BAB II
PENGANTAR SOLUSI PERSOALAN FISIKA MENURUT PENDEKATAN ANALITIK DAN NUMERIK

Tujuan Instruksional

Setelah mempelajari bab ini pembaca diharapkan dapat:

1. Menjelaskan cara penyelesaian soal dengan pendekatan analisis analitik.
2. Menjelaskan metode numerik sebagai alternatif penyelesaian soal Fisika.
3. Menjelaskan definisi metode Euler.
4. Mengaplikasikan metode Euler dalam pemecahan berbagai masalah.
5. Menganalisis penggunaan metode Leapfrog untuk menyelesaikan suatu soal menurut analisis numerik.
6. Menganalisis penggunaan metode Euler-Cromer untuk menyelesaikan suatu soal menurut analisis numerik.
7. Menjelaskan konsep integral menurut pendekatan analitik dan numerik.
8. Menggunakan teknik pengintegralan numerik untuk menyelesaikan suatu soal.
9. Menjelaskan konsep *error* atau kesalahan dalam analisis numerik.
10. Menjelaskan syarat-syarat nilai *increment* yang memenuhi suatu persamaan numerik.

Pendahuluan

Fisika merupakan bagian dari ilmu pengetahuan alam yang tidak dapat lepas dari matematika. Matematika berperan sebagai alat untuk menjelaskan fenomena fisika secara kuantitatif. Tujuan penggunaan matematika adalah mempermudah pemecahan masalah berdasarkan kaidah-kaidah matematika. Secara umum metode pemecahan persoalan fisika dibagi menjadi dua yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik akan menghasilkan solusi suatu persoalan yang bersifat eksak sedangkan metode numerik akan menghasilkan solusi suatu persoalan bersifat pendekatan. Metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memformulasikan suatu persamaan matematis sehingga persamaan tersebut dapat diselesaikan hanya dengan menggunakan operasi hitungan. Dari sekian banyak metode numerik selalu ada kesamaan yaitu metode numerik selalu mencakup sejumlah perhitungan yang banyak (ditandai dengan angka-angka).

Metode numerik biasanya digunakan untuk memecahkan persoalan yang tidak dapat dipecahkan secara eksak atau sulit dicari penyelesaiannya baik karena sifatnya yang tidak linear maupun terlalu rumitnya persamaan matematika yang digunakan. Sebagai contoh, biasanya persoalan gerak satu dimensi dibahas berdasarkan konsep idealisasi seperti dengan mengabaikan hambatan udara padahal pada kenyataannya masalah gerak satu dimensi seperti dalam kasus gerak jatuh bebas adalah sangat kompleks. Pada kenyataannya percepatan gerak jatuh dengan memperhitungkan hambatan udara akan mengalami gaya hambat udara yang besarnya tergantung pada kecepatan benda tersebut sehingga percepatan benda tidaklah konstan.

Banyak persoalan fisika yang melibatkan persamaan matematis yang rumit sehingga dibutuhkan kemampuan khusus untuk dapat menguraikan persamaan tersebut agar dapat menjelaskan makna fisisnya. Sebagai contoh suatu sistem ayunan terdiri atas sebuah beban dengan massa m, panjang tali l dan bermuatan listrik (q) diberi simpangan awal dengan amplitudo yang selalu berubah-ubah sebesar (F_D) dan kecepatan sudut (ω_D) sehingga persamaan differensialnya dinyatakan dengan persamaan berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) + q\frac{dq}{dt} - F_D\sin(\Omega_D t) = 0 \qquad \ldots(2.1)$$

persamaan differensial (2.1) cukup sulit untuk dipecahkan meskipun masih linear. Sedangkan untuk kasus ayunan sederhana yang terdiri atas sebuah beban yang diikatkan pada seutas tali yang kemudian diberi simpangan yang cukup kecil tanpa melibatkan adanya muatan listrik (q) dan amplitudo yang selalu berubah (F_D) tentu secara mudah kita dapat menyatakan persamaan differensialnya sebagai berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad ...(2.2)$$

dengan asumsi bahwa ayunan terjadi dengan sudut kecil sin θ ≈ θ tertentunya di luar kepala, kita ketahui solusi persamaannya adalah

$$\theta = \theta_0 Cos\ (\omega t + \delta) \qquad \ldots(2.3)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \omega\ Sin\ (\omega t + \delta\ ) \qquad \ldots(2.4)$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0 \omega^2\ Cos\ (\omega t + \delta) \qquad \ldots(2.5)$$

dengan $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Persamaan (2.3) sampai (2.5) disebut penyelesaian analitik karena secara eksak memenuhi persamaan differensial ayunan sederhana (persamaan (2.2)). Sayangnya banyak persoalan fisika yang dinyatakan dalam model matematis yang susah bahkan tidak bisa diselesaikan secara analitik. Sebagai contoh kita dapat menerapkan hukum-hukum Newton pada suatu soal tentang sebuah partikel yang berada dibawah pengaruh bermacam-macam gaya sehingga percepatan partikel dapat ditentukan berdasarkan persamaan a = F_{netto}/m. Jika kecepatannya konstan secara mudah dapat ditentukan kecepatan serta posisinya, namun bagaimana jika percepatannya tidak konstan tetapi tergantung pada posisi atau kecepatannya? Sebagai contoh gerak partikel yang dipengaruhi oleh gaya hambatan, seperti selembar kertas yang dijatuhkan di udara. Pada kasus tersebut untuk menentukan kecepatan dan posisi partikel secara analitik adalah sangat sulit bahkan tidak mungkin.

A. Metode Euler

Ide dasar penggunaan teknik numerik untuk menyelesaikan persoalan fisika adalah bagaimana menyelesaikan persoalan fisika dengan karakteristik non linear dengan hanya menggunakan operasi hitungan sehingga soal serumit apapun dapat diselesaikan dengan mudah. Secara ringkas metode Euler akan dijelaskan dalam uraian berikut. Misalkan terdapat suatu soal yang dinyatakan dengan fungsi

y (t) maka persamaan turunan pertamanya adalah $\frac{dy}{dt} = f(t)$ dengan kondisi awal misalkan pada t = 0 nilai y = y_0. Berdasarkan definisi limit maka untuk selang waktu yang cukup kecil nilai dari $\frac{dy}{dt}$ dapat kita nyatakan dengan persamaan berikut

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \approx \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \qquad \ldots(2.6)$$

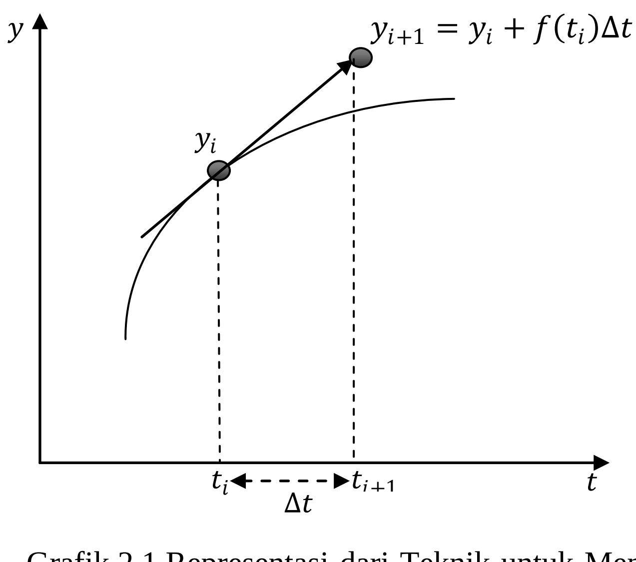
Tujuan kita adalah memperkirakan nilai y untuk nilai t yang lain. Dengan asumsi bahwa waktu adalah variabel diskret maka berlaku $t = i\,\Delta t$ untuk i = 0,1,2…n (bilangan bulat). Jika nilai y pada ukuran waktu i dinyatakan sebagai y_i maka persamaan (2.6) dapat kita nyatakan dalam bentuk lain yaitu

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t} \approx f(t_i) \qquad \ldots(2.7)$$

atau

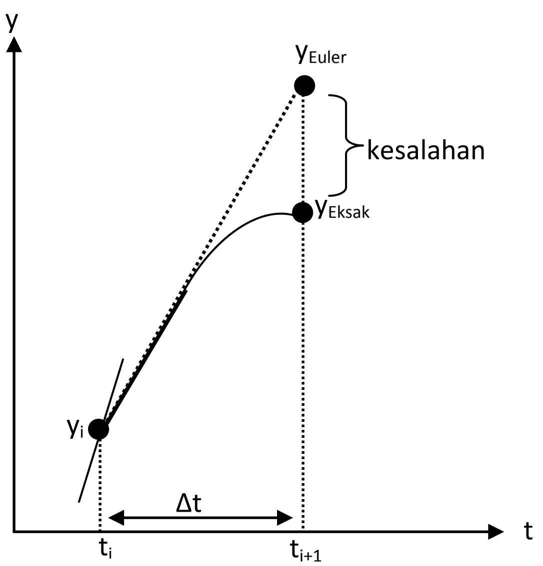
$$y_{i+1} = y_i + f(t_i)\Delta t \qquad \ldots(2.8)$$

dengan demikian jika nilai y pada ukuran waktu i diketahui maka kita dapat menentukan nilai y berikutnya pada ukuran waktu berikutnya yaitu pada ukuran waktu i+1 sebanyak ukuran waktu yang dikehendaki. Metode ini disebut metode Euler.



Grafik 2.1 Representasi dari Teknik untuk Menentukan Solusi Numerik dengan Metode Euler

Grafik (2.1) merupakan representasi grafik dari persamaan (2.8), oleh karena itu berdasarkan persamaan dan grafik tersebut, perkiraan gradient $f(t_i)$ pada y_i dapat digunakan untuk menentukan nilai y_{i+1} untuk interval waktu Δt. Namun demikian, karena sebuah grafik biasanya memiliki banyak kelengkungan maka tentu saja grafik tersebut akan banyak memiliki nilai gradien, akibatnya solusi numerik yang diperoleh dengan memilih salah satu nilai dari sekian banyak nilai gradien suatu grafik tentu saja akan menghasilkan solusi yang berbeda dengan solusi yang diperoleh menurut pendekatan analitik (eksak) seperti digambarkan dalam grafik berikut.



Grafik 2.2 Interpretasi Geometri Metode Euler

Berdasarkan grafik (2.2), $f(t_i)$ merupakan gradien dari fungsi $y(t)$ pada ukuran waktu i. Gradien ini dipergunakan untuk memperkirakan nilai y pada ukuran waktu (i+1) dengan asumsi bahwa y selalu linear pada interval ini. Fungsi $y(t)$ pada grafik (2.2) memiliki beberapa kelengkungan/gradien, berarti perkiraan Euler menimbulkan kesalahan. Besarnya kesalahan ini dapat diketahui dari selisih antara nilai solusi dengan metode Euler dengan solusi eksaknya. Berdasarkan grafik (2.2) dapat kita ketahui bahwa untuk menentukan nilai y_{i+1} dari nilai y_i sepanjang interval waktu Δt kita hanya menggunakan nilai gradien pada titik y_i padahal sepanjang interval waktu tersebut terdapat banyak gradiennya. Hal inilah yang menyebabkan metode Euler mengandung kesalahan namun demikian dengan memilih nilai *Increment*/interval waktu yang tepat metode Euler terbukti cukup ampuh dalam menyelesaikan berbagai persoalan.

Contoh 2.1

Menurut hukum kedua Newton jika y menyatakan posisi benda maka turunan kedua dari posisi benda tersebut sama dengan gaya yang bekerja pada benda dibagi massanya sehingga secara matematis dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

dengan teorema turunan persamaan tersebut dapat diuraikan menjadi

$$\frac{dy}{dt} = v$$

dan

$$\frac{dv}{dt} = f$$

dengan menggunakan Euler tentukan bagaimanakah solusi numerik untuk kecepatan dan posisinya?

Penyelesaian

Berdasarkan teori Euler maka solusi numerik untuk kecepatan dan posisinya dapat kita nyatakan dengan

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = v$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = v$$

$$y_{i+1} = y_i + v_i\,\Delta t$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$v_{i+1} = v_i + f(y_i)\,\Delta t$$

dimana $f(y_i)$ menyatakan fungsi turunan keduanya.

B. Metode Leapfrog

Berdasarkan penjelasan sebelumnya kita tahu bahwa jika terdapat grafik hubungan antara y terhadap t kemudian kita pilih dua titik yaitu y_i dan y_{i+1} kemudian antara titik y_i dan titik y_{i+1} dihubungkan dengan suatu garis maka akan terbentuk suatu kurva yang memiliki banyak gradien di sepanjang kurva tersebut. Dengan penggunaan metode Euler yang hanya menggunakan satu gradien di titik awal interval (titik y_i pada t_i) tentu saja menyebabkan kesalahan yang ditimbulkan semakin besar karena mengabaikan gradien lain di sepanjang kurva tersebut.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk meningkatkan ketelitian perhitungan numerik dengan metode Euler adalah dengan menggunakan metode Leapfrog. Prinsip dasar penggunaan metode Leapfrog adalah nilai tengah dari intervalnya. Misalkan ada sebuah fungsi yang dinyatakan dengan persaman berikut

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = f$$

berdasarkan metode Euler solusi numerik untuk y dan v dinyatakan sebagai

$$y_{i+1} = y_i + v_i \, \Delta t \qquad \ldots(2.9)$$

dan

$$v_{i+1} = v_i + f(y_i) \, \Delta t \qquad \ldots(2.10)$$

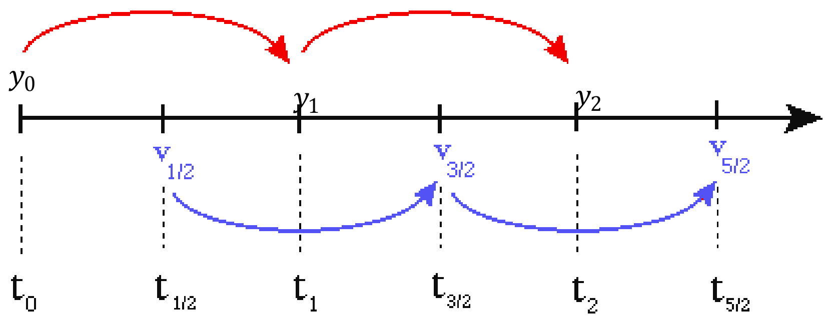
berdasarkan penjelasan di atas maka dengan menggunakan metode leapfrog nilai v yang dipergunakan adalah nilai v pada titik tengah intervalnya sehingga persamaan (2.9) dapat kita tuliskan menjadi

$$y_{i+1} = y_i + v_{i+\frac{1}{2}} \, \Delta t \qquad \ldots(2.11)$$

tentu saja akan timbul pertanyaan, bagaimana mungkin kita dapat menentukan nilai y_{i+1} padahal kita belum tahu nilai dari $v_{i+\frac{1}{2}}$. Dengan cara yang sama kita dapat menentukan solusi numerik dengan metode leapfrog untuk persamaan (2.10) yaitu

$$v_{i+\frac{3}{2}} = v_{i+\frac{1}{2}} + f(y_{i+1}) \, \Delta t \qquad \ldots(2.12)$$

karena kita mengetahui nilai y_{i+1} maka kita dapat menentukan nilai y berikutnya secara mudah seperti disajikan dalam grafik berikut.



Grafik 2.3 Interpretasi Geometri Metode Leapfrog

Selain menggunakan cara di atas, kita juga dapat menyatakan metode Leapfrog dengan cara lain dengan uraian sebagai berikut. Misalkan posisi sebuah benda dinyatakan pada waktu t_i, t_{i+1}, ... t_{i+n} dengan interval waktu yang konstan Δt, sedangkan kecepatan ditetapkan pada nilai tengah waktunya yakni $t_{i-1/2}, t_{i+1/2}, t_{i+3/2}$ dimana $t_{i+1} - t_{i+1/2} = t_{i+1/2} - t_i = \frac{\Delta t}{2}$ maka nilai y dan v dinyatakan dengan persamaan

$$y_i = y_{i-1} + v_{i-1/2}\Delta t$$

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} + (y_i, t_i)\ \Delta t$$

dengan menetapkan bahwa semua besaran merupakan bilangan bulat, maka nilai y dan v dapat juga kita nyatakan dengan persamaan

$$y_{i+1} = y_i + v_i\ \Delta t + \frac{1}{2} f(y_i)\ \Delta t^2 \qquad \text{…(2.13)}$$

$$v_{i+1} = v_i + (f(y_i) + f(y_{i+1}))\ \Delta t/2 \text{…(2.14)}$$

persamaan (2.11) sampai (2.14) adalah identik. Untuk pembuktian persamaan (2.13) dan (2.14) dipersilahkan Anda membuktikan sendiri.

C. Metode Euler-Cromer

Dalam banyak kasus di bidang fisika, penggunaan turunan kedua untuk menyelesaikan suatu persoalan sering ditemui. Sebagai contoh, jika y menyatakan posisi sebuah benda, maka berdasarkan hukum Newton II dapat diketahui bahwa turunan kedua $\frac{d^2y}{dt^2}$ sama dengan besarnya gaya yang bekerja dibagi dengan masa benda. Apabila kita mendefinisikan variabel baru yaitu $\frac{dy}{dt} = v$ maka kita dapat mengubah persoalan tersebut menjadi dua persamaan differensial orde satu sebagai berikut

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = f$$

berdasarkan metode Euler maka solusi numerik untuk posisi dan kecepatannya dinyatakan sebagai

$$y_{i+1} = y_i + v_i\ \Delta t$$

dan

$$v_{i+1} = v_i + f(y_i)\ \Delta t$$

dengan mengingat penjelasan sebelumnya, dapat kita ketahui bahwa seiring dengan bertambahnya waktu, kesalahan solusi numerik untuk posisi dan kecepatan semakin besar karena mengabaikan gradien lain disepanjang kurva y terhadap t.

Untuk meningkatkan ketelitian solusi numerik pada persoalan tersebut apabila menggunakan metode Leapfrog, dilakukan dengan mengambil titik tengah intervalnya maka dalam metode Euler Cromer untuk meningkatkan ketelitian tidak dilakukan dengan mengambil titik tengah intervalnya namun dalam perhitungan, f_2 pada $i+1$ bukan pada i sehingga menurut metode Euler-Cromer *y* dan *v* dapat dinyatakan dengan persamaan

$$y_{i+1} = y_i + v_i \, \Delta t \qquad \ldots(2.15)$$

dan

$$v_{i+1} = v_i + f(y_{i+1}) \, \Delta t \qquad \ldots(2.16)$$

Apabila menggunakan metode Euler, maka nilai *v* dan *y* sebelumnya dipakai untuk menghitung nilai *v* dan *y* yang baru sedangkan berdasarkan persamaan (2.15) dan (2.16) dapat kita simpulkan bahwa dengan metode Euler-Cromer nilai *v* dan *y* sebelumnya dipakai untuk menghitung nilai *y* yang baru akan tetapi nilai *y* yang baru dipergunakan untuk menghitung nilai *v* yang baru.

D. Integral

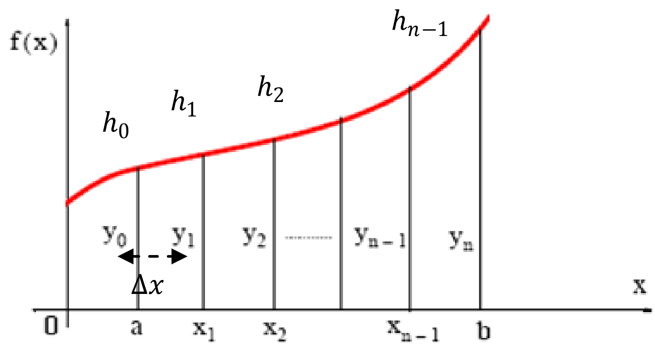
Di dalam kalkulus istilah turunan dan integral merupakan istilah yang selalu menjadi salah satu kajian utamanya. Secara matematis turunan diartikan sebagai laju perubahan dari suatu variabel terikat terhadap variabel bebasnya sedangkan integral secara matematis diartikan sebagai penjumlahan dari suatu fungsi terhadap suatu variabel bebas yang dihitung dari suatu batas tertentu. Di dalam kalkulus, materi integral biasanya dimulai dengan integral tertentu yang sering dinyatakan dengan persamaan

$$f = \int_a^b f(x) dx \qquad \ldots(2.17)$$

Persamaan (2.17) menyatakan penjumlahan fungsi $f(x)$ terhadap variabel bebas x yang dihitung antara batas $x = a$ sampai $x = b$. Dengan menggunakan teori dasar kalkulus tentu sangat mudah untuk menghitung nilai integralnya, akan tetapi masalah yang kemudian timbul adalah bahwa tidak selalu mungkin suatu soal integral dapat diselesaikan dengan teori dasar kalkulus tersebut. Sebagai contoh, akan dicari penyelesaian integral dari $e^{-x^3}dx$ atau $\sqrt{1 + x^4dx}$. Untuk menyelesaikan kedua soal tersebut tentu cukup rumit, sehingga dibutuhkan metode khusus seperti metode numerik untuk menyelesaikannya, misalkan dengan metode Simpson atau segi empat trapesium (*trapezoid*).

1. Metode Trapesium

Metode trapesium menyatakan bahwa luas suatu daerah di bawah suatu kurva sama dengan jumlah total semua bagian dibagi segmen kurva tersebut yang dibagi dalam bentuk trapesium seperti grafik berikut.



Grafik 2.4 Kurva Fungsi f(x) yang Nilainya Berubah dari a sampai b yang Dibagi dalam Segmen-Segmen Kecil

Grafik (2.4) menunjukkan suatu kurva fungsi f(x) nilainya berubah dari a sampai b. Untuk menghitung integral $f = \int_a^b f(x)dx$ dari a sampai b dengan menggunakan metode trapezium dilakukan dengan membagi interval a ≤ x ≤ b dengan n sehingga masing-masing segmen dari trapezium memiliki panjang

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

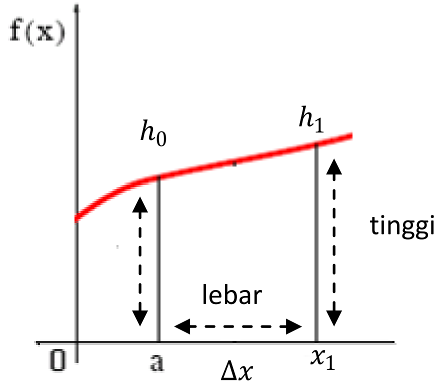
sehingga panjang total trapezium dari $x_0 = a$ sampai $x_n = b$ merupakan penjumlahan panjang tiap segmen trapesium $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$ dengan

$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$$

luas keseluruhan segemen trapezium tersebut secara umum dapat dinyatakan dengan

$$f = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \qquad \ldots(2.18)$$

Integral tersebut dapat didekati dengan menghitung luas trapesium dengan uraian sebagai berikut.



Grafik 2.5 Interprestasi Penentuan Luas Trapesium

Grafik (2.5) mendeskripsikan tentang teknik penghitungan luas tiap segmen dari trapezium untuk grafik (2.4). Grafik (2.5) merupakan segmen pertama dari grafik (2.4) untuk trapezium $ah_0h_1x_1$ dengan lebar $\Delta x = x_1 - a$ dan tinggi h_0 dan h_1. Secara umum luas trapezium dirumuskan sebagai lebar dikalikan rata-rata tingginya oleh karena itu luas trapezium $ah_0h_1x_1$ adalah $\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x$ sedangkan luas trapezium $x_1h_1h_2x_2$ adalah $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x$. Dengan demikian luas daerah di bawah kurva $f(x)$ berdasarkan aturan trapezium dapat dinyatakan dengan persamaan

$$A = 0.5(y_0 + y_1)\Delta x + 0.5(y_1 + y_2)\Delta x \quad ... + 0.5(y_{n-1} + y_n)\Delta x \qquad \text{…(2.19)}$$

$$A = (0.5y_0 + y_1 + y_2 ... + y_{n-1} + 0.5y_n)\Delta x \qquad \text{…(2.20)}$$

Contoh 2.2

Dengan menggunakan aturan trapezium dengan n = 4 tentukan hasil integral dari $\int_1^2 2x^2 dx$ kemudian bandingkan hasilnya dengan nilai eksaknya.

Penyelesaian

Nilai eksak dari integral tersebut adalah

$$\int_1^2 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 I_1^2 = \frac{14}{3} = 4,6666$$

Sedangkan dengan pendekatan metode segi empat diperoleh

$x_0 = a = 1$
$x_n = b = 2$

n = 4

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$y = f(x) = x^2$

Untuk mempermudah perhitungan maka koefisien 2 dikeluarkan dari integral sehingga

$x_0 = a = 1 \rightarrow y_0 = f(x_0) = 1^2 = 1$

$x_1 = a + \Delta x = \frac{5}{4} \rightarrow y_1 = f(x_1) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

$x_2 = a + 2\Delta x = \frac{6}{4} \rightarrow y_2 = f(x_2) = \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$

$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{7}{4} \rightarrow y_3 = f(x_3) = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$

$x_4 = b = 2 \rightarrow y_4 = f(x_4) = (2)^2 = 4$

Apabila nilai-nilai tersebut disubstitusikan dalam persamaan (2.12) akan diperoleh

$$A = \left(0.5(1) + \left(\frac{25}{16}\right) + \left(\frac{36}{16}\right) + \left(\frac{49}{16}\right) + 0.5(4)\right)0.25 = 2.34375$$

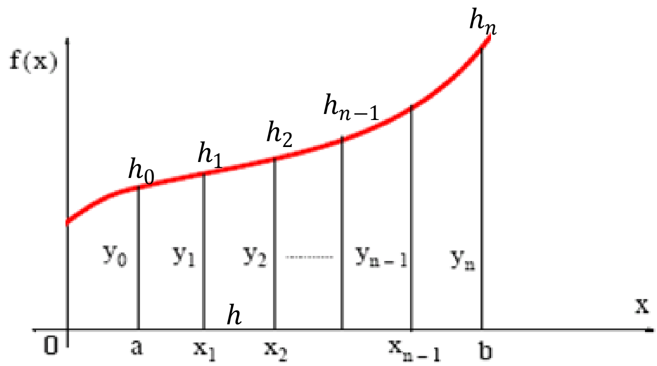
Jadi luas integralnya adalah $2x2.34375 = 4{,}6875$

Apabila nilai perhitungan dengan pendekatan aturan trapesium dibandingkan dengan nilai eksaknya akan memiliki kesalahan sebesar

$\%\, kesalahan = \frac{4{,}6875 - 4{,}6666}{4{,}6666} 100 = 0{,}45\%$

2. Metode Simpson

Dengan menggunakan metode trapezium kita dapat menghitung nilai integral suatu persamaan yang luasnya dibagi menjadi banyak segmen yang kecil dengan menghitung luas tiap segmen yang dihubungkan dengan dua titik, kemudian menjumlahkan total luas semua segmennya. Namun demikian, kita juga dapat menghitung luas di bawah kurva tersebut dengan menghitung luas tiap segmen yang dihubungkan dengan tiga buah titik sehingga kita dapat menghubungkan ketiga titik segmen tersebut menjadi kurva berbentuk parabola. Metode perhitungan integral yang menggunakan tiga titik sehingga dapat dihubungkan membentuk kurva parabola disebut sebagai metode Simpson.

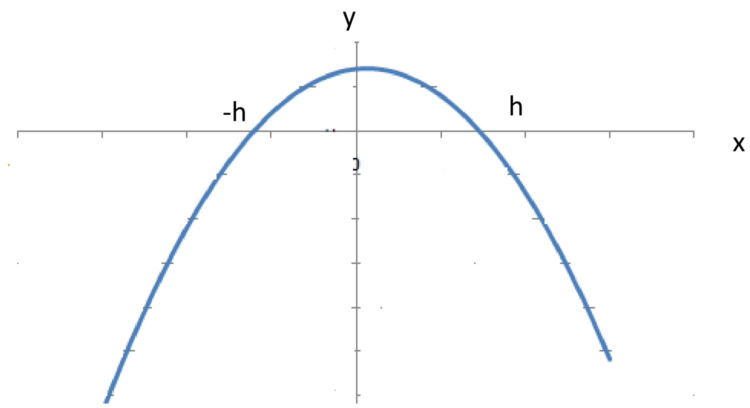


Grafik 2.6 Kurva Fungsi f(x) yang Nilainya Berubah dari a sampai b yang Dibagi dalam Segmen-Segmen Kecil

Grafik (2.6) menunjukkan suatu kurva fungsi f(x) nilainya berubah dari a sampai b. Apabila interval dari a sampai b kita bagi dengan n maka masing-masing segmen memiliki panjang

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Untuk menentukan luas kurva di bawah fungsi f(x) tersebut dapat dilakukan dengan menghitung luas tiap segmen kemudian menjumlahkannya. Sebagai langkah awal misalkan kita akan menghitung luas dari kurva a$y_0y_1y_2x_2$ dengan cara berikut. Kita menggambarkan kurva a$y_0y_1y_2x_2$ sebagai parabola pada sebuah koordinat (x,y) sedemikian rupa sehingga kurva tersebut memotong sumbu x dan y pada titik (-h_0, y_0), (0, y_1) dan (h_2, y_2). Karena nilai Δx pada tiap segmen selalu sama maka komponen absis dan ordinatnya dapat kita nyatakan sebagai (-h, y_0), (0, y_1) dan (h, y_2) sehingga kurva parabolanya dapat kita gambarkan sebagai berikut.



Grafik 2.7 Parabola y = Ax^2 + Bx + C yang Luasnya Dibatasi antara –h sampai h

Misalkan parabola pada grafik 2.7 memiliki persamaan

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad \ldots(2.21)$$

apabila dihitung dengan teknik integral maka luas di bawah parabola antara –h sampai h dapat dinyatakan dengan persamaan

$$L = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx$$

$$L = \frac{1}{3}h(2Ah^2 + 6C) \qquad \ldots(2.22)$$

apabila kita memasukkan komponen absis dan ordinat pada ketiga titik potong parabola ke dalam persamaan (2.21) akan kita peroleh

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C \qquad \ldots(2.23)$$

$$y_1 = C \qquad \ldots(2.24)$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C \qquad \ldots(2.25)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.24) ke dalam persamaan (2.23) dan (2.25) akan kita peroleh

$$y_0 = Ah^2 - Bh + y_1$$

atau

$$y_0 - y_1 = Ah^2 - Bh \qquad \ldots(2.26)$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + y_1$$

atau

$$y_2 - y_1 = Ah^2 + Bh \qquad \ldots(2.27)$$

apabila persamaan (2.26) dijumlahkan dengan persamaan (2.27) maka akan kita peroleh

$$2Ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2 \qquad \ldots(2.28)$$

Jika persamaan (2.24) dan (2.28) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.22) akan didapat

$$L = \frac{1}{3}h(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1)$$

$$L = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad \ldots(2.29)$$

dengan demikian luas kurva pada gambar (2.7) dapat kita tentukan dengan menjumlahkan semua luas

$$L = \mathrm{a}y_0y_1y_2x_2 + x_2y_2y_3y_4x_4 + \cdots x_{n-2}y_{n-2}y_{n-1}y_nb \qquad \ldots(2.30)$$

apabila persamaan (2.29) disubstitusikan pada a$y_0y_1y_2x_2$ dalam persamaan (2.30) maka akan kita peroleh luas total sebagai berikut

$$L_{total} = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \qquad \ldots(2.31)$$

dimana

$h = \frac{b-a}{n}$

dengan n adalah bilangan genap.

Contoh 2.3

Dengan menggunakan metode Simpson dengan n = 4 tentukan hasil integral dari $\int_1^2 2x^2dx$ kemudian bandingkan hasilnya dengan nilai eksaknya.

Penyelesaian

Nilai eksak dari integral tersebut adalah

$\int_1^2 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3I_1^2 = \frac{14}{3} = 4{,}6666$

Sedangkan dengan pendekatan metode Simpson diperoleh

x_0 = a = 1

x_n = b = 2

n = 4

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$y = f(x) = 2x^2$

sehingga

$x_0 = a = 1 \rightarrow y_0 = f(x_0) = 2x1^2 = 2$

$x_1 = a + \Delta x = \frac{5}{4} \rightarrow y_1 = f(x_1) = 2x\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 3{,}125$

$x_2 = a + 2\Delta x = \frac{6}{4} \rightarrow y_2 = f(x_2) = 2x\left(\frac{6}{4}\right)^2 = 4{,}5$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{7}{4} \rightarrow y_3 = f(x_3) = 2x\left(\frac{7}{4}\right)^2 = 6{,}125$$
$$x_4 = b = 2 \rightarrow y_4 = f(x_4) = 2x(2)^2 = 8$$

Apabila nilai-nilai tersebut disubstitusikan dalam persamaan (2.31) akan diperoleh

$$L = \big((1x1) + (4x3{,}125) + (2x4{,}5) + (4x6{,}125) + (1x8)\big) = 56$$

Jadi luas integralnya adalah

$$L_{total} = \frac{h}{3} * L$$

$$L_{total} = \frac{0{,}25}{3} * 56$$

$$L_{total} = 4{,}66666$$

Apabila nilai perhitungan dengan pendekatan aturan segi empat dibandingkan dengan nilai eksaknya akan memiliki kesalahan sebesar

$$\%\ kesalahan = \frac{4{,}66666 - 4{,}6666}{4{,}6666} 100 = 0\ \%$$

E. Persamaan Differensial

Salah satu persamaan yang sering ditemui dalam kasus-kasus fisika adalah persamaan differensial yang menggambarkan laju perubahan suatu variabel yang ditandai adanya turunan suatu fungsi tertentu. Suatu persamaan yang mengandung suku turunan disebut sebagai persamaan differensial. Misalkan dalam kasus ayunan sederhana posisi sudut terhadap waktu setiap saat diberikan oleh persamaan diffrensial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad \ldots(2.32)$$

Persamaan (2.32) memberikan hubungan antara fungsi waktu $\theta(t)$ dan turunan keduanya terhadap waktu $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$. Untuk menentukan posisi benda sebagai fungsi waktu, maka kita harus mencari fungsi $\theta(t)$ yang memenuhi persamaan tersebut. Hal ini dapat kita lakukan dengan cara menuliskan persamaan (2.32) sebagai

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad \ldots(2.33)$$

Berdasarkan persamaan (2.33) kita dapat mengetahui bahwa $\theta(t)$ merupakan fungsi yang turunan keduanya bernilai negatif terhadap fungsi itu sendiri dikalikan dengan faktor $\frac{g}{l}$. Salah satu fungsi yang memenuhi sifat ini adalah fungsi sinus maupun kosinus yang selengkapnya diuraikan dalam persamaan berikut.

$$\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(t) = -\cos(t)$$

Sifat ini tidak akan berubah jika fungsi kosinus dikalikan dengan sebuah konstanta θ_0. Untuk menentukan solusi analitik persamaan (2.33) kita lakukan dengan langkah coba-coba, misalkan kita coba bahwa solusinya persamaannya adalah

$$\theta = \theta_0 Cos\ (\omega t + \delta) \qquad \ldots(2.34)$$

Konstanta δ ini memungkinkan solusi yang dihasilkan merupakan gabungan fungsi sinus dan kosinus karena berdasarkan dalil trigonometri

$$Cos\ (\omega t + \delta) = Cos\ \omega t\ Cos\ \delta - sin\ \omega t\ sin\ \delta$$

$$Cos\ (\omega t + \delta) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Adanya konstanta θ_0, ω dan δ yang belum diketahui ini dapat digunakan untuk menentukan solusi umum persamaan (2.33). Tugas kita selanjutnya adalah menentukan nilai konstanta-konstanta tersebut dengan cara menurunkan dua kali persamaan (2.34) terhadap waktu sehingga akan kita peroleh

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \omega\ Sin\ (\omega t + \delta\ )$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0 \omega^2\ Cos\ (\omega t + \delta)$$

Apabila nilai-nilai di atas disubstitusikan ke dalam persamaan (2.33) akan kita peroleh

$$-\theta_0 \omega^2\ Cos\ (\omega t + \delta) = -\frac{g}{l}\theta \qquad \ldots(2.35)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.34) ke dalam persamaan (2.35) maka

$$-\theta_0 \omega^2\ Cos\ (\omega t + \delta) = -\frac{g}{l}\theta_0 Cos\ (\omega t + \delta)$$

Berdasarkan persamaan di atas dapat kita simpulkan bahwa ruas kanan dan kiri adalah sama dimana nilai $\omega^2 = -\frac{g}{l}$ sehingga dapat kita nyatakan bahwa persamaan $\theta = \theta_0 Cos\ (\omega t + \delta)$ merupakan solusi bagi persamaan ayunan sederhana.

Berdasarkan uraian di atas tidaklah salah apabila dikatakan bahwa untuk memecahkan persoalan fisika yang dinyatakan dengan persamaan differensial terkadang menjadi masalah yang cukup rumit karena membutuhkan keterampilan khusus dan metode-metode tertentu dalam memecahkan permasalahan tersebut. Namun demikian dengan menggunakan analisis numerik dengan bantuan komputer kita dapat lebih mudah memahami karakteristik persoalan fisika yang dinyatakan dalam persamaan differensial tersebut. Sebagai contoh adalah persamaan differensial untuk gerak jatuh bebas yang dinyatakan dengan persamaan

$$\frac{dy}{dt} = gt \qquad \ldots(2.36)$$

Persamaan (2.36) menggambarkan laju perubahan jarak yang ditempuh $y(t)$ selama waktu (t) untuk gerak jatuh bebas dari keadaan diam, dimana (g) menyatakan percepatan gravitasi. Secara mudah dengan mengintegrasikan persamaan (2.36) terhadap *dt* akan diperoleh solusi

$$y = \int gt\ dt$$

$$y = \frac{1}{2}\ gt^2 \qquad \ldots(2.37)$$

Jenis integrasi dimana persamaan differensial ditransformasi ke dalam persamaan aljabar disebut integrasi analitik yang akan menghasilkan solusi eksak, dalam contoh ini solusi eksaknya dinyatakan dengan persamaan (2.37). Adapun cara lain untuk menghitung y adalah dengan menggunakan integrasi numerik yang tidak membutuhkan langkah-langkah integrasi analitik (sangat bermanfaat jika Anda tidak tahu bagaimana cara mengintegralkannya). Metode paling sederhana yang biasanya digunakan dalam integrasi numerik adalah metode Euler. Berdasarkan definisi turunan persamaan (2.36) tersebut dapat dituliskan

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = g\ t_i \qquad \ldots(2.38)$$

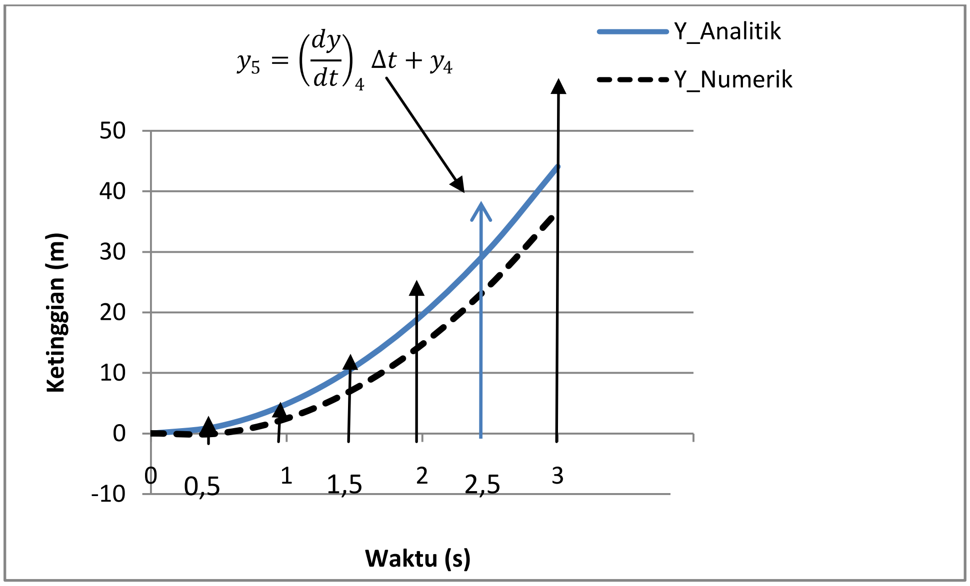
Kita dapat menyusun ulang persamaan (2.20) menjadi

$$y_{i+1} = \frac{dy}{dt}\Delta t + y_i$$

atau

$$y_{i+1} = g\ t_i \Delta t + \ y_i \qquad \ldots(2.39)$$

dimana Δt menyatakan panjang selang waktunya (t_{i+1}-t_i). Oleh karena itu jika nilai awal dari y diketahui sebesar y_0 maka kita dapat memecahkan persamaan ini untuk memperoleh $y_{1,}$ y_2 dan seterusnya. Sebagai contoh sebuah benda dijatuhkan dari ketinggian 40 m di atas tanah, maka dengan menggunakan *Spreadsheet* kita dapat menyatakan solusi analitik dan numeriknya selama 3 s dengan interval waktu 0,5 s dalam grafik berikut.



Grafik 2.8 Perbandingan Nilai-nilai Solusi Numerik dan Analitik Gerak Jatuh Bebas dengan Nilai *Increment* 0,5 s

Berdasarkan grafik (2.8) dapat disimpulkan bahwa ketinggian benda menurut analisis analitik selalu menggunakan persamaan $y = \frac{1}{2}\, gt^2$ dimana ketinggian benda setiap saat hanya ditentukan oleh nilai t. Sedangkan untuk analisis numeriknya rumus yang digunakan adalah $y_{i+1} = \frac{dy}{dt}\Delta t + y_i$ sehingga posisi benda tiap waktunya ditentukan dengan persamaan:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \Delta t + y_0$$
$$y_2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \Delta t + y_1$$
$$y_3 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_2 \Delta t + y_2$$
$$y_4 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_3 \Delta t + y_3$$
$$y_5 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_4 \Delta t + y_4$$

Dengan memperhatikan grafik (2.8) secara jelas kita temukan bahwa terdapat perbedaan nilai antara solusi numerik dan solusi analitik.

Perbedaan nilai antara solusi analitik dan numerik ini disebut dengan kesalahan.

F. Kesalahan-Kesalahan dalam Penggunaan Analisis Numerik

Analisis kesalahan karena penggunaan pendekatan numerik dalam menyelesaikan suatu masalah sangat penting karena tingkat kesalahan yang terjadi menentukan ketelitian dan ketepatan solusi yang kita dapatkan. Ketelitian mengacu pada nilai sebenarnya dari suatu besaran yang dihitung atau diukur, sedangkan ketepatan mengacu pada nilai individu yang sebenarnya yang diukur dan dihitung secara teliti terhadap nilai yang lain.

1. Kesalahan Pemotongan

Kesalahan pemotongan didefinisikan sebagai kesalahan yang diakibatkan karena menggunakan suatu pendekatan daripada menggunakan suatu prosedur matematis yang eksak. Sebagai contoh turunan posisi gerak jatuh bebas diaprokmasikan dengan memakai suatu persamaan beda terbagi hingga dengan persamaan berikut.

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i}$$

Kesalahan pemotongan perlu diketahui dalam analisis penyelesaian numerik karena persamaan beda terbagi hingga tersebut hanya merupakan pendekatan nilai turunan yang sebenarnya.

Salah satu persamaan matematis yang biasanya digunakan dalam metode numerik untuk menyatakan fungsi pendekatan adalah deret Taylor. Deret Taylor untuk suatu fungsi $y = f(x)$ secara teoritis menunjukkan perbedaan antara nilai *f(x)* pada dua *increment* x (xi dan x_{i+1}) yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i)f'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!}f''(x_i) + \cdots \quad \ldots(2.40)$$

dimana *f'(x)* menyatakan turunan pertamanya,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika kita hanya memperhitungkan suku pertama dari deret Taylor

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i)f'(x_i)$$

dengan metode Euler dapat dituliskan

$$y_{i+1} - y_i = \frac{dy}{dx}(x_{i+1} - x_i) \quad \ldots(2.41)$$

dengan mengabaikan suku-suku lain maka akan menimbulkan kesalahan (E) sebesar

$$E = \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3!} f'''(x_i) + \cdots \qquad \ldots(2.42)$$

Berdasarkan contoh di atas persamaan grafitasi dapat dijabarkan sebagai berikut

$$f''(t_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = g$$

$$f'''(t_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right) = 0$$

Sehingga

$$E = \frac{(x_{i+1}-x_{i)})^2}{2!} g = \frac{\Delta t^2}{2} g \qquad \ldots(2.34)$$

berdasarkan persamaan (2.25) dapat disimpulkan bahwa dalam menganalisis gerak jatuh bebas dengan menggunakan metode numerik akan menghasilkan suatu solusi numerik yang mengandung kesalahan pemotongan sebesar $\frac{\Delta t^2}{2} g$ sehingga salah satu cara yang dapat digunakan untuk memperkecil kesalahan pemotongan adalah dengan memperkecil nilai *Increment* Δt.

Dalam menyelesaikan suatu soal fisika secara numerik terdapat tiga cara untuk mengurangi besarnya kesalahan yaitu 1) memakai solusi analitik jika masih memungkinkan; 2) mengurangi Δt (pada contoh di atas, E akan bernilai ¼ jika Δt bernilai ½); dan 3) memakai lebih dari satu suku di sebelah kanan deret Taylor. Apabila nilai *Increment* Δt diperkecil tentu saja akan menghasilkan perhitungan (*step*) yang lebih banyak dalam mencari solusi.

2. Kesalahan Pembulatan

Kesalahan pembulatan ini ditimbulkan karena komputer hanya menggunakan jumlah angka penting tertentu ketika melakukan suatu perhitungan. Sebagai contoh untuk nilai π, e maupun $\sqrt{x}$ oleh komputer nilai-nilai tersebut tidak dapat dinyatakan secara eksak. Sebagai contoh nilai π secara eksak adalah 3,1415926539… sedangkan dalam *Spreadsheet Excel* nilai π adalah 3.141592654.

3. Analisis Kesalahan

Untuk menyatakan kesalahan dalam penggunaan analisis numerik biasanya digunakan dua jenis kesalahan yaitu kesalahan absolut dan kesalahan relatif. Jika nilai pendekatan dinyatakan dengan x' dan nilai eksaknya adalah x maka kesalahan absolutnya dinyatakan dengan persamaan

$$\mathrm{I}\, x - x' \,\mathrm{I} \qquad \ldots(2.44)$$

Sedangkan kesalahan relatifnya dinyatakan dengan persamaan

$$\frac{\mathrm{I}\, x - x' \,\mathrm{I}}{\mathrm{I}\, x \,\mathrm{I}} \qquad \ldots(2.45)$$

Kesimpulan

1. Secara umum metode Euler dinyatakan dalam persamaan
   $y_{i+1} = y_i + f(t_i)\Delta t$
   Jika $\frac{dy}{dt} = v$ dan $\frac{dv}{dt} = f$ maka posisi dan kecepatannya dapat dinyatakan dengan
   a. $y_{i+1} = y_i + v_i\,\Delta t$
   b. $v_{i+1} = v_i + f(y_i)\,\Delta t$
2. Menurut metode Leapfrog posisi dan kecepatan benda dapat dinyatakan dalam persamaan
   a. $y_{i+1} = y_i + v_i\,\Delta t + \frac{1}{2} f(y_i)\,\Delta t^2$
   b. $v_{i+1} = v_i + (f(y_i) + f(y_{i+1}))\ {}^{\Delta t}/_{2}$
3. Menurut metode Euler-Cromer posisi dan kecepatan benda dapat dinyatakan dalam persamaan
   a. $y_{i+1} = y_i + v_i\,\Delta t$
   b. $v_{i+1} = v_i + f(y_{i+1})\,\Delta t$
4. Menurut Teori trapezium integral $f = \int_a^b f(x)dx$ dapat diselesaikan menurut persamaan
   $A = (0.5y_0 + y_1 + y_2 \ldots + y_{n-1} + 0.5y_n)\Delta x$
5. Menurut Teori Simpson integral $f = \int_a^b f(x)dx$ dapat diselesaikan menurut persamaan
   $$L_{total} = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n$$
6. Dalam penggunaan analisis numerik terdapat dua kesalahan yaitu kesalahan pemotongan dan kesalahan pembulatan.

Soal-soal

1. Jelaskan definisi dari:
   a. Solusi analitik
   b. Solusi numerik
2. Bilamanakah penyelesaian secara numerik dipakai?
3. Jelaskan apa kelebihan metode numerik dibandingkan dengan metode analitik?
4. Gerak suatu ayunan sederhana yang terdiri batang bermassa m dan panjang batang L dinyatakan dengan persamaan differensial berikut
   $\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{L}\frac{\sin\theta}{\omega}$

   Dengan menggunakan metode Euler tentukan persamaan kecepatan sudutnya, jika ω menyatakan kecepatan sudut, θ = posisi terhadap titik setimbang dan g menyatakan percepatan gravitasi!
5. Hitunglah nilai integral dari
   $\int_1^2 x^2\,dx$
   dengan pendekatan analitik dan numerik dengan metode empat segi panjang, anggap n = 6 kemudian tentukan berapakah prosentase kesalahannya jika metode segi empat dibandingkan nilai eksaknya!