima derivata della posizione).

5.7.2 Il moto oscillatorio armonico

Vediamo come primo esempio il moto oscillatorio dovuto alla forza esercitata da una molla su un corpo di massa m.

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{d} \qquad \text{(legge di Hooke)}\,, \qquad (7\text{-}37)$$

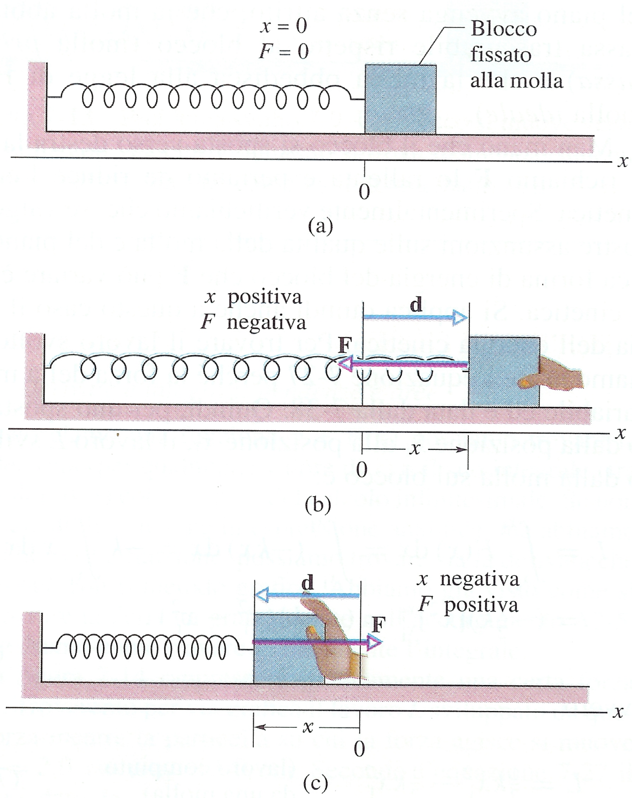


Figura 5.13: (a) molla a riposo (b) il corpo viene spostato di $\vec{d}$ e la molla si allunga di x (c) la molla viene schiacciata di una .lunghezza x

La figura (5.13a) rappresenta una molla nel suo stato di riposo (equilibrio), quando cioè non è compressa né tirata. Uno dei due capi è fisso, mentre all'altro capo, che è libero, è attaccato un oggetto assimilabile a una particella, come per esempio un blocco. Nella (5.13b) la molla viene allungata tirando il blocco verso destra. Per reazione la molla tira il blocco verso sinistra, tendendo a ripristinare il suo stato di riposo. La forza della molla è spesso chiamata *forza di richiamo*. Nella figura (5.13c) la molla viene compressa spingendo il blocco verso sinistra. Ora la molla spinge il blocco verso destra, per ripristinare anche questa volta il suo stato di riposo. Per molte molle si può ritenere, con buona approssimazione, che la forza $\vec{F}$ esercitata dalla molla è proporzionale allo spostamento $\vec{d}$ del capo libero della molla rispetto al punto in cui si trova quando la molla è in stato di riposo. La forza della molla è data dalla formula

$$\vec{F} = -k\vec{d} \tag{5.16}$$

ed è nota come legge di Hooke. Il segno meno indica che la forza esercitata dalla molla è sempre opposta rispetto allo spostamento del suo capo libero rispetto all'equilibrio. La costante k è chiamata costante della molla ed è una misura della rigidità della molla. L'unità SI per k è il N/m.

Fissando l'asse x parallelo alla molla e ponendo l'equilibrio in $x = 0$, la legge di Hooke (5.16) diventa

$$F = -kx \tag{5.17}$$

Si nota che F dipende dalla posizione del capo libero e quindi non siamo più nel caso della forza costante. L'equazione di Newton corrispondente diventa:

$$-kx = ma \tag{5.18}$$

Come si risolve l'equazione in questo caso? Il problema è dato dal fatto che sia a che x devono essere viste come funzioni del tempo, quindi l'equazione (5.18) è un'equazione fra funzioni. Anzi (5.18) va interpretato come un sistema di equazioni, vale a dire:

$$\begin{cases} ma + kx = 0 \\ \ddot{x} = a \end{cases} \tag{5.19}$$

dove $\ddot{x}$ è la derivata seconda della posizione ed è uguale all'accelerazione come abbiamo visto nel paragrafo (). Sostituendo la seconda equazione nella prima, otteniamo:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \ . \tag{5.20}$$

Bisogna perciò trovare una funzione $x(t)$ che derivata due volte ritorna su se stessa, ma cambiata di segno e moltiplicata con un fattore k/m! La soluzione più generale dell'equazione (5.20), ponendo $\omega^2 = k/m$, è data da:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ , \tag{5.21}$$

dove A e B sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali a $t = 0$ del sistema, vale a dire la posizione $x_0 = x(0)$ e la velocità $v_0 = v(0)$ che devono essere date a priori. [1] Ponendo x_m come massima estensione della molla prima di lasciarla libera di oscillare e $v_0 = 0$ dato che parte da ferma, si ottiene la soluzione particolare[2]:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t) \tag{5.22}$$

Dall'equazione (5.22), si ricava tramite doppia derivazione, la velocità e l'accelerazione del moto:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_m \ \cos(\omega t)) = -\omega \ x_m \ \sin(\omega t) \tag{5.23}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \ \cos(\omega t) \tag{5.24}$$

Dato che $\omega = 2\pi/T$, si ottiene per il periodo dell'oscillatore lineare:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.25}$$

Il sistema blocco-molla ora analizzato è un esempio di oscillatore armonico lineare, dove *lineare* sta a significare che la forza F è proporzionale alla prima potenza di x. Altrimenti si parla di oscillatore *non-lineare*. Qualsiasi sistema soggetto a una forza di richiamo proporzionale (ma opposta) allo spostamento dall'equilibrio darà luogo a un moto armonico lineare del tipo (5.21).

[1] Con la Texas TI-89/92, si ottiene la soluzione generale scrivendo: deSolve(x''+ω^2 x=0,t,x)

[2] deSolve(x''+ω^2 x=0 and x(0)=xm and x'(0)=0,t,x)

5.8 Problemi

5.8.1 Leggi di Newton

Esercizio 28 L'effetto prodotto da una forza applicata a un corpo non vincolato (vale a dire che non ci sono altre forze che agiscono) è quello di:

A aumentarne la velocità

B frenarlo

C modificarne la direzione

D mantenere il corpo in moto

E nessuna delle riposte precedenti è valida

Esercizio 29 Ponendo su un tavolo una pallina di ferro vicino a una grossa calamita, si nota che la pallina si muove verso la calamita, mentre questa non si muove verso la pallina. Per quale motivo?

A la calamita esercita una forza, la pallina no

B sia la pallina sia la calamita esercitano una forza, ma quella esercitata dalla calamita è maggiore

C la calamita incontra maggiore resistenza sul piano del tavolo

D non vale il principio di azione-reazione

Esercizio 30 Quiete, moto uniforme e moto accelerato sono tre fenomeni connessi allo studio della dinamica. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A quiete e moto accelerato possono essere spiegati col principio di inerzia

B moto uniforme e moto accelerato possono essere spiegati col principio d'inerzia

C quiete, moto uniforme e moto accelerato possono essere spiegati col secondo principio

D solo il moto accelerato può essere spiegato col secondo principio

---

Esercizio 31 Un automobilista al volante della sua auto è fermo sull'asfalto ricoperto da uno strato di ghiaccio. Nonostante provi a schiacciare il gas per partire, l'auto non si muove. Per quale motivo? (Motiva la tua scelta e le tue esclusioni)

A l'auto non è sufficientemente pesante per esercitare la forza minima necessaria sul terreno

B il terreno non riesce ad esercitare una reazione sull'auto per muoverla

C la reazione del terreno sull'auto è minore di quella che i pneumatici esercitano sul terreno

D l'auto non è sufficientemente potente

Esercizio 32 Nel lancio del martello, in quale istante l'atleta deve abbandonare la fune per riuscire il suo lancio se ruota in senso antiorario?

Risposta: a ore ....

Con quale principio della dinamica giustifichi la tua scelta?

A il primo

B il primo e il terzo

C il secondo e il terzo

D tutti e tre

Esercizio 33 Spesso, in discorsi quotidiani, si sentono affermazioni del tipo: Questo allievo ormai si sta trascinando alla fine dell'anno per forza d'inerzia. Alla luce di quanto imparato durante il corso di fisica, quale commento potresti fare all'espressione citata (a parte che non è il tuo caso, ecc..)?

Esercizio 34 Su un oggetto con massa di 2 kg, che si muove alla velocità di 7 m/s, agisce una forza di 6 N avente stessa direzione ma verso opposto alla velocità . Quanto valgono la velocità e lo spostamento dopo 3 sec? Motiva.

A 16 m/s

B 11 m/s

C -1 m/s

D -2 m/s

E nessuna delle precedenti

A 34,5 m

B 24 m

C 7,5 m

D 6 m

E nessuna delle precedenti

5.8.2 Applicazioni delle leggi di Newton

Esercizio 35 Il 12 settembre 1966, ebbe luogo un esperimento spettacolare: la massa di una capsula Agena orbitante nello spazio venne determinata misurando l'accelerazione impressagli da un razzo Gemini. Dopo che l'astronave Gemini entrò in contatto con la capsula Agena, i razzi posteriori dell'astronave regolati in modo da fornire una forza media di 890 N furono accesi per 7 sec. La variazione di velocità dell'astronave e della capsula attaccati assieme risultò di 0,93 m/s. Sapendo che la massa dell'astronave Gemini valeva circa 3400 kg, determinare quella della capsula.

Esercizio 36 Un ragazzo sta facendo girare un secchio di 500 g tenendolo legato a un filo di lunghezza 1 metro al di sopra della sua testa in un piano orizzontale. La tensione massima che può sopportare il filo è di 80 N e il sasso compie 2 giri al secondo. Due passanti osservano la scena. Il primo commenta: Se si spezza la corda, il secchio gli cade in testa. L'altro risponde: Tanto la corda non si può spezzare. Come giudichi le due affermazioni: vere o false? Motiva la risposta.

Esercizio 37 Due macchine stanno girando su una pista circolare, una all'interno e una all'esterno della corona circolare (raggi: $R_1 = 50$ m e $R_2 = 90$ m). La forza di attrito fra le gomme e la pista è costante e indipendente dal raggio e entrambi i piloti viaggiano alla velocità massima possibile. Il pilota all'interno ha una velocità di 72 km/h.

a) A quanto viaggia il pilota all'esterno?

b) Quanto valgono le frequenze con cui girano i due piloti?

c) Dopo quanto tempo e dopo quanti giri il pilota che gira più rapidamente doppierà il pilota all'esterno se al tempo $t = 0$, si trovano allineati?

Esercizio 38 Un paracadutista del peso di 70 kg scende in caduta libera per 5 secondi prima di aprire il paracadute. Se questo si apre in 0,8 secondi riducendo la velocità a 12 m/s, qual è la forza media totale esercitata dalle funi del paracadute durante quell'intervallo di tempo? Trascurare il peso del paracadute.

Esercizio 39 Un uomo è in piedi su una bilancia posta in un ascensore. Quando l'ascensore è fermo la bilancia misura 700 N. L'ascensore comincia a muoversi e durante 4 secondi la bilancia segna 900 N.

a) L'ascensore stava salendo o scendendo?

b) Qual é la sua velocità dopo i 4 secondi?

Esercizio 40 Un cavo di acciaio sostiene un carico di 300 kg che scende verticalmente alla velocità di 4 m/s. Il carico rallenta uniformemente e si ferma dopo 3 metri. Quanto vale la tensione del cavo durante la decelerazione?

Esercizio 41 Una moneta di massa $m = 40$ grammi si trova a 15 cm dal centro di un giradischi spento regolato inizialmente su 33 giri/min. Quando si staccherà l'oggetto se il coefficiente di attrito fra la moneta e il piatto è $\mu = 1,1$? Motiva la tua scelta.

A appena acceso

B passando a 45 giri/min

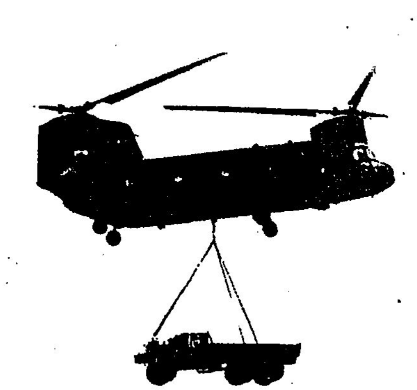
C passando a 78 giri/min

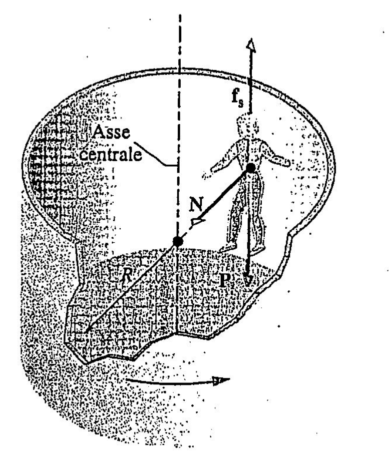
D anche a 78 giri/min la moneta non si stacca

Esercizio 42 Nella figura sotto, si vede un elicottero di massa 15′000 kg sollevare un camion di massa 4′500 kg con un'accelerazione verticale di 1.4 m/s^2. Calcolare

a) la forza totale esercitata dall'aria sulle pale dell'elicottero;

b) la tensione nel cavo superiore che sostiene il camion.





Esercizio 43 Nei Luna Park, si trovano i famosi Rotori in cui il passeggero viene posto in un cilindro rotante (vedi figura sopra). A un certo punto, il pavimento viene tolto sotto i piedi ma il passeggero rimane incollato alla parete. Se il raggio R del cilindro è di 2.1 metri e il coefficiente di attrito fra il passeggero e le pareti è $\mu = 0.40$, quale deve essere la frequenza minima di rotazione perché il passeggero non precipiti quando il pavimento sprofonda?

Esercizio 44 Il coefficiente di attrito per una cassa di 100 kg posta sul ponte di un camion è pari a $\mu = 0,8$. Per evitare una collisione, l'autista deve fermare il camion in 20 m da una velocità di 50 km/h. La cassa si sposterà sul ponte del camion?

Esercizio 45 A che altezza sale una biglia libera di muoversi all'interno di una scodella semisferica di raggio $r = 20$ cm quando questa ruota attorno al suo asse con una frequenza pari a $\nu = 200$ giri/min?

Esercizio 46 Uno sciatore passa successivamente su un dosso (raggio di curvatura R_1) e poi in un avvallamento (raggio di curvatura R_2).

a) Con quale velocità massima può passare sul dosso senza distaccarsi da terra, se $R_1 = 20$ metri?

b) Con quale velocità massima deve passare nell'avvallamento se la schiena riesce a sopportare una spinta massima di $4000N$ senza subire danni e $R_2 = 15$ metri?

Esercizio 47 Il corpo umano può sopportare senza conseguenze un'accelerazione di 9 volte superiore a quella di gravità . Se un pilota compie un loop di raggio pari a 500 m, a quale velocità massima può invertire il senso di volo al termine della picchiata?

Esercizio 48 Un corpo di massa 600 gr è fissato all'estremità di una molla con costante elastica $k = 50$ N/m e gira su una piattaforma rotante senza attriti. Prima del moto la molla all'equilibrio è lunga 50 cm mentre durante il moto, si allunga di ulteriori 10 cm.
Con quale frequenza sta ruotando la piattaforma?

Esercizio 49 Un blocco di massa $m = 2$ kg viene trascinato su un piano da una forza F con un angolo $\alpha = 30^o$ rispetto all'orizzontale. Fra il blocco e il piano vi è attrito con un coefficiente $\mu = 0.2$.

a) Quanto vale la forza applicata se l'accelerazione del blocco è pari a $g/5$?

b) Potendo modificare l'angolo di traino, quanto vale la forza minima che si potrebbe esercitare per ottenere la medesima accelerazione?

Esercizio 50 Due ragazzi devono sollevare assieme una cassa di 2 kg, tirando due funi in direzione opposta.

a) Se tirano entrambi con un angolo di 35^o rispetto all'orizzontale, quanta forza devono fare?

b) Se solo uno dei due vuole trascinare la cassa, quale forza minima dovrà esercitare per spostarla con lo stesso angolo di traino, se il coefficiente di attrito fra la borsa e il pavimento è pari a $\mu = 0.3$?

c) Potendo modificare l'angolo di traino, quanto vale la forza minima che si potrebbe esercitare per ottenere un'accelerazione pari a $g/5$?

5.8.3 Qualche Soluzione

Soluzione 28: Risposta E.

Soluzione 29: Per il terzo principio, A,B e D non vanno bene. Risposta C.

Soluzione 30: Risposta C.

Soluzione 31: Risposta B.

Soluzione 32: Ore 3. Risposta A.

Soluzione 33: L'inerzia è caratterizzata dall'assenza di forza!

Soluzione 34: Risposta D ; Risposta C

Soluzione 36: a) la velocità di uscita è tangenziale, non può cadere in verticale!; b) la tensione è di 79 N, la corda non si spezza per poco.

Soluzione 37: a) $26,83$ m/s; b) $\nu_1 = 0,0637$ Hz, $\nu_2 = 0,0474$ Hz; dopo 61,6 sec e 2,92 giri;

Soluzione 41: Non si stacca. Per staccarsi dovrebbe girare a 81 giri/min.

Soluzione 42: a)218400 N ; b) 50400 N

Soluzione 43: $\nu = 0,54$ Hz.

Soluzione 44: No, non si sposta.

Soluzione 45: $h = 17,8$ cm

Soluzione 46: a) $v = 14$ m/s; b) $v < 26.6$ m/s.

Soluzione 48: $\nu = 0,593$ Hz

Soluzione 49: 8,12 N; 7,7 N on un angolo di 11,3 ^{o}.

Soluzione 50: a) $17,1$ N; b) $F > 5.94N$; c) $9,4$ N con un angolo di $16,7^o$.

Capitolo 6

Conservazione dell'energia

6.1 Introduzione

Il concetto di energia come forza vitale che rende vivo e sano un corpo ed è insita in tutti gli elementi della natura, piante e minerali compresi ha radici antichissime. Possiamo rintracciarla già nel 5000 a.c. fra i maestri dello Yoga Indiano, con il termine sanscrito *Pra-Na*, Energia Primaria; i maestri dello Yoga cinese, nel 3000 a.c. la chiamavano *Ch'i*; gli sciamani Kahuna: *Mana*, ossia forza vitale; e nel 500 a.c. i Greci usavano il termine *Physis* per indicare l'energia vitale sottile che avvolgeva tutte le cose.

Al giorno d'oggi, il termine energia ci è più familiare se riferito alle energie conosciute dalla fisica: energia termica, elettrica, gravitazionale, magnetica, ecc. Ma anche in questi termini non è facile darne una definizione semplice e precisa. Intuitivamente, si può pensare all'energia come a qualcosa che si può trasformare ed essere utilizzato per compiere lavori utili (spostare, riscaldare, ...). Vedremo nei prossimi capitoli come affrontare l'argomento in modo più rigoroso.

6.2 Energia cinetica

In primo luogo, la fisica definisce l'**energia** come *una grandezza scalare associata allo stato di uno o più corpi*. Con il termine *stato*, si intende qui la condizione in cui si trova il corpo in questione.

Cominciamo a definire una prima forma di energia, l'**energia cinetica** E_c, che è associata allo *stato di moto* del corpo. Quanto è più veloce un corpo, tanto maggiore è la sua energia cinetica. Quando il corpo è a riposo, la sua energia cinetica è zero. Per un corpo di massa m dotato di velocità v (con $v \ll c$), si definisce l'energia cinetica come:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.1}$$

L'unità di misura SI dell'energia cinetica (come di qualsiasi altra forma di energia) è il **Joule** (J). La si ricava direttamente dalle unità di massa e velocità :

$$1\ J = 1\ kg \cdot m^2/s^2\ . \tag{6.2}$$

Un'altra unità di energia comoda quando si ha a che fare con atomi o particelle subatomiche è l'**elettronvolt**(eV):

$$1 \text{ elettronvolt } = 1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J \ . \tag{6.3}$$

6.3 Lavoro

L'energia di un corpo può variare se avviene un trasferimento di energia tra il corpo e l'ambiente circostante. Questo trasferimento può avvenire per l'intervento di una forza o per uno scambio di calore. Gli scambi di calore verranno trattati nel capitolo riguardante la termodinamica. Qui di seguito, ci occupiamo dei trasferimenti di energia dovuti all'intervento di forze, un processo che si riassume in compiere un lavoro. Come vedremo ora, nel linguaggio scientifico, il termine *lavoro* ha un significato ben preciso, ed è legato alla capacità della forza di far compiere uno spostamento al corpo su cui agisce.

6.3.1 Lavoro di una forza costante

Analizziamo ora il caso di una forza costante $\vec{F}$ applicata a un oggetto che viene spostato di un vettore $\Delta\vec{x}$. Il lavoro si definisce come:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = F \Delta x \cos\theta \ , \tag{6.4}$$

dove θ è l'angolo fra i due vettori.

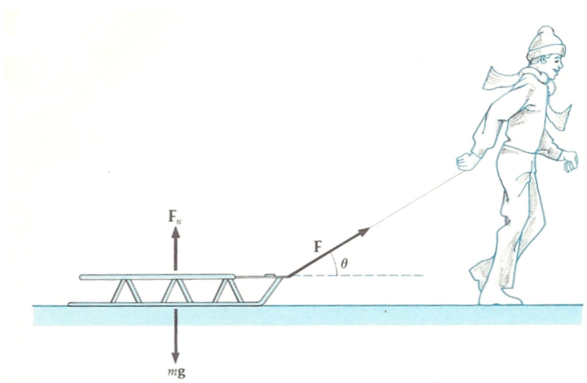


Figura 6.1: Un ragazzo che tira una slitta. Il lavoro compiuto durante uno spostamento Δx è pari a $F\Delta x \cos\theta$

Come si può dedurre da (6.4), il lavoro è una grandezza scalare ed è uguale al prodotto dello spostamento per la componente della forza lungo lo spostamento stesso. Dalla relazione (6.4), segue anche che se $\theta < 90^o$, $dL > 0$ e il lavoro si dice *motore*; se $90^o < \theta < 180^o$, allora $dL < 0$ e il lavoro è detto *resistente*. Infine se $\theta = 90^o$ risulta $dL = 0$: è il caso della forza centripeta, in cui la forza è sempre perpendicolare allo spostamento che è tangente al cerchio.

Esiste una relazione stretta fra lavoro e energia cinetica. Vediamo quale. Supponiamo che la forza F sia costante e parallela allo spostamento $\Delta x = x_2 - x_1$ per semplificare i calcoli. In caso contrario, basterà prendere al posto di F la componente parallela $F_{\parallel}$ a Δx. Le velocità in x_1 e x_2 siano rispettivamente v_1 e v_2, per cui $\Delta v = v_2 - v_1$. Con che $F = ma$, si ottiene:

$$L = F\Delta x = ma\Delta x = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta x = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta v = m\bar{v}\Delta v \tag{6.5}$$

Dato che nel moto uniformemente accelerato, $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$, si ottiene finalmente che:

$$L = m\bar{v}\Delta v = m\frac{(v_1 + v_2)}{2}(v_2 - v_1) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta E_c\ . \tag{6.6}$$

Quindi il lavoro compiuto da una forza su un corpo è pari alla variazione di energia cinetica prodotta:

$$L = \Delta E_c\ . \tag{6.7}$$

Questo risultato, noto come *teorema del lavoro*, qui dimostrato per F costante è in verità indipendente dalla forza applicata.

6.3.2 Lavoro della forza peso

Come primo esempio consideriamo il lavoro svolto su un corpo dalla sua forza peso. La figura (6.2) mostra un pomodoro lanciato verso l'alto con una velocità iniziale v_0. Per un corpo che sale, il peso $m\vec{g}$ è diretto nel verso opposto allo spostamento $\vec{h} > 0$. L'angolo θ fra la forza e lo spostamento vale quindi 180^o e si ha:

$$L_g = mgh\cos(180^o) = mgh(-1) = -mgh\ . \tag{6.8}$$

Il segno meno indica che il lavoro è negativo. Infatti, durante la salita il peso trasferisce l'energia mgh a spese dell'energia cinetica che diminuisce dato che il corpo rallenta. Dopo aver raggiunto la quota massima, il corpo comincia a cadere, l'angolo θ diventa 0^o poiché il vettore $\vec{h}$ è diretto verso il basso e pertanto $L_g = +mgh$. Il segno positivo indica che il suo peso trasferisce l'energia mgh a favore dell'energia cinetica, che infatti accelera mentre scende.

6.3.3 Lavoro di una forza variabile

La formula $F \cdot \Delta x$ è valida solo quando la forza è costante durante lo spostamento. Cosa capita se F dipende dalla posizione come illustrato nella figura (6.3)?

Suddividiamo lo spostamento totale $x_2 - x_1$ in un certo numero di intervalli di ampiezza Δx, in modo che la forza $F(x)$ non vari troppo nell'intervallo. Chiamiamo $\bar{F}_j$ il valore medio della forza nell'intervallo j. Possiamo allora applicare la formula (6.4) a ogni sottointervallo per cui:

$$\Delta L_j = \bar{F}_j\Delta x \tag{6.9}$$

Sommando tutti i lavori ΔL_j tra x_1 e x_2, si ottiene un'approssimazione del lavoro totale compiuto dalla forza (figura 6.3 sopra):

$$L = \sum \Delta L_j = \sum \bar{F}_j\Delta x \tag{6.10}$$

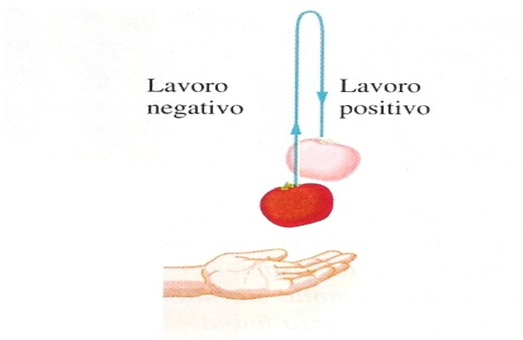


Figura 6.2: Un pomodoro lanciato in aria. Durante la salita il suo peso compie un lavoro negativo, durante la discesa il suo peso compie un lavoro positivo.

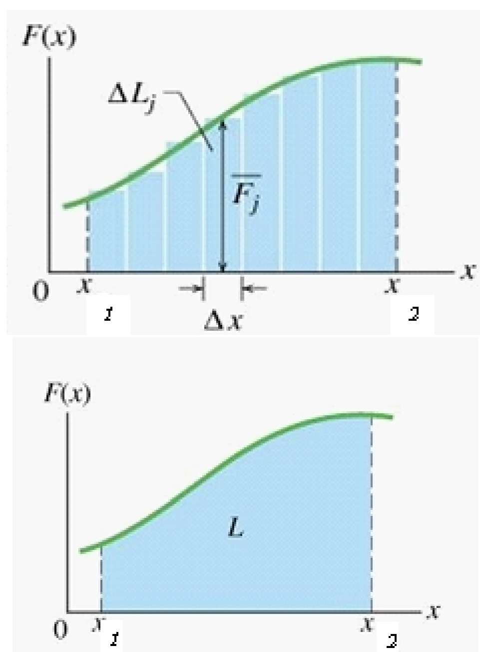


Figura 6.3: Lavoro di una forza variabile

Facendo tendere Δx a zero, otteniamo l'area sotto la curva (figura 6.3 sotto), ossia l'integrale della funzione $F(x)$ tra gli estremi x_1 e x_2. Perciò

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{6.11}$$

6.3.4 Lavoro prodotto da una molla

Come esempio di forza variabile, prendiamo quella prodotta da una molla descritta dalla legge di Hooke $F = -kx$. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla molla su un corpo di massa m appeso alla sua estremità libera durante uno spostamento da x_1 a x_2:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\ dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\ dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x\ dx = -(\frac{1}{2}k)[x^2]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{6.12}$$

Il lavoro è positivo se $x_1^2 > x_2^2$ e negativo se $x_1^2 < x_2^2$. Infatti, la velocità e quindi l'energia cinetica aumentano quando la massa appesa si avvicina al punto di equilibrio.

6.4 Conservazione dell'energia meccanica

6.4.1 Forze conservative: energia potenziale

L'applicazione del teorema del lavoro (6.7), $L = \Delta E_c$ diventa particolarmente interessante quando il lavoro compiuto dalla forza non dipende dalla traiettoria seguita durante lo spostamento, bensì solo dai punti estremi. Se questa condizione è valida, si parla di **forza conservativa**. Una definizione alternativa è che il lavoro complessivo netto svolto da una forza conservativa su un corpo che si muove su un cammino chiuso è zero.

Se una forza è conservativa, è possibile definire una seconda forma di energia, detta **energia potenziale** (U), associata alla posizione del sistema. Tramite l'energia potenziale U, si può ottenere direttamente il lavoro svolto da una forza durante uno spostamento da un punto A a un punto B calcolando la differenza dei suoi valori nei punti A e B, ossia:

$$\Delta U = U(B) - U(A) \tag{6.13}$$

In verità , come vedremo in seguito, per ragioni di comodità , la relazione esatta è la seguente:

$$\Delta U = U(B) - U(A) = -L(A \to B)\ . \tag{6.14}$$

6.4.2 Conservazione dell'energia meccanica

Dato che $L(A \to B) = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$, si ottiene dall'equazione (6.14) che:

$$U(B) - U(A) = -(E_c(B) - E_c(A)) \tag{6.15}$$

Questa equazione si può riscrivere come:

$$E_c(A) + U(A) = E_c(B) + U(B) \tag{6.16}$$

Poiché i punti A e B sono punti qualsiasi, si può affermare in modo generale che:

Quando su un sistema agiscono solo forze conservative, l'energia cinetica e l'energia potenziale possono singolarmente variare, ma la loro somma, detta energia meccanica E rimane costante.

6.4.3 Energia potenziale gravitazionale

Supponiamo che uno sciatore di massa m scenda lungo un pendio privo d'attrito che ha un angolo d'inclinazione costante θ, come mostrato nella figura (6.4).

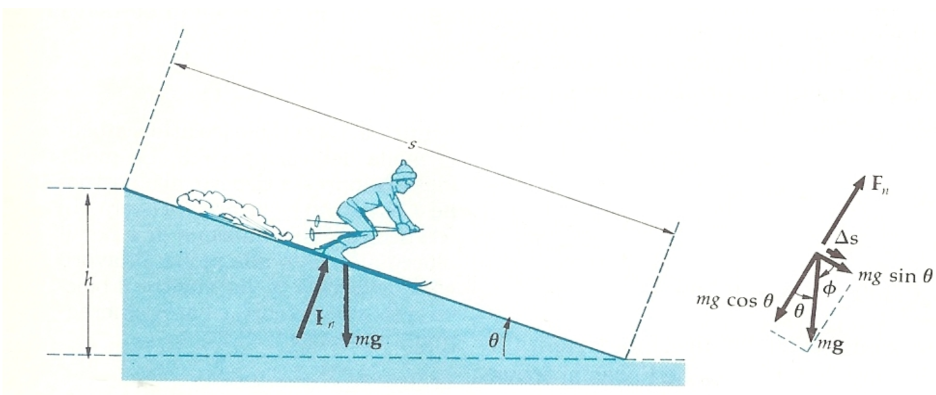


Figura 6.4: Lavoro della forza peso su un pendio a inclinazione costante

Lo sciatore parte da fermo da una quota h. Si vuole calcolare il lavoro compiuto da tutte le forze e la velocità dello sciatore al termine del pendio. In verità la sola forza che compie lavoro è il peso mg. La forza di sostegno del pendio è perpendicolare al pendio e al moto dello sciatore, quindi non compie lavoro. L'angolo tra questa forza e lo spostamento è $\phi = 90^o - \theta$ e la componente del peso nella direzione del moto è $mg \sin\theta$. Quando lo sciatore percorre la distanza Δs scendendo lungo il pendio, la forza di gravità compie il lavoro $(mgsin\theta)\Delta s$. Poiché la forza esercitata dalla Terra è costante, il lavoro totale compiuto mentre lo sciatore percorre la distanza s scendendo per il pendio non è altro che $(mgsin\theta)\ s$. Dalla figura (6.4) si vede che la distanza totale s misurata lungo il pendio è legata alla quota iniziale h dalla relazione $h = s\sin\theta$, così che il lavoro compiuto dalla forza di gravità è

$$L = (mg\sin\theta)s = mgh \tag{6.17}$$

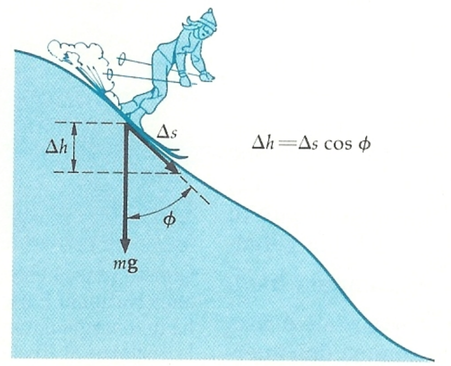
Poiché questo è il lavoro totale compiuto da tutte le forze, il teorema dell'energia cinetica fornisce che

$$L = mgh = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \tag{6.18}$$

per cui la velocità in fondo al pendio è data da $v = \sqrt{2gh}$. Questo risultato è uguale a quello che si avrebbe se lo sciatore percorresse la distanza h in caduta libera. Inoltre, il lavoro compiuto dalla forza di gravità sullo sciatore è indipendente dall'inclinazione del pendio. Infatti se si aumenta l'angolo θ, lo sciatore percorre una distanza minore per scendere dalla stessa quota h, ma la componente di mg parallela al moto, $mg \sin\theta$, è maggiore, perciò il lavoro compiuto rimane mgh.

Lo stesso discorso vale per un pendio di forma arbitraria. La figura seguente mostra un piccolo spostamento Δs parallelo al pendio.

Il lavoro compiuto dalla Terra durante questo spostamento è $(mg\cos\phi)\Delta s$, dove ϕ è l'angolo tra lo spostamento e la forza di gravità diretta verso il basso. La grandezza $\Delta x \cos\phi$ non è altro che Δh. Mentre lo sciatore scende lungo il pendio, l'angolo ϕ varia, ma per ogni spostamento Δs, la componente verso il basso dello spostamento parallela al peso rimane Δh. Perciò il lavoro totale compiuto dalla forza di gravità sarà mgh, dove h è la differenza fra la quota iniziale e la quota finale dello sciatore. E questo indipendentemente dalle direzioni dei vettori Δs durante la discesa.



Il fatto che la forza peso è una forza conservativa ci permette di definire un'energia potenziale gravitazionale. Siccome il lavoro nello spostamento tra due quote h_1 e h_2 è dato da:

$$L_g = mg(h_1 - h_2) \ , \tag{6.19}$$

dalla relazione (6.14), possiamo scrivere che

$$\Delta U_g = -L_g \quad \Rightarrow \; U_g(h_2) - U_g(h_1) = mgh_2 - mgh_1 \; \Rightarrow \quad U_g(h) = mgh \tag{6.20}$$

Perciò , nel caso della forza peso, la legge di conservazione (6.16) si scrive:

$$E_g = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{ costante} \tag{6.21}$$

6.4.4 Energia potenziale elastica

Dall'equazione (6.12), sappiamo che il lavoro svolto da una molla su un corpo di massa m è pari a

$$L_e = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{6.22}$$

Di nuovo, $\Delta U_e = -L_e$ per cui:

$$U_e(x_2) - U_e(x_1) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \ , \tag{6.23}$$

e possiamo definire l'energia potenziale come

$$U_e(x) = \frac{1}{2}kx^2 \ , \tag{6.24}$$

da cui si ricava che:

$$E_e = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{ costante} \tag{6.25}$$

6.5 Esempi

Il principio di conservazione permette di risolvere problemi che con la sola equazione di Newton sarebbero assai complessi. In generale viene applicato quando bisogna mettere in relazione due stati (iniziale e finale) di un sistema caratterizzati dalla loro velocità e posizione. Terminiamo questo capitolo con alcuni esempi.

6.5.1 Pendolo

Un pendolo è costituito da una massa m attaccata a un filo di lunghezza L (Fig.6.5). La massa viene spostata in modo che il filo formi un angolo θ_0 con la verticale e poi viene lasciata andare. Vogliamo trovare (a) la velocità v e (b) la tensione T nel filo nel punto più basso della traiettoria.

Soluzione:
a) le due forze che agiscono sulla massa (trascurando ogni forma di attrito) sono la forza di gravità , che è conservativa, e la tensione del filo T, che è perpendicolare al moto e non compie lavoro. Quindi in questo problema, l'energia meccanica della massa si conserva.

Posta h la quota iniziale della massa rispetto al punto più basso della traiettoria (che verrà associato a $h = 0$), otteniamo in funzione di θ_0:

$$h = L - L\cos\theta_0 = L(1 - \cos\theta_0) \ . \tag{6.26}$$

In quel punto, l'energia cinetica è nulla. La conservazione dell'energia fornisce quindi:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgL(1 - \cos\theta_0) \ , \tag{6.27}$$

da cui si ricava la velocità nel punto più basso:

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)} \tag{6.28}$$

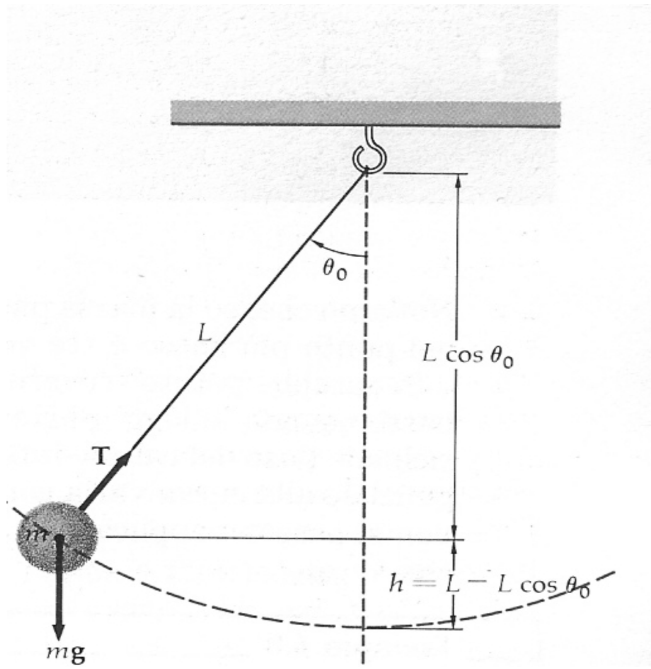


Figura 6.5: Il pendolo semplice

b) Per trovare la tensione del filo, bisogna applicare la seconda legge di Newton. Nel punto più basso agiscono la tensione T centripeta) e il peso mg (centrifugo). La risultante centripeta deve fornire l'accelerazione centripeta pari a v^2/L. Perciò :

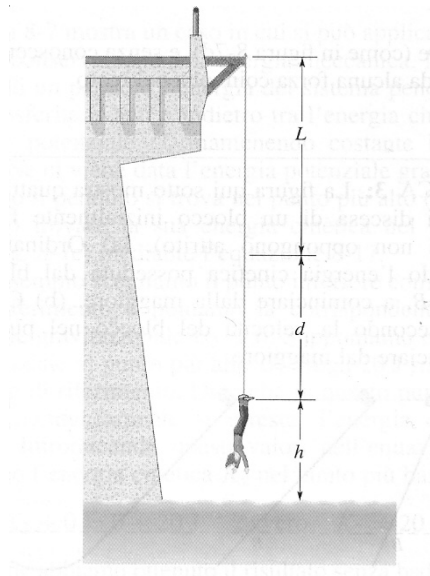
$$T - mg = m\frac{v^2}{L} = 2mg(1 - \cos\theta_0) \ , \tag{6.29}$$

da cui si ricava che:

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_0) \ . \tag{6.30}$$

Questo esempio mostra quanto il principio di conservazione possa semplificare i calcoli. Trovare la velocità (6.28) usando le equazioni di Newton è un calcolo complesso perché l'accelerazione tangenziale durante la discesa cambia in funzione dell'angolo, e quindi dipende dal tempo.

6.5.2 Salto con l'elastico



Una ragazza (massa 61 kg) si trova su un ponte alto 45 metri sul livello del fiume e vuole fare del bungee jumping. Nello stato di riposo, l'elastico ha una lunghezza di $L = 25$ metri e possiede una costante elastica pari a $k = 160$ N/m. A che altezza dall'acqua si trovano i suoi piedi nel punto più basso raggiunto?
Soluzione: nei due punti da prendere in considerazione (partenza e arresto), l'energia cinetica della saltatrice è nulla. Si ricava che la variazione di energia potenziale è pure nulla. Poiché qui intervengono due energie potenziali, quella elastica e quella gravitazionale, si ottiene che la somma delle loro variazioni deve essere nulla:

$$\Delta U_g + \Delta U_e = 0 \; . \tag{6.31}$$

Fino a una caduta di L, l'elastico non è in tensione e l'energia potenziale elastica è nulla. L'allungamento ulteriore d dell'elastico dà luogo a un'energia potenziale elastica

$$U_e = \frac{1}{2}kd^2 \; . \tag{6.32}$$

La variazione dell'energia potenziale gravitazionale della ragazza è negativa (perde quota) ed è data da:

$$U_g = -mg(L + d) \; . \tag{6.33}$$

Dall'equazione (6.31), si ricava

$$\Delta U_g + \Delta U_e = -mg(L + d) + \frac{1}{2}kd^2 = 0 \; , \tag{6.34}$$

un'equazione di secondo grado che fornisce per d un valore accettabile pari a $d = 17.9$ m. Alla fine si ottiene che $h = H - (L + d) = 45.0 - (25 + 17.9) = 2.1$ metri.

6.5.3 Giro della morte

Come terzo e ultimo esempio, vediamo come si risolve il noto problema del *giro della morte*. Si tratta di determinare da quale altezza bisogna far partire una massa m per fargli compiere un giro intero della pista (raggio R) senza che si stacchi (Fig 6.6).

Soluzione: come nell'esempio precedente del pendolo, bisogna applicare assieme la seconda legge di Newton e la conservazione dell'energia. Come si vede dalla figura, nel punto

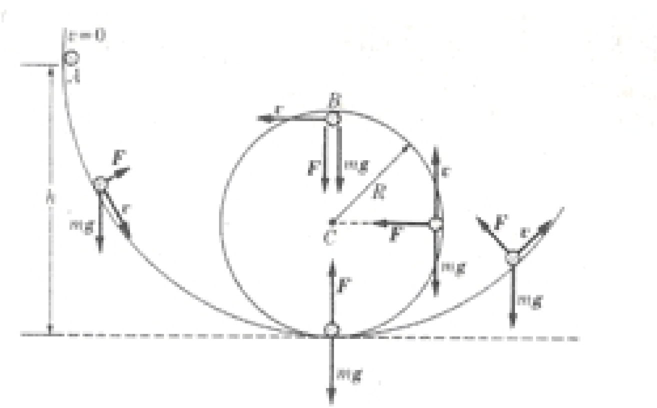


Figura 6.6: Il giro della morte

più alto della traiettoria (punto B), la pista (F) e il peso (mg) spingono entrambi verso il centro, fornendo l'accelerazione centripeta. Perciò :

$$F + mg = m\frac{v^2}{r} \ . \tag{6.35}$$

Se la velocità è sufficientemente alta, la pista F fornisce l'accelerazione mancante che il peso da solo non può fornire. Quando la velocità è quella minima per il passaggio, la pista non aiuta più e $F = 0$. Questo significa che:

$$v = \sqrt{gr} \ . \tag{6.36}$$

A questo punto, si utilizza la conservazione dell'energia per mettere in relazione le quote e le velocità nei due punti A e B, vale a dire:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \ . \tag{6.37}$$

L'incognita è h_A, cioè la quota in A. Si sa che $v_A = 0$ e che v_B è data da (6.36), mentre $h_B = 2R$. Si ha quindi:

$$mgh_A = \frac{1}{2}m(\sqrt{gr})^2 + mg(2R) \quad , \tag{6.38}$$

da cui si ricava la soluzione $h_A = 5R/2$.

$$. \tag{6.39}$$

6.6 Forze non conservative

Abbiamo visto che quando in un sistema agiscono su un corpo solo forze conservative, l'energia meccanica E rimane costante. Ma non tutte le forze sono conservative, anzi vi sono importanti classi di forze che non godono di questa proprieta'. In questo caso ovviamente non possiamo piu' parlare di conservazione dell'energia meccanica e l'equazione (6.16) non è più valida. Cosa possiamo dire allora a proposito della variazione di energia? Si puo' ancora parlare di energia cinetica e potenziale? In realta' vi e' un modo molto semplice di trattare questi casi ed e' quello di utilizzare il teorema del lavoro (6.7):

$$L = \Delta E_c \tag{6.40}$$

Questa equazione è sempre valida, anche per le forze non conservative, in quanto non abbiamo fatto alcuna ipotesi sul tipo di forze in gioco nel ricavare tale equazione. Nel caso di forze non conservative (NC), possiamo scrivere esplicitamente:

$$L_{NC} = \Delta E_c \tag{6.41}$$

Un caso importante di forze non conservative è quello delle forze di attrito. In questo caso il lavoro compiuto da queste forze e' sempre negativo e dipende strettamente dal percorso compiuto dal corpo.

Se oltre alle forze conservative agiscono anche quelle non conservative allora le equazioni precedenti si possono scrivere come:

$$L_C + L_{NC} = \Delta E_c \tag{6.42}$$

dove abbiamo indicato con L_C il lavoro compiuto dalle forze conservative. Per tali forze abbiamo visto che il lavoro e' legato alla variazione di energia potenziale:

$$L_C = -\Delta U \tag{6.43}$$

per cui la (6.42) diviene:

$$-\Delta U + L_{NC} = \Delta K \tag{6.44}$$

che si puo' scrivere anche come:

$$L_{NC} = \Delta E_c + \Delta U = \Delta(E_c + U) = \Delta E \tag{6.45}$$

L'equazione (6.45) ci dice che in questo caso l'energia meccanica E non si conserva in quanto varia di una quantità ΔE proprio uguale al lavoro compiuto dalle forze non conservative. Se questo lavoro è negativo allora l'energia meccanica diminuisce. Tuttavia, nei casi in cui tale lavoro sia calcolabile, l'equazione (6.45) fornisce un valido aiuto nel trattare diversi problemi utilizzando considerazioni energetiche. Un esempio di tale situazione è mostrato nella figura (6.7), dove un corpo di massa m scivola su un piano inclinato di altezza h e lunghezza l.

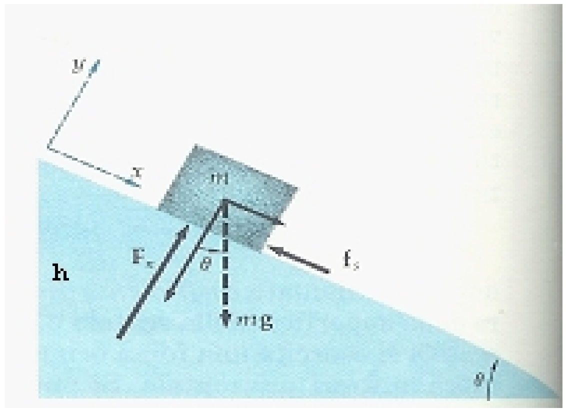


Figura 6.7: Un corpo scivola lungo un piano inclinato.

Se sul piano inclinato non c'è attrito, sappiamo che la velocita' finale sara':

$$v = \sqrt{2gh} \tag{6.46}$$

indipendentemente dalla pendenza θ. Supponiamo ora che il piano inclinato produca una forza di attrito con coefficiente di attrito dinamico μ mentre la parte orizzontale rimanga liscia. In questo caso l'equazione (6.46) non sara' piu' valida ma dovremo fare uso della (6.45), dove però possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito:

$$L_{NC} = -\mu l m g \cos\theta \tag{6.47}$$

Poiché la lunghezza l è legata all'altezza h dalla relazione:

$$h = l \sin\theta \tag{6.48}$$

e quindi:

$$l = \frac{h}{\sin\theta} \tag{6.49}$$

e sostituendo nella (6.47), otteniamo:

$$L_{NC} = -\mu h m g \frac{cos\theta}{sin\theta} = -\frac{\mu h m g}{tg\theta} \tag{6.50}$$

L'equazione (6.45) si può riscrivere come:

$$L_{NC} = E_{fin} - E_{in} = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \tag{6.51}$$

in quanto l'energia meccanica finale è solo cinetica, quella iniziale era solo potenziale. La (6.51) diventa perciò :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\mu h m g}{\tan\theta} \tag{6.52}$$

dove abbiamo tenuto conto che il lavoro compiuto dalle forze non conservative è negativo. Dalla (6.52) possiamo ricavare la nuova velocità finale:

$$v = \sqrt{2gh(1 - \frac{\mu}{\tan\theta})} \tag{6.53}$$

Se confrontiamo la (6.53) con la ((6.46)) notiamo che la velocità finale del corpo in questo caso è minore. Parte dell'energia si è persa.

Dove è andata a finire? Se misurassimo con un termometro la temperatura del piano inclinato e del corpo prima e dopo, ci accorgeremmo che essa è aumentata. L'energia non si è persa, ha solo cambiato forma diventando energia di tipo termodinamico, energia legata al calore. Quindi le forze di attrito trasformano l'energia meccanica in calore.

6.7 Problemi

Esercizio 51 Una moneta viene lanciata verso l'alto con una certa velocità . Quale delle seguenti affermazioni è **falsa**?

A l'energia cinetica della moneta diminuisce mentre sale

B l'energia potenziale della moneta aumenta mentre sale

C la forza di gravità si oppone al moto

D la forza di gravità compie un lavoro positivo

Esercizio 52 Un oggetto sta girando su una circonferenza di raggio R con velocità costante. Qual è il lavoro fatto dalla forza centripeta F_C durante mezzo giro?

A $F_C \cdot 2R$

B Zero

C $F_C \cdot \pi R$

D Nessuna delle tre precedenti

Motiva la tua risposta.

Esercizio 53 Una slitta ($m = 7,5$ kg) viene trascinata per 8 metri tramite una corda che forma un angolo di 28^O con il suolo. Se il lavoro realizzato è di 530 J, trovare:

a) l'accelerazione a cui è sottoposta la slitta,

b) il tempo impiegato per compiere gli 8 metri se la slitta era inizialmente ferma,

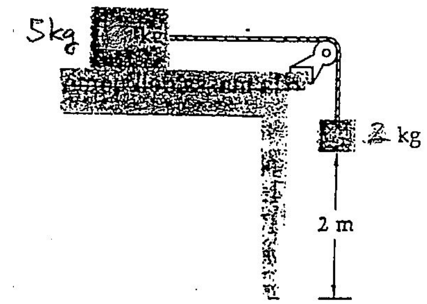
c) la forza esercitata dal terreno sulla slitta durante il trascinamento.

Esercizio 54 Un vagone ferroviario di 2,5 tonnellate è fermo in cima a una salita con i freni tirati. Allentati i freni, il vagone scende 9 metri al di sotto della sua posizione iniziale. In fondo alla discesa urta un altro vagone fermo di 1,2 tonnellate. I due vagoni agganciati risalgono su per il binario fino a una quota h. Quanto vale h?.

Esercizio 55 Un corpo di 5 kg striscia su un piano privo di attrito ed è collegato a un altro corpo di 2 kg con un filo.

a) Usando la conservazione dell'energia, trova velocità della massa sospesa quando è scesa di 2 metri

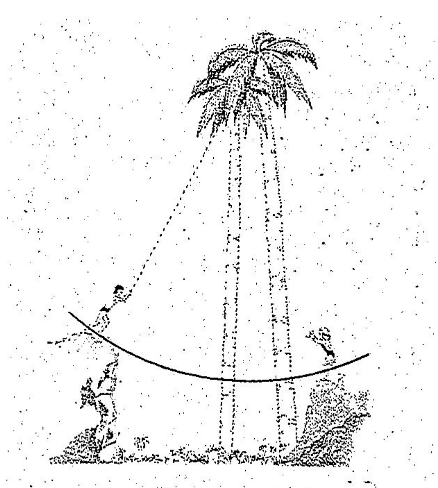
b) Di quanto diminuisce la velocità in quel punto se si introduce un coefficiente di attrito tra corpo e piano di $\mu = 0,2$

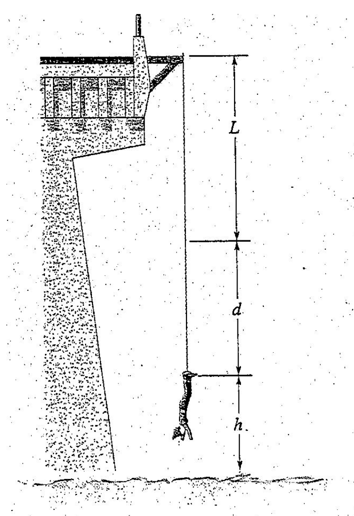


Esercizio 56 Per provare il *bungee jumping*, una ragazza di massa 65 kg e altezza 1.70 m si lancia da un ponte alto 46 metri rispetto al fiume (vedi figura sotto). Allo stato di riposo, la corda elastica ha una lunghezza di 25 metri (L) e possiede una costante elastica $k = 160$ N/m.

a) A quale distanza minima dall'acqua si arresta la ragazza?

b) Quanto vale e in quale punto viene esercitata la forza massima dalla corda sulla ragazza?





Esercizio 57 Tarzan, che pesa 70 kg, salta da una roccia appeso a una liana lunga 18 m (vedi figura sopra). Nel punto più basso dell'oscillazione, è sceso rispetto alla roccia di 3.2 m. Se la liana può tenere una tensione massima di 950 N, si spezzerà?

6.7.1 Qualche Soluzione

Soluzione 51: Risposta C

Soluzione 52: Risposta B

Soluzione 53: a) 75 N ; b) 1.34 sec ; 38.36 N ;

Soluzione 54: $h = 4.11$ metri.

Soluzione 55: a) ; b) .

Soluzione 56: a 2.35 metri dall'acqua; 2984 N;

Soluzione 57: no, la tensione massima è di 931 N;

Capitolo 7

Teoria della gravitazione universale

7.1 Introduzione: le leggi di Keplero

Fin dai tempi più remoti i movimenti dei pianeti hanno rappresentato un affascinante mistero per l'umanità . I volteggi di Marte erano forse i più sorprendenti. Giovanni Keplero (1573-1630), grazie all'ausilio delle osservazioni compiute dal suo maestro Tycho Brahe (1546-1601), riuscì a formulare alcune leggi empiriche che descrivono questi moti e le pubblicò nel 1619 nella sua opera Astronomia Nova.

L'aspetto singolare di queste tre leggi è che Keplero aveva verificato la loro validità solo per Marte e la Terra, generalizzando poi il risultato anche agli altri pianeti del sistema solare, senza nessuna prova osservativa. Come vedremo in seguito, esse sono altrettanto valide per satelliti naturali o artificiali, che ruotino su un'orbita chiusa attorno a una massa che funga da centro di attrazione gravitazionale.

1. **Legge delle orbite:** *tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche, di cui il sole occupa uno dei due fuochi.*

   La figura (7.1) mostra un pianeta che si muove su un'orbita ellittica intorno al Sole. I due fuochi (il Sole e quello vuoto) si trovano a una distanza ea dal centro: e rappresenta l'eccentricità dell'ellisse. L'ellisse in figura ha un'eccentricità di circa 0.5 e potrebbe rappresentare l'orbita di un asteroide. I pianeti hanno in realtà eccentricità molto più piccole: 0.0167 per la Terra , 0.0934 per Marte, 0.2482 per Plutone. La distanza dei pianeti dal Sole non è costante, ma varia da un massimo (afelio) ad un minimo (perielio), pure indicati in figura.

2. **Legge delle aree:** *il raggio vettore tracciato dal Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.*

   In termini qualitativi, la seconda legge indica che la velocità orbitale non è costante, ma varia lungo l'orbita. Le due aree evidenziate nella figura (7.2) sono infatti uguali e vengono quindi percorse nello stesso tempo. In prossimità del perielio, dove il raggio vettore è più corto che all'afelio, l'arco di ellisse è corrispondentemente più lungo. Ne segue quindi che la velocità orbitale è massima al perielio e minima all'afelio.

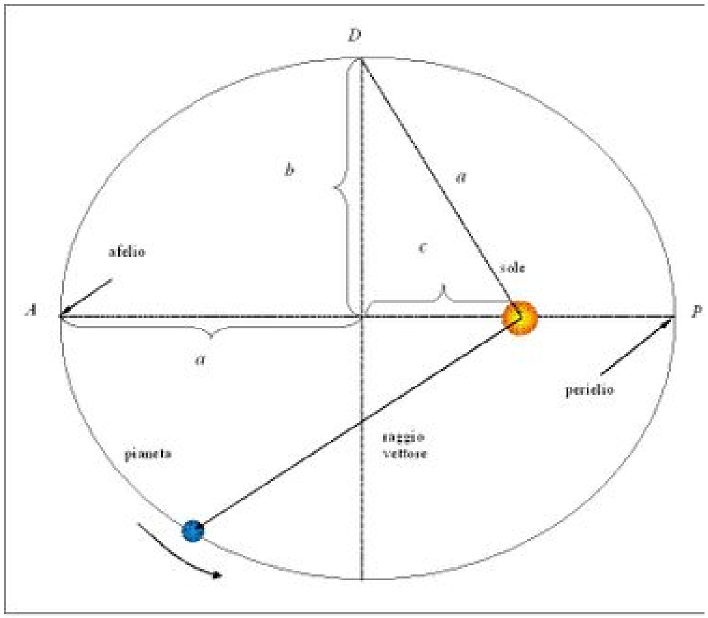


Figura 7.1: Un pianeta di massa m percorre un'orbita ellittica attorno al Sole.

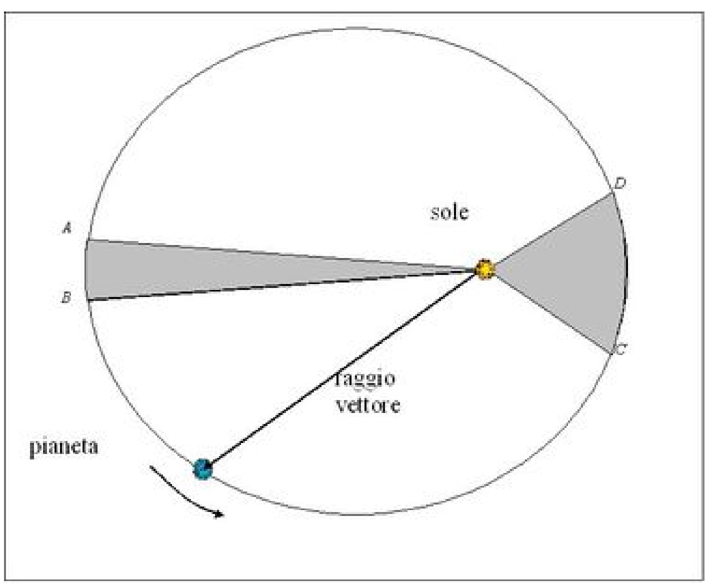


Figura 7.2: La legge delle aree

In termini quantitativi, la formulazione è equivalente a:

$$R \cdot v = \text{costante}, \tag{7.1}$$

vale a dire che la distanza dal Sole e la velocità sono inversamente proporzionali.

3. **Legge dei periodi:** *il quadrato del periodo di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita, vale a dire:*

$$T^2 = Ka^3 \ .$$

T è il periodo orbitale del pianeta attorno al Sole e K è una costante uguale per tutti i pianeti. K dipende però dal centro di attrazione del sistema che si sta considerando.

7.2 La legge di gravitazione

La teoria della gravitazione universale nasce ufficialmente nel 1687, anno in cui viene dato alle stampe l'opera principale di Isaac Newton (1642 - 1727), i Principi Matematici della Filosofia Naturale. Questo libro è il risultato di una disputa iniziata alcuni anni prima nell'ambito della Royal Society, una associazione culturale fondata da scienziati, tra l'astronomo Edmund Halley (noto per la famosa cometa) ed il fisico Robert Hooke. Il tema della disputa stava nello scoprire e dimostrare la relazione tra la forza attrattiva del Sole verso un pianeta e la distanza pianeta-Sole. C'era la convinzione che la relazione fosse di proporzionalità inversa al quadrato della distanza, vale a dire:

$$F \propto \frac{1}{R^2}$$

dove F è la forza attrattiva e R la distanza tra il pianeta ed il Sole. Tuttavia, nonostante questa convinzione, né Halley né Hooke erano capaci di dimostrare che questo fosse il risultato giusto. Halley allora ricorse all'aiuto di Newton che a quell'epoca ricopriva la cattedra di professore di matematica all'università di Cambridge. Tre anni dopo il colloquio tra Newton ed Halley veniva pubblicato, appunto i Principia in cui Newton espone i suoi studi sia sulla gravitazione che sulla meccanica in generale. Tale testo può essere considerato a tutti gli effetti il primo vero e proprio trattato di fisica della storia, dove tra l'altro vengono enunciate le tre leggi della dinamica viste in precedenza e la legge della gravitazione universale.

Nella teoria newtoniana della gravitazione le tre leggi di Keplero sono la naturale conseguenza della dipendenza della forza dal quadrato della distanza. In altre parole: se la forza attrattiva dipende dall'inverso del quadrato della distanza allora la traiettoria del corpo non può che essere una ellisse e viceversa. Grazie a Newton le leggi di Keplero acquistano anche un fondamento fisico. Newton va oltre e dimostra che la forza di gravità oltre che dalla distanza tra i corpi dipende in modo diretto anche dalle masse dei corpi stessi. Si arriva così alla notissima legge delle gravitazione universale, reperibile in qualsiasi testo di fisica:

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2} \tag{7.2}$$

dove F è la forza gravitazionale attrattiva tra due corpi, M_1 e M_2 le masse dei corpi e r la distanza tra loro. Nella formula compare anche la costante di gravitazione universale G, misurata per la prima volta da Cavendish nel 1771 e data da:

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \ \frac{Nm^2}{kg^2} \ . \tag{7.3}$$

Vediamo ora come si ricava la terza legge di Keplero partendo dalla legge di gravitazione, nel caso di un orbita circolare. Il secondo principio fornisce l'uguaglianza fra forza di gravità e forza centripeta, da cui si ricava la velocità di rotazione:

$$F_g = ma_c \quad \Rightarrow \quad G\frac{mM_S}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}} \tag{7.4}$$

Dato che $2\pi r/T = v$ uguagliando questa espressione a (7.4), si ottiene:

$$\sqrt{\frac{GM_s}{r}} = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{GM_s}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

da cui si ricava che

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_s}{4\pi^2} = K \tag{7.5}$$

La costante nella terza legge di Keplero dipende quindi dalla massa del Sole.

7.3 Il sistema solare

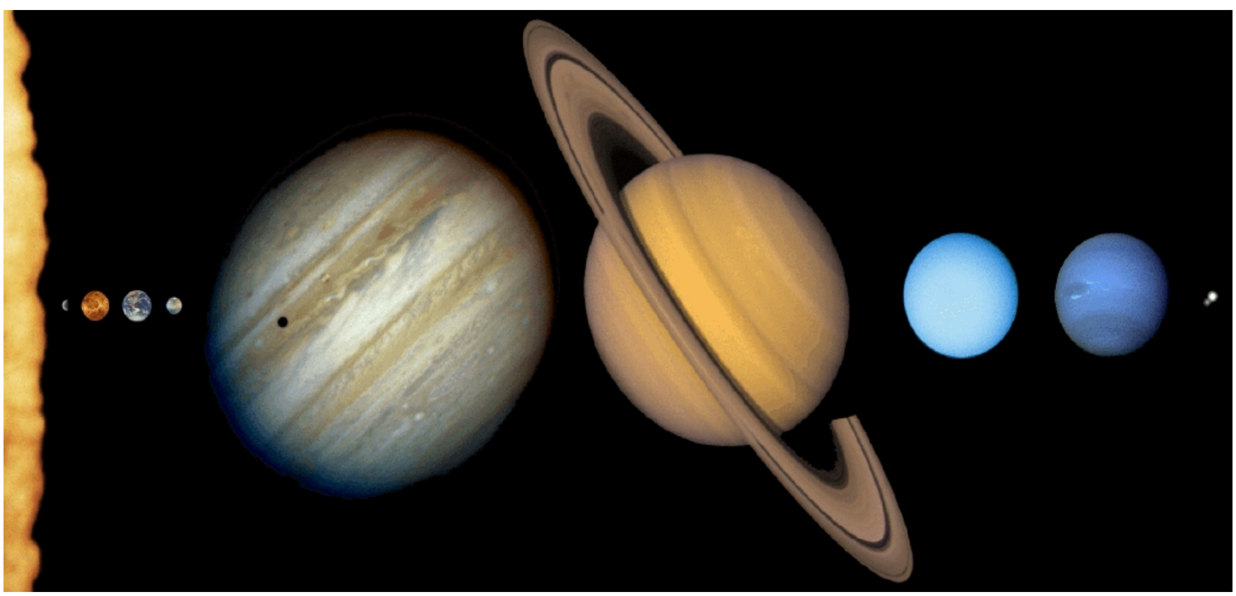


Figura 7.3: Il Sole e i pianeti approssimativamente nella scala reale.

Il Sistema Solare è un insieme di corpi celesti in rotazione attorno al Sole. Ne fanno parte, oltre al Sole stesso, 9 pianeti, 61 satelliti, alcune migliaia di asteroidi, ed un numero imprecisato di comete. Partendo dal Sole, troviamo per primi i pianeti interni, Mercurio e Venere, poi la Terra e infine i pianeti esterni: Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno e Plutone. Tra l'orbita di Marte e quella di Giove c'è la fascia degli asteroidi. Dal punto di vista dinamico, il Sistema Solare è un insieme molto complesso e particolare. Tutti i pianeti ruotano nello stesso verso, cioè in senso antiorario rispetto ad un ipotetico osservatore posto sul polo nord del Sole.

Le loro orbite giacciono quasi tutte sullo stesso piano, cioè sono inclinate al massimo di 2,5 gradi rispetto al piano dell'eclittica, ad eccezione di quelle di Mercurio (7 gradi) e di Plutone (17 gradi). Le orbite sono pressochè circolari, tranne quelle di Plutone (che ha un'eccentricità pari a 0.25) e di Mercurio (0.20).

L'estensione totale del Sistema Solare è di circa 6 miliardi di Km, pari a 39,3 UA [1]. I corpi del Sistema Solare occupano in realtà un volume molto piccolo rispetto alle dimensioni complessive. Il Sistema Solare è quindi praticamente vuoto: se il Sole fosse una sfera del diametro di un metro, la Terra avrebbe le dimensioni di un pisello e sarebbe posta a 108 metri di distanza da esso, Giove avrebbe le dimensioni di un'arancia, posta a 550 metri, ed infine Plutone disterebbe 4 km e misurerebbe meno di un millimetri di diametro.

I pianeti del nostro Sole sembrano formare due sistemi distinti: una sorta di sistema solare interno, composto dai pianeti *tellurici* o *rocciosi* (Mercurio, Venere, la Terra e Marte) e uno esterno, che comprende i pianeti *giganti* (Giove, Saturno, Urano e Nettuno). Plutone sembra per molti versi un pianeta anomalo, che non fa parte di nessuno dei due sottosistemi.

7.3.1 I pianeti tellurici

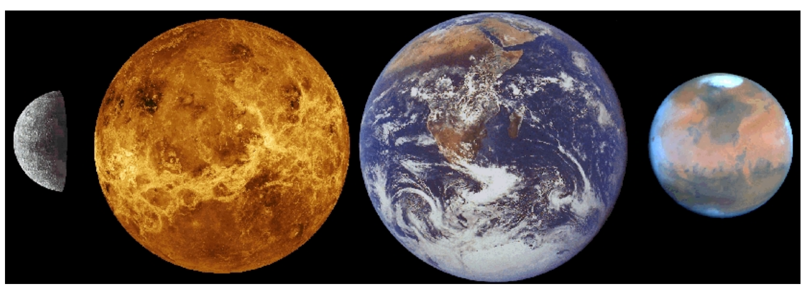


Figura 7.4: I pianeti tellurici. Le dimensioni sono in scala.

I pianeti rocciosi hanno dimensioni relativamente modeste (meno di 15.000 Km di diametro) e densità abbastanza alte (da 3 a 5, dove 1 è la densità dell'acqua). Essi sono composti di un nucleo ferroso circondato da un mantello basaltico. Rispetto ai pianeti giganti, il loro moto di rivoluzione è più veloce e la loro rotazione è più lenta. I pianeti rocciosi sono piuttosto diversi tra loro per quanto riguarda l'atmosfera (quando presente), la superficie del suolo, il campo magnetico e i parametri orbitali, in contrasto con la relativa uniformità dei pianeti giganti.

[1] l'unità di misura UA è nota come unità astronomica (UA) ed è pari alla distanza Terra-Sole

7.3.2 I pianeti giganti

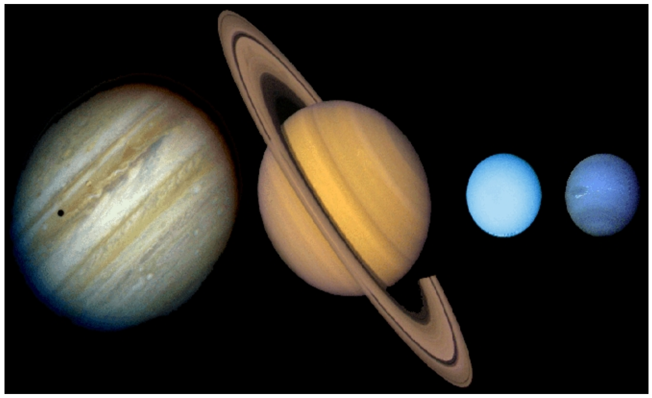


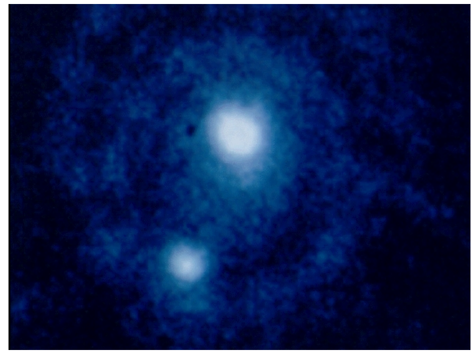
Figura 7.5: I pianeti gioviani. Le dimensioni sono in scala.

I pianeti giganti devono il loro nome alle notevoli dimensioni (hanno diametri maggiori di 50.000 Km). Essi hanno densità prossime ad 1 e si dividono a loro volta in pianeti gassosi (Giove e Saturno) e pianeti di ghiaccio (Urano e Nettuno). I pianeti gassosi sono composti da un nucleo roccioso circondato da un mantello liquido, a sua volta ricoperto da uno spesso strato di gas. I pianeti di ghiaccio sono composti invece da un nucleo di roccia, ricoperto da uno strato di ghiaccio, il tutto circondato da un'atmosfera. I periodi di rivoluzione dei pianeti giganti sono molto più lunghi rispetto a quelli dei pianeti tellurici, e vanno da circa 12 anni (Giove) a quasi 165 (Nettuno). Viceversa essi ruotano più rapidamente dei pianeti rocciosi: ne deriva una notevole forza centrifuga all'equatore, e quindi una forma più schiacciata. Giove, Saturno e Urano possiedono inoltre un insieme di anelli composti da polvere e frammenti di roccia e ghiaccio di varie dimensioni. Infine, tutti i pianeti giganti possiedono un gran numero di satelliti, mentre quelli rocciosi ne hanno al massimo due.

Giove e Saturno hanno la particolarità di emettere 2 volte e mezzo più energia di quanta non ne ricevano dal Sole. Questa energia deriva loro da una lenta contrazione gravitazionale, che riscalda il loro nucleo. Inoltre nella loro atmosfera il rapporto idrogeno-elio è molto simile a quello solare; questo fa pensare che i due pianeti siano in realtà due stelle mancate: se fossero più massicci, la pressione e la temperatura del gas al loro interno sarebbero sufficienti ad innescare le reazioni termonucleari e a farli diventare stelle.

7.3.3 Plutone

Plutone è il meno conosciuto di tutti i pianeti. Esso sembra un caso a parte rispetto agli altri, sia per la sua orbita anomala, sia per tipo e dimensioni. Esso infatti, pur essendo situato nella regione dei pianeti giganti, è molto piccolo e di tipo roccioso. Si pensa che Plutone possa essere un ex satellite di Nettuno, sfuggito alla sua attrazione gravitazionale per sistemarsi su un'orbita indipendente attorno al Sole. Nella figura a fianco, Plutone con il suo satellite Caronte.



7.3.4 Le distanze dei pianeti

Le distanze dei pianeti (fino ad Urano) rispetto al Sole seguono la legge di Titius-Bode, che è stata determinata empiricamente nel 1772. In base ad essa, le distanze dei vari pianeti dal Sole si ottengono dalla seguente formula:

$$d_n = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n \quad UA, \tag{7.6}$$

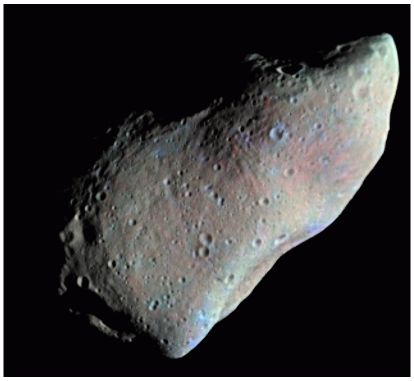
dove $n = -\infty, 0, 1, 2, \ldots$. La tabella seguente confronta i valori teorici con quelli reali.

PIANETA	n	TEORIA (Titius-Bode)	DISTANZA REALE (UA)
Mercurio	$-\infty$	0.4	0.387
Venere	0	0.7	0.723
Terra	1	1.0	1.0
Marte	2	1.6	1.524
Asteroidi	3	2.8	2.767
Giove	4	5.2	5.203
Saturno	5	10.0	9.539
Urano	6	19.6	19.189
Nettuno	7	38.8	30.06
Plutone	8	77.2	39.439

Anche la fascia degli asteroidi segue questa legge, occupando il posto compreso tra Marte e Giove. Nettuno e Plutone costituiscono invece delle eccezioni, in quanto la loro distanza ha un grosso scarto rispetto a quella prevista. Questo confermerebbe una volta di più la natura anomala di Plutone.

Oltre ai pianeti ci sono una miriade di corpi minori nel Sistema Solare, essenzialmente suddivisi in tre classi.

Gli *asteroidi* sono piccoli oggetti rocciosi delle dimensioni comprese tra pochi cm e 1.000 Km. Essi orbitano a migliaia in una fascia compresa tra le orbite di Marte e di Giove.



A sinistra, un asteroide. A destra la cometa West.

Le *comete* sono corpi celesti che ruotano a grande distanza dal Sole, lungo orbite molto eccentriche. Esse sono sostanzialmente costituite da un aggregato di roccia e ghiaccio di dimensioni minori di 10 Km. Il loro aspetto caratteristico è dovuto al fatto che, quando passano vicino al Sole, la superficie del loro nucleo di ghiaccio vaporizza a causa dell'elevata temperatura. Il gas che si produce forma cosi' un alone diffuso, quasi sferico, detto chioma. La radiazione del Sole e il vento solare esercitano su questo gas una pressione. Essa deforma la chioma spingendo il gas in direzione opposta al Sole e dando origine alla caratteristica coda, una striscia di gas lunga decine o anche centinaia di milioni di chilometri.

Le *meteoriti* sono i resti di corpi solidi, metallici o pietrosi, penetrati nell'atmosfera terrestre ad alte velocità . L'attrito con l'atmosfera fa sì che essi si riscaldino e si disgreghino: i più piccoli vengono ridotti in polvere, mentre i più grandi non vengono distrutti completamente e possono raggiungere il suolo.

7.4 Energia potenziale gravitazionale

Nel paragrafo (6.4.3) abbiamo analizzato l'energia potenziale in prossimità della superficie terrestre in cui la forza di gravità è praticamente costante. Nel caso generale, la variazione della forza con la distanza non si può più trascurare.
Consideriamo la Terra ed un corpo che si trova ad una distanza r_0 dal centro della Terra e calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza di gravità nel moto del corpo da r_0 a una posizione ad una distanza r_1 (Fig.7.6). Osserviamo che, nella figura, i due punti non sono allineati lungo una direzione radiale ma i due raggi vettori r_0 ed r_1 formano un angolo che si può modificare con un cursore. Calcoliamo il lavoro lungo una configurazione arbitraria di questi due punti. Poichè la forza dipende dalla distanza occorrerà fare un integrale:

$$L = \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} \tag{7.7}$$

In questo integrale **ds** è lo spostamento infinitesimo lungo una traiettoria arbitraria che congiunge i punti r_0 e r_1. Questa traiettoria si può sempre spezzare, a livello infinitesimo, come mostrato nella Fig.(7.6). Qui la suddivisione è macroscopica, per permetterne la visualizzazione. Lo spostamento infinitesimo **ds** si può sempre immaginare come la somma di

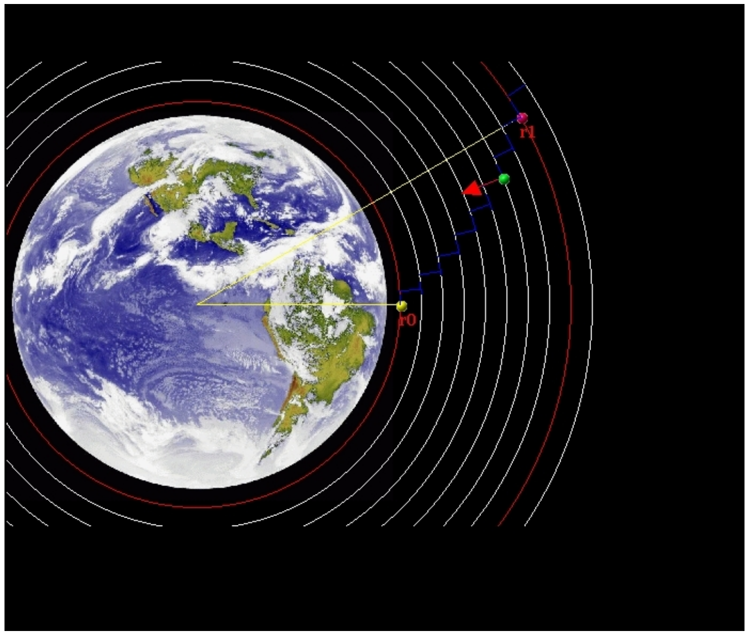


Figura 7.6: Spostamento di una massa m da un'orbita a un'altra.

due spostamenti infinitesimi **dr** e **dl**. Il primo **dr** è uno spostamento radiale, il secondo **dl** è uno spostamento lungo un arco di cerchio centrato al centro della Terra e raggio r. La (7.7) diventa quindi:

$$L = \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{dr} + \mathbf{dl}) = \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} \tag{7.8}$$

Teniamo ora presente che la forza F è radiale, quindi il prodotto scalare $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -F dr$ in quanto la forza è attrattiva ed è nella direzione opposta allo spostamento, mentre $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = 0$ in quanto **F** e **dl** sono perpendicolari. La (7.8) diviene quindi:

$$L = -\int_{r_0}^{r_1} F dr = -\int_{r_0}^{r_1} \frac{G m_T m}{r^2} dr = G m_T m (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}) = U_0 - U_1 \tag{7.9}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (6.14). La (7.9) dimostra che il campo è conservativo. Infatti, il lavoro L non dipende dalla traiettoria che congiunge i due punti 0 e 1 ma solo dai valori di r_0 ed r_1 come si può verificare nella figura. Se vogliamo ora ricavare la forma dell'energia potenziale, occorre definire, come fatto nei casi precedenti, una posizione in cui porre l'energia potenziale a zero. In questo caso la scelta più conveniente è quella di porre $U = 0$ a $r = \infty$ dove la forza di gravità è massima e diventa nulla. In tutte le altre posizioni, l'energia potenziale è inferiore e quindi negativa. In questo modo, usando la (7.9), possiamo definire $U(r)$ come:

$$U(r) = -\frac{G m_T m}{r} \tag{7.10}$$

che è l'espressione cercata per l'energia potenziale gravitazionale. L'energia totale in un campo gravitazionale si scriverà quindi come:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_0 m}{r} \tag{7.11}$$

dove m_0 è la massa che genera il campo di forze ed m è la massa dell'oggetto che si muove in questo campo di forze. La (7.11) può essere positiva, nulla o negativa. Nel prossimo paragrafo, studiamo questi casi nel caso di un oggetto che si muova nel campo gravitazionale generato dalla Terra.

7.5 Traiettorie in un campo gravitazionale

Consideriamo un oggetto che si muova nel campo gravitazionale generato dalla Terra. Partendo da una certa distanza r_0 dal centro del Terra e con una velocità iniziale v_0, la sua energia totale sarà :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{m_T m}{r_0} \tag{7.12}$$

Supponiamo che questa energia sia negativa. Si può facilmente verificare che in questo caso, il corpo raggiunge una distanza pari ad r_{max} ma non può allontanarsi ulteriormente in quanto vi arriva con energia cinetica nulla. Siamo in presenza di uno stato legato: il corpo non può allontanarsi dal Sole e, se la sua velocità iniziale non è esattamente radiale, descriverà un'orbita chiusa attorno al Sole di tipo ellittico.

Supponiamo ora che la (7.12) sia nulla. Il corpo in questo caso può allontanarsi indefinitamente dalla Terra ma raggiunge l'infinito con energia cinetica nulla. La velocità v_0 che consente al corpo di allontanarsi indefinitamente dal sole viene detta *velocità di fuga* e si può ottenere dalla (7.12):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{m_T m}{r_0} = 0 \tag{7.13}$$

dalla quale si ottiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_S}{r_0}} \tag{7.14}$$

Ad esempio nel caso della Terra, per un oggetto che parta dalla superficie terrestre, la (7.14) diviene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T}} = 11,2 \quad km/sec \tag{7.15}$$

Il tipo di orbita descritta con un'energia totale nulla è di tipo parabolico.
Supponiamo di far crescere ancora l'energia totale finché essa diviene positiva. In questo caso il corpo può allontanarsi indefinitamente dal Sole e raggiunge l'infinito con energia cinetica non nulla. Il tipo di orbita che in questo caso viene descritto è di tipo *aperto* ovvero un ramo di iperbole.

7.6 Gravitazione terrestre: addendum

Si può applicare la legge di gravitazione (7.2) anche per oggetti non puntiformi. In particolare, se si ha un oggetto sferico uniforme, una particella che si trova all'esterno viene attirata come se tutta la massa dello strato sferico fosse concentrata nel suo centro. Per questo motivo, l'accelerazione gravitazionale terrestre a_g viene approssimata con:

$$a_g = \frac{GM_T}{r^2} \tag{7.16}$$

da cui ponendo $r = R_T$ si ottiene il noto valore di $g = 9.8\ m/s^2$.

La situazione reale per la Terra è però un po' più complessa. Vediamo di esaminare il perché.

a) La Terra non è omogenea: la densità della Terra varia radialmente (vedi figura 7.7) e la densità della Terra è diversa nelle diverse aree della superficie terrestre. Pertanto g varia da regione a regione.

b) La Terra non è sferica: la forma della Terra si avvicina a un ellissoide appiattito ai poli e dilatato all'equatore. Il raggio equatoriale supera quello polare di 21 km, perciò g è maggiore ai poli.

c) La Terra ruota: la rotazione della Terra attorno a un asse che passa per i poli implica che il peso di un oggetto è diverso dalla forza gravitazionale se non si trova ai poli. La rotazione implica infatti una forza centripeta che diminuisce leggermente il peso e questo effetto aumenta man mano che ci si avvicina all'equatore dove il raggio della rotazione è massimo. Questo effetto è molto piccolo e si quantifica nel caso dell'equatore in una diminuzione del 0.35%.

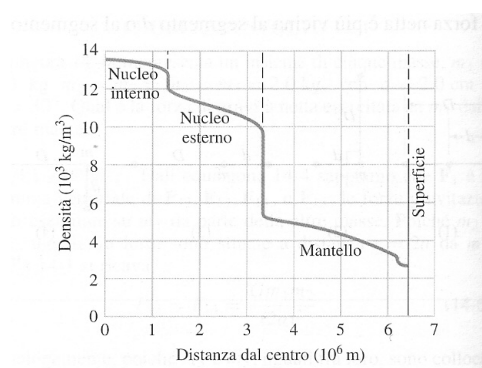


Figura 7.7: Densità della Terra in funzione della distanza dal centro.

Che cosa succede se un oggetto si trova all'interno di uno strato sferico? **Se lo strato è omogeneo, non esercita nessuna forza gravitazionale su una particella localizzata al suo interno**. Perciò , una particella che si trova nella Terra subirà una forza attrattiva solo dalla materia che si trova tra il centro e la particella stessa. Lo strato esterno non contribuisce. Il terzo esempio nel paragrafo successivo ne è un'illustrazione.

7.7 Esempi

7.7.1 Satellite geostazionario

Un satellite geostazionario percorre un orbita quasi circolare attorno alla terra, ed è posizionato sul piano dell'equatore. La sua caratteristica principale è quella di viaggiare alla stessa velocità angolare della Terra; questo vuol dire che un satellite geostazionario possiede lo stesso periodo di rotazione della terra, compiendo un'orbita completa in 24 ore e quindi un osservatore solidale con la terra, guardando verso il cielo, lo vedrebbe immobile, come se fosse fissato rigidamente alla terra. Questa precisa condizione si viene a verificare solo se il satellite ha una ben determinata altezza rispetto alla superficie terrestre. Chiaramente perché funzioni tutto perfettamente la distanza da terra dovra' essere abbastanza grande da posizionare il satellite nel vuoto (o quasi), cioè dove l'atmosfera terrestre sarà più rarefatta. Usando la terza legge di Keplero (7.5) e ponendo il periodo pari al giorno siderale [1] (23 ore e 56 minuti), vale a dire $T = 86164$ sec , si ottiene:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 42173\ km \tag{7.17}$$

Togliendo il raggio terrestre $R_T = 6370$ km da r, si ottiene la quota del satellite geostazionario:

$$h = r - R_T = 35800\ km\ . \tag{7.18}$$

La velocita' del satellite è ora ricavabile e cioè : $v = 2 \cdot 3.14 \cdot r/T = 3.1$ km/sec. E' da sottolineare che da tale quota h (circa 6 volte il raggio terrestre) il satellite geostazionario vede circa 1/3 della superficie terrestre (sotto un angolo di circa 18^o) e quindi teoricamente bastano solo 3 satelliti geostazionari per coprire tutto il globo. Inoltre, essendo immobile rispetto alla terra, non richiede nessun tipo di meccanismo di inseguimento delle antenne di terra.

7.7.2 Orbita di trasferimento

Una capsula spaziale di massa $m = 10000$ kg è in un'orbita circolare a una distanza di 500 km dalla superficie della Terra. Si programma di spostarla in un'altra orbita, sempre circolare, ma a una distanza di 1500 km dalla superficie della Terra. Si pensa di ottenere il risultato accendendo brevemente i motori: una prima volta per passare dalla prima orbita circolare a un'orbita di trasferimento, e una seconda volta per immettersi in quella finale. I motori principali della capsula applicano una forza costante $F = 1,250 \cdot 10^5$ N e per effettuare la manovra con il minimo dispendio d'energia si fa in modo che la spinta sia esercitata nella direzione del moto.

1. Calcolare la velocità della capsula nelle due orbite circolari.

[1] il giorno siderale corrisponde al tempo impiegato dalla Terra per compiere un'intera rotazione attorno al suo asse. Nel giorno solare medio, lo spostamento che la Terra compie intorno al Sole mentre effettua la sua rotazione non è più trascurabile

2. Descrivere qualitativamente le caratteristiche geometriche dell'orbita di trasferimento.

3. Trovare la velocità della capsula immediatamente dopo la prima accensione, e determinare il valore di v per cui la distanza massima dalla Terra raggiunta dalla capsula sia proprio 1500 km prima della seconda accensione.

4. Determinare il tempo di accensione dei motori all'uscita dalla prima orbita, specificare il verso della spinta dei motori all'ingresso nell'orbita finale e determinare il tempo di accensione necessario.

5. Calcolare il tempo impiegato a percorrere l'orbita di trasferimento.

Nota: trascurare la variazione di massa dovuta al funzionamento dei motori e considerare la Terra sferica ($R_T = 6380$ km)

Soluzione:

1. Le velocità si ricavano direttamente dalla formula (7.4):

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} = 7611\ m/s\ , \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} = 7112\ m/s$$

   ponendo $r_1 = 6880$ km e $r_2 = 7880$ km.

2. L'orbita di trasferimento è necessariamente una conica perché la capsula a parte i brevi intervalli di accensione dei motori, è sempre in moto libero, cioè sotto l'effetto della sola forza di gravità della Terra: questa si trova quindi in uno dei fuochi della conica. Avendo fissato la direzione di spinta dei motori (parallela al moto), l'orbita di trasferimento deve risultare tangente alle due orbite circolari: l'unica conica che può verificare le condizioni imposte è un'ellisse, di cui viene percorsa esattamente una metà tra il punto più prossimo alla Terra (perielio) e il punto più lontano (afelio), come indicato in figura (7.8).

3. Si indichi con v_p la velocità subito dopo l'accensione dei motori (quando la capsula è ancora a distanza r_1 dalla Terra, nel perielio dell'ellisse) e analogamente con v_a la velocità subito prima della seconda accensione dei motori (quando la capsula ha raggiunto l'afelio dell'orbita di trasferimento a distanza r_2). Per la conservazione dell'energia e per la seconda legge di Keplero (7.1), tra perielio e afelio, si può scrivere:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM_T}{r_1^2} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM_T}{r_2^2} \\ r_1 v_p = r_2 v_a \end{cases} \tag{7.19}$$

   Risolvendo il sistema di equazioni, si ottiene le seguenti soluzioni:

$$v_p = 7867\ m/s\ , \quad v_a = 6870\ m/s\ .$$

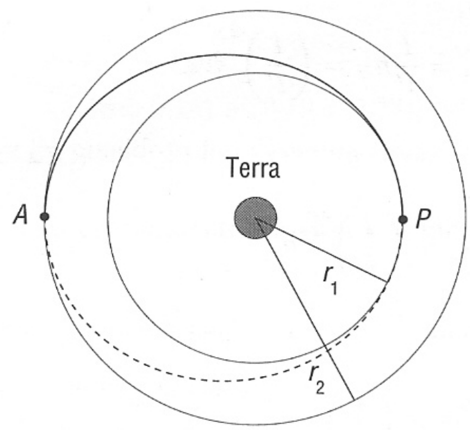


Figura 7.8: Orbita di trasferimento: sono indicati il perielio (P) e l'afelio (A).

4. Per la prima accensione, le velocità prima e dopo l'accensione sono date rispettivamente da 7611 m/s e 7867 m/s, per cui $\Delta v_1 = 256$ m/s. Dal teorema dell'impulso, si ottiene:

$$F\Delta t_1 = m\Delta v_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_1 = 20.3 \; sec$$

Analogamente, $\Delta v_2 = (7112 - 6870)$ m/s $= 242$ m/s, per cui $\Delta t_2 = 19.6$ sec.

5. Il tempo t necessario alla manovra è la metà del periodo T dell'orbita ellittica il cui semiasse maggiore è dato da $a = (r_1 + r_2)/2$. Dalla terza legge di Keplero, si ottiene che:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \Rightarrow \quad T = 6307 \; sec$$

Perciò il tempo richiesto è di $t = T/2 = 3154 \; s = 52'34''$. Le accensioni sono quindi trascurabili rispetto al tempo di trasferimento.

7.7.3 La galleria nella Terra

Supponiamo che sia stata scavata una galleria che attraversi la Terra dall'uno all'altro polo, come in figura(7.9). Ammettiamo che la Terra sia una sfera omogenea, e che non giri. Trovare la forza che agisce su una particella di massa m lasciata cadere nella galleria in funzione della distanza r dal centro della Terra. Che movimento si genera?

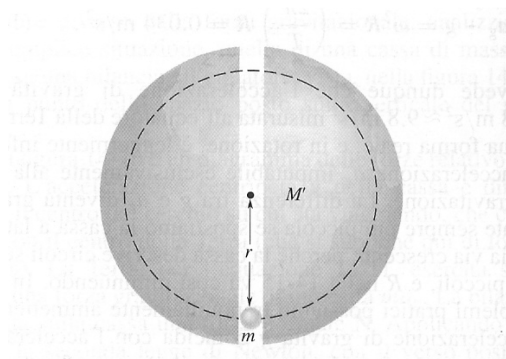


Figura 7.9: Una particella è lasciata cadere in una galleria scavata attraverso la Terra.

Soluzione: la forza che agisce sulla particella dipende solo dalla massa M' della Terra che è contenuta in una sfera di raggio r. Come visto nel paragrafo precedente, la parte esterna a questa sfera non esercita nessuna forza complessiva sulla particella.

La massa M' vale:

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3} \ ,$$

dove V' è il volume occupato da M' e

$$\rho = M_T / V_T = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$$

è la densità della Terra, se considerata omogenea. La forza che agisce sulla particella è quindi:

$$F = -\frac{GmM'}{r^2} = -\frac{GmM_T}{R_T^3}\ r = -Kr \tag{7.20}$$

dove la costante K vale GmM_T/R_T^3. Come si può notare da (7.20), la forza che agisce sulla particella è proporzionale al suo spostamento dal centro (equilibrio) ma diretta in senso opposto, proprio come una forza elastica. Perciò il movimento risultante sarà un'oscillazione attorno al centro della Terra. Si può anche calcolarne il periodo di oscillazione, dato dalla formula (5.25)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{gR_T} = 49670\ s = 13.8\ h$$

7.8 Problemi

Esercizio 58 A una altezza h sul livello del mare, con h pari a tre volte il raggio terrestre, quanto vale l'accelerazione di gravità g ? Motiva la tua risposta.

A sempre g

B 9 volte g

C 1/9 volte g

D 16 volte g

E 1/16 di g

F non ci sono elementi sufficienti per rispondere

Esercizio 59 Due signore di ugual peso devono seguire la stessa dieta durante una vacanza sulla Luna. La signora Rossi misura gli alimenti da ingerire con una bilancia a due piatti, la signora Bianchi con un dinamometro. Quando ritornano sulla Terra, si pesano nuovamente e si accorgono che qualcosa nella dieta non ha funzionato. Che cosa e perché?

Esercizio 60 La massa del Sole è circa 900 volte quella di Giove, che è di $2,0 \cdot 10^{27}$ kg. In quale rapporto stanno la forza che esercita Giove sul Sole rispetto a quella che il Sole esercita su Giove?

A 1:1

B 900:1

C 1:900

D 1:30

E Nessuna delle precedenti

Esercizio 61 La distanza media di Saturno dal Sole è 9,54 UA. Qual è il periodo di Saturno? (1 UA=$1,50 \cdot 10^{11}$)

Esercizio 62 La cometa Kohoutek ha un periodo valutato di almeno 106 anni. Qual è la sua distanza media dal Sole?

Esercizio 63 Considera l'asse Terra-Luna. Qual è la distanza dalla Terra su questo asse per la quale la forza gravitazionale della Luna annulla quella della Terra?
($M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg)

Esercizio 64 La famosa cometa di Halley è un ammasso di ghiaccio e polvere che compare nei pressi della Terra ogni 76 anni. La sua distanza minima dal Sole può essere calcolata durante i suoi passaggi ed è pari a 0.6 unità astronomiche; un'unità astronomica è equivalente alla distanza (media) fra la Terra e il Sole, vale a dire 149.598.000 km. La sua distanza massima è però troppo grande per permettere agli strumenti terrestri di valutarla. Come potresti darne una buona stima (in unità astronomiche)?
Sugg: sfrutta le leggi di Keplero e occhio alle unità di misura!

Esercizio 65 Calcola la forza attrattiva gravitazionale che esercita una donna di 60 kg su un uomo di 70 kg che si trova a una distanza di 2 metri. Per quanto tempo almeno bisognerebbe applicare una forza della stessa intensità per spostare la donna di 10 cm, trascurando gli attriti?

Esercizio 66 Voglio comprare oro e rivenderlo, spostandomi fra Equatore e Polo Nord, usando una bilancia digitale tarata con $g = 9.81$. Considerando la terra perfettamente sferica ($R = 6400$ km), motivando la risposta, quale scelta conviene fare?

A Comprarlo all'Equatore e rivenderlo al Polo Nord;

B comprarlo al Polo Nord e rivenderlo all'Equatore;

C non cambia nulla.

Esercizio 67 Un corpo viene lasciato cadere da una quota di 6370 km sopra la superficie della Terra. Quanto vale la sua accelerazione iniziale?

Esercizio 68 Si trovi la velocità di fuga per un razzo che parta dalla Luna. L'accelerazione di gravità sulla Lunaè 1/6 di quella sulla Terra e il raggio della Luna è $0,273\ R_T$.

Esercizio 69 La Terra gira attorno al Sole su un'orbita quasi circolare di raggio 1 UA. Il suo periodo è di 1 anno. Si usino questi dati per calcolare la massa del Sole.

Esercizio 70 Una delle lune di Giove, Io, ha il raggio medio dell'orbita pari a $4,22 \cdot 10^8 Mm$ e il periodo di $1,53 \cdot 10^5$ s.

a) Si trovi il raggio medio dell'orbita di un'altra luna di Giove, Callisto, il cui periodo è $1,44 \cdot 10^6$ s

b) Si usi il valore noto di G per calcolare la massa di Giove.

Esercizio 71 Una particella viene lanciata dalla superficie della Terra con una velocità pari al doppio della velocità di fuga. Qual è la sua velocità quando essa è molto lontana dalla Terra?

Esercizio 72 La massa di Saturno è di $5,69 \cdot 10^{28}$ kg. Un corpo celeste che ruota attorno a Saturno possiede un periodo valutato a circa 97 anni. Il suo punto di massimo avvicinamento è di $3,6 \cdot 10^{10}$ m.

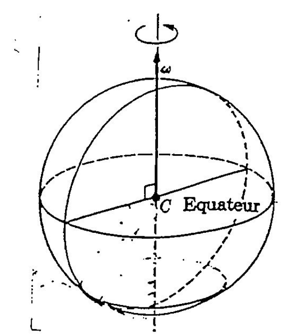
a) Qual è la sua distanza media da Saturno?

b) Che velocità possiede al perielio e all'afelio della sua orbita?

Esercizio 73 La Terra compie un giro attorno al suo asse in 24 ore, corrispondente al nostro giorno. Supponiamo che il peso $P = mg$ di una persona sia riferito alla posizione all'Equatore e assumiamo il raggio equatoriale pari a 6400 km.

a) Di quanto cambia il peso di una persona di 80 kg se viene calcolato al Polo Nord (sull'asse di rotazione)?

b) Determina quanto dovrebbe essere lungo un giorno affinché il peso della persona scenda a 60 kg.



7.8.1 Qualche Soluzione

Soluzione 58: Risposta D

Soluzione 59: La signora Bianchi è ingrassata. Il dinamometro indica meno del peso terrestre.

Soluzione 60: Risposta A, per il terzo principio.

Soluzione 61: 29,5 anni.

Soluzione 63: $d = 0.9$ volte la distanza Terra-Luna dalla Terra.

Soluzione 64: 35,28 UA.

Soluzione 65: $7 \cdot 10^{-8}$ N; 3.73 h;

Soluzione 66: Risposta A.

Soluzione 67: 2.45 m/s^2.

Soluzione 68: 8604.9 km/h

Soluzione 71: 13.6 km/s

Soluzione 72: a) $9,653 \cdot 10^{11}$ m; b) $v_p = 14,85$ km/s; $v_a = 0,273$ km/s .