Laboratorio Didattico FDS
DIPARTIMENTO di MATEMATICA *"F. Brioschi"*
POLITECNICO di MILANO

ANALISI MATEMATICA 1
e
GEOMETRIA
note per gli studenti

di
Federico M.G. Vegni

n.**64/R ,** ottobre 2012

Piazza Leonardo da Vinci, 32 – 20133 Milano (Italy)

Indice

Parte I

Parte II

Parte I

1

Rette e piani

1.1 Rette e piani in $\mathbb{R}^3$

E. 1.1. Determinare il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $P_0 = (1, 0, 1)$ con direttrice $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$.

E. 1.2. Determinare il fascio di rette perpendicolari alla retta r:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

passanti per il punto $P_0 = (1, 2, -2)$. Tra queste individuare quella che interseca r.

E. 1.3. Trovare gli angoli compresi tra gli assi e le rette

1. di direzione $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ e passante per $P_0 = (3, -2, 1)$
2. di direzione $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ e passante per $P_0 = (-3, -2, -1)$
3. di direzione $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ e passante per $P_0 = (3, 0, 0)$
4. di direzione $\mathbf{v} = (-1, 1/2, 1)$ e passante per $P_0 = (3, -\sqrt{3}, \sqrt{2})$
5. di direzione $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ e passante per $P_0 = (3, -2, 1)$.

E. 1.4. Si trovi l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ che contiene la retta r:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 6t \\ z = 2 - 6t \end{cases}$$

ed è perpendicolare al piano π: $x + y + z = 0$.

E. 1.5. Trovare le direttrici dei piani in $\mathbb{R}^3$

1. $x + y + z - 1 = 0$
2. $x - z + 6 = 0$
3. $x + 2y - 1 = 0$.

E. 1.6. Cosa rappresenta l'equazione $x-2y+1=0$ nel piano $\mathbb{R}^2$? È possibile individuare la sua *direttrice*? Nel piano $\mathbb{R}^2$ trovare la retta passante per il punto $P_0=(-3,4)$ con direttrice $\mathbf{v}=(1,-2)$.

E. 1.7. Trovare il punto Q simmetrico di $P_0=(1,-2,1)$ rispetto alla retta

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$$

Esercizio Trovare l'angolo compreso tra la retta

$$\begin{cases} 2x-2y+z=8 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

ed il segmento di estremi $P_0=(1,0,0)$ e $Q=(-1,-2,-1)$.

Esercizio Data la matrice

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

rappresentare geometricamente le soluzioni del sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ quando $\mathbf{b}=(5,3,1)$.

Esercizio Rappresentare al variare di $k\in\mathbb{R}$ le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (2k-1)x-y+4z=2k-3 \\ (5-2k)y+2z=2 \\ 2y+2kz=1 \end{cases}.$$

E. 1.8. Rappresentare al variare di $k\in\mathbb{R}$ le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (1-6k)x+y+z=2 \\ 3x+y-3kz=1-3k \\ x-y+z=1. \end{cases}$$

E. 1.9. Date le due direzioni $\mathbf{u}=(1,-2,3)$ e $\mathbf{v}=(-2,3,1)$ determinare, utilizzando il prodotto vettoriale, la direzione ortogonale a entrambe. Risolvere il medesimo problema impostando un sistema con tre incognite per due equazioni, ciascuna che impone l'ortogonalità tra la direzione incognita e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispettivamente. Confrontare i risultati.

Esercizio Scrivere l'equazione del fascio di piani che ha sostegno la retta r:

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-5y+3z-1=0. \end{cases}$$

2

Spazi Vettoriali e Spazi Euclidei

2.1 Spazi Vettoriali

E. 2.1. Si dia la definizione di spazio vettoriale.

E. 2.2. Verificare, tramite la definizione, che $\mathbb{R}^5$ è uno spazio vettoriale.

E. 2.3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4 nella variabile x. Esprimere il vettore $\mathbf{v} = x^3 + x^2 + x + 1$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 = x^3 - x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^2 + x$, $\mathbf{v}_4 = -x + 1$.

Esercizio Riconoscere se i seguenti insiemi sono spazi vettoriali. Nel caso trovare la loro dimensione ed una base.

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z = 0\}$
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 10\}$

E. 2.4. Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ definito imponendo la condizione

$$W = \left\{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 : a - b + c - d = 1\right\}.$$

Trovare due elementi di W che sommati non danno un elemento di W. W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$?

E. 2.5. Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici $(2, 2)$. Si scriva uno dei seguenti vettori di V come combinazione lineare degli altri:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

E. 2.6. L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ così definito

$$W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$? Dimostrare la risposta usando la definizione di sotto-spazio vettoriale. Disegnare W nel piano cartesiano.

E. 2.7. L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ così definito

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$? DIMOSTRARE la risposta usando un esempio opportuno. Disegnare W nel piano cartesiano.

E. 2.8. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 5 nella variabile x. I vettori $\mathbf{v}_1 = x^4 - 4x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 + x - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^2 - x$, $\mathbf{v}_4 = x^5 + x^3 - x + 1$, $\mathbf{v}_5 = 2x^2 - 1$, appartenenti a V, sono linearmente indipendenti?

E. 2.9. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori: $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3, 4, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 0, -1, 1)$. Trovare un vettore di $\mathbb{R}^5$ che non appartenga a W.

E. 2.10. Siano V e W i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente generati dagli insiemi di vettori sotto riportati:

$$V = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)\} \qquad W = \{\mathbf{w}_1 = (0, 1, 2), \mathbf{w}_2 = (-1, 0, 1)\}.$$

Trovare la dimensione ed una base di V e di W. L'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che appartengono contemporaneamente a V ed a W (e che indico con $V \cap W$) è uno spazio vettoriale? Nel caso, trovarne la dimensione ed una base.

E. 2.11. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4 nella variabile x. I vettori $\mathbf{v}_1 = x^4 - 4x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 + x - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^2 - x$, $\mathbf{v}_4 = x^3 - x + 1$, appartenenti a V, sono linearmente indipendenti?

E. 2.12. Trovare la dimensione ed una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ assegnato imponendo la condizione

$$W = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 : a + b + d + e = 0\}.$$

E. 2.13. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2, 2)$. Trovare un vettore appartenente a V che non sia combinazione lineare dei seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

E. 2.14. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2, 2)$. I vettori seguenti

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

sono linearmente indipendenti? Nel caso non lo fossero esprimere un vettore come combinazione degli altri.

E. 2.15. Trovare la dimensione ed una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ assegnato imponendo la condizione

$$W = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 : a + 2b = d + e, b + c = 2d\}.$$

E. 2.16. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2,2)$. Esprimere il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E. 2.17. Sia V l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale di 2, definito dalle due relazioni seguenti

1. $\{ax^2 + bx + c : 2a + 3b = 0\}$
2. $\{ax^2 + bx + c : 2a + 3b = 1\}$.

In entrambi i casi, si dimostri se V è uno spazio vettoriale.

E. 2.18. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 5 nella variabile x. Si trovi la dimensione ed una base del sottospazio di V generato dalle combinazioni lineari dei vettori: $\mathbf{v}_1 = 2x^4 - 4x$, $\mathbf{v}_2 = x^5 + x - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^5 - x$, $\mathbf{v}_4 = x^3 - x + 1$, $\mathbf{v}_5 = x^4 - 1$.

E. 2.19. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2,2)$. Esprimere il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio Sia V l'insieme delle matrici (2,2)definite dalle due relazioni seguenti

1. $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R}) : a + b + c = 0\}$
2. $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R}) : a - b + c = 2\}$.

In entrambi i casi si dimostri se si tratta di uno spazio vettoriale.

E. 2.20. Sia W il sottospazio vettoriale delle matrici $(2,2)$ generato dalle combinazioni lineari dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trovare la dimensione ed una base di W.

Esercizio Si dimostri che il sottoinsieme W delle matrici (2,2) triangolari superiori è un sottospazio vettoriale dello spazio V delle matrici (2,2) e se ne trovi una base. Si dimostri che l'insieme delle matrici triangolari non è un sottospazio vettoriale di V.

E. 2.21. Siccome $\mathbb{R}^n$ oltre ad essere uno spazio vettoriale è anche euclideo, disponiamo del prodotto scalare e, dunque, di un modo per verificare l'ortogonalità tra due vettori.

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito dalla relazione

$$V = \left\{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 : x + z - 2w = 2x - z - w = 0\right\}.$$

Trovare un vettore di $\mathbb{R}^5$ che sia ortogonale a tutti gli elementi di V.

E. 2.22. Siano U e V i sottospazi di $\mathbb{R}^5$ così definiti:

$$U = \left\{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 : x + 2y + z + w + t = x + y + t = 0\right\},$$

$$V = \left\{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 : 2x + 2y + z + 2w + 2t = x + y + w + t = 0\right\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di U, V e di $U \cap V$.

E. 2.23. Dimostrare che i sottospazi U e V di $\mathbb{R}^2$ sono costituiti da elementi ortogonali tra loro:

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\right\},$$
$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\right\}.$$

2.2 Spazi Euclidei

E. 2.24. Dare la definizione di Spazio Euclideo.
Esercizio Si rappresentino nello spazio le seguenti coppie di vettori di $\mathbb{R}^3$. Quali di queste sono costituite da vettori ortogonali? Riconoscere le coppie ortogonali verificando che il prodotto scalare è nullo.

1. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$
2. $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 5)$
3. $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 5)$
4. $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2}, 3, -\sqrt{2})$, $\mathbf{v}_2 = (1, \sqrt{2}, 4)$
5. $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$, $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, 2)$
6. $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$
7. $\mathbf{v}_1 = (1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, -2)$
8. $\mathbf{v}_1 = (1/2, -1, 3/2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, -8/3)$
9. $\mathbf{v}_1 = (2, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1/2, -1)$

E. 2.25. Si ricorda che tra due elementi di $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{u}$ di modulo rispettivamente $\|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$, il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (definito come $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k u_k$) ha la proprietà che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| \cos\theta$, dove θ è l'angolo compreso tra le direzioni individuate da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Si trovi l'angolo compreso tra le coppie di vettori introdotte nell'esercizio precedente.

E. 2.26. Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$, trovare il versore (vettore di modulo unitario) che individua la stessa direzione.

1. $\mathbf{v} = (0, -1, 2, -1)$
2. $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{3}, 3, -\sqrt{2}, -1)$

3. $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{3})$
4. $\mathbf{v} = (1, 0, 1, 0)$
5. $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 0)$
6. $\mathbf{v} = (1, \sqrt{2}, -1, 3/2)$
7. $\mathbf{v} = (2, 0, 2, -1)$

E. 2.27. Sono date le seguenti coppie di vettori. Riconoscere a quale spazio euclideo appartengono. Per ciascuna coppia trovare il vettore somma, il vettore differenza, il prodotto scalare e, quando è definito, il prodotto vettoriale.

1. $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$
2. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 3, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, 0, 5)$
3. $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 5, 3, 0)$
4. $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\mathbf{v}_2 = (1, \sqrt{2})$
5. $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3})$, $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{3}, 0, 2)$
6. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$
7. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 2, 4, -2)$
8. $\mathbf{v}_1 = (1/2, -1, 0, 3/2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 2, -8/3)$
9. $\mathbf{v}_1 = (2, 2, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1/2, -1)$

E. 2.28. Sia dato il vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^4$. Si trovino tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^4$ che siano ortogonali a $\mathbf{v}$, e che non siano uno multiplo dell'altro (cioé, ad esempio, non può essere $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$).

E. 2.29. Si trovi un vettore di $\mathbb{R}^5$ che sia ortogonale a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ e contemporaneamente a $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, -1, 1)$.

E. 2.30. Si calcoli l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{x} = (-1, 2, -3)$ ed $\mathbf{y} = (1, -2, 2)$.

E. 2.31. Dati due vettori $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, -1, 2)$, si trovi il versore perpendicolare ad entrambi. Quindi si trovi il vettore risultante del prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$; si calcoli $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$ e si trovi il versore che individua la medesima direzione di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

E. 2.32. Si calcoli il doppio prodotto misto tra i vettori $\mathbf{x} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{y} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{z} = (-1, -1, -1)$.

E. 2.33. Si calcoli l'angolo compreso tra la diagonale di un cubo ed un suo lato.

E. 2.34. Si calcoli l'angolo compreso tra due lati di una piramide equilatera. Si calcoli l'angolo compreso tra uno spigolo della piramide e il piano orizzontale.

E. 2.35. Si calcoli il volume del parallelepipedo avente per lati i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$.

E. 2.36. Si disegni il parallelepipedo avente per lati i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$. Si calcoli il suo volume.

3

Matrici

3.1 Algebra delle matrici

E. 3.1. Date

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

si calcolino i prodotti AB e BA.

E. 3.2. Date

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

si calcolino $(AB)^{-1}$ e $(AB)^2$.

E. 3.3. Date

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

si calcoli: $A + B$, AB, BA, $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$, $\det(BA)$, $\det(A + B)$. È possibile concludere che $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?

E. 3.4. Data

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

calcolare $\det(A^3)$. Se esiste, trovare A^{-1}.

E. 3.5. Calcolare il volume del parallelepipedo avente per lati i vettori $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$. Si svolga il medesimo conto cambiando il vettore $\mathbf{v}_2$ con il suo opposto. Quale è il volume del parallelepipedo? Quale è la formula per ottenere il volume del parallelepipedo?

E. 3.6. Sia data

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca la matrice A^* dei complementi algebrici (attenzione ai segni). Si calcoli $A \cdot A^*$. Si trovi la matrice inversa di A.

E. 3.7. Sia data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare l'inversa A^{-1} e verificare che $A^{-1}A = \mathbb{I} = AA^{-1}$.

E. 3.8. Risolvere per sostituzione il sistema

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Scrivere il sistema in forma vettoriale trovando la matrice dei coefficienti A ed il vettore $\mathbf{b}$ dei termini noti. Calcolare $\det A$. Calcolare A^{-1}, se esiste. Calcolare $A^{-1}\mathbf{b}$.

E. 3.9. Se esiste, calcolare l'inversa delle seguenti matrici:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
4. $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Calcolare inoltre l'inversa (se esiste) dei prodotti AA^T, BB^T, CC^T, DD^T.

E. 3.10. Per quali valori del parametro k esiste l'inversa di $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$? Trovare l'inversa.

E. 3.11. Risolvere per sostituzione il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Scrivere il sistema in forma vettoriale trovando la matrice dei coefficienti A ed il vettore $\mathbf{b}$ dei termini noti. Calcolare $\det A$. Calcolare A^{-1}, se esiste. Calcolare $A^{-1}\mathbf{b}$.

E. 3.12. Risolvere per sostituzione il sistema che ha la stessa matrice dei coefficienti delle incognite dell'esercizio precedente e vettore dei termini noti $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Il sistema ammette, ovviamente essendo omogeneo, la soluzione banale $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Il sistema ha soluzione non banale? Quante sono le soluzioni non banali del sistema?

E. 3.13. Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

è non singolare. In quei casi calcolare l'inversa.

E. 3.14. Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in cui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

calcolare la soluzione del sistema usando la formula $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

E. 3.15. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x + y - 3z = 1 \\ 3x - 7y - z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

utilizzando la formula di Cramer.

E. 3.16. Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

E. 3.17. Trovare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (6, 2, -2, 4, 8)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -3, 0, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 4, 0, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 2, 2, 0)$.

E. 3.18. Trovare i valori di k per cui la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3k-1 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}$$

è non singolare. Invertirla quindi, quando possibile.

E. 3.19. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

si trovino la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dopo aver scritto esplicitamente l'inversa della matrice A.

E. 3.20. Calcolare al variare di k il rango della matrice che segue

$$\begin{bmatrix} k+1 & 1-k & 1 & k \\ k-3 & k-1 & -1 & -1 \\ 2k+4 & 0 & 3 & 4-k \end{bmatrix}$$

E. 3.21. Sia B una matrice di rango r. Allora

1. esiste almeno un minore di ordine r nullo?
2. esiste almeno un minore di ordine $r+1$ nullo?
3. I minori di ordine r sono tutti non nulli?
4. r colonne qualsiasi di B sono linearmente indipendenti?
5. $r+1$ righe qualsiasi di B sono linearmente dipendenti?

E. 3.22. Determinare se le seguenti terne di vettori sono una base in $\mathbb{R}^3$:

1. $\mathbf{v}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,9,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,2,1)$
2. $\mathbf{v}_1 = (-1,-1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,2,1)$
3. $\mathbf{v}_1 = (2,0,4)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (3,1,3)$
4. $\mathbf{v}_1 = (9,4,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,4,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,4,1)$
5. $\mathbf{v}_1 = (3,4,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,3,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,4,1)$.

E. 3.23. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ k+1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2 Sistemi lineari

E. 3.24. Studiare e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$

E. 3.25. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e risolvere:

$$\begin{cases} (1 + 2k)x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 2y + (1 + 2k)z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

E. 3.26. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la resolubilità del sistema lineare e trovare le soluzioni.

$$\begin{cases} kx - y + 4z = k - 2 \\ (4 - k)y + 2z = 2 \\ 2y + (k + 1)z = 1 \end{cases}.$$

E. 3.27. Discutere e risolvere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} (1 - 2k)x + y + z = 2 \\ 3x + y - kz = 1 - k \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

E. 3.28. Risolvere, dopo aver discusso al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema

$$\begin{cases} kx - y + 4z = k - 2 \\ (4 - k)y + 2z = 2 \\ 2y + (k + 1)z = 1. \end{cases}$$

Esercizio Sia data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 - 3k \\ -1 & 2 - k & -3 \\ k + 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Discutere la resolubilità del sistema $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$ nei due casi

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} k - 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} k - 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare le soluzioni.

E. 3.29. Discutere e risolvere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 + k \\ 2x + (4 - k)y = 2 \\ -(k + 1)x - 2y = -1. \end{cases}$$

E. 3.30. Discutere e risolvere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = k \\ x - 2y + 2z + w = k \\ 4x - 3y + 3z + 5w = 3k. \end{cases}$$

3.3 Rette e piani in $\mathbb{R}^n$

E. 3.31. Trovare una parametrizzazione del piano in $\mathbb{R}^4$ che passa per il punto $P_0 = (1, 2, 3, 4)$ e sul quale è possibile individuare vettori con direzione parallela a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ ed a $\mathbf{w} = (1, -2, 1, -2)$.

E. 3.32. Cosa rappresenta l'equazione $x - y + 2z + w - 1 = 0$ nello spazio $\mathbb{R}^4$ di coordinate (x, y, z, w)? Cosa rappresenta la medesima equazione nello spazio $\mathbb{R}^5$ di coordinate (x, y, z, w, t)?

E. 3.33. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 2 \\ 2x - 3y + z + 4w = 0 \\ -3x + 5y - 5w = 1. \end{cases}$$

Cosa rappresenta l'insieme delle soluzioni nello spazio $\mathbb{R}^4$?

E. 3.34. Sia A la matrice che descrive una trasformazione lineare dello spazio $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare la geometria dell'insieme dei vettori del nucleo.

E. 3.35. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ 3 & -8 & -9 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

che descrive la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Determinare la geometria dell'insieme dei vettori del nucleo e dell'immagine di f.

4

Linear Algebra. Eigenvalues and Eigenvectors

The analysis of many economic models requires to study systems of equations. Furthermore, some of the most studied economic models are linear models. This is the reason why we review here some of the basic tools used to study the linearity: matrix algebra.

I think that a practical approach is the best, effective and quick way to catch up with this subject. This is why I suggest to stop the recording and review matrix algebra on the Live Exercises. Of course, the students who are familiar with matrix algebra can skip the Live Exercises on matrix algebra and go directly to the section devoted to Vector Spaces.

4.1 Live Exercises on Matrix Algebra

E. 4.1. Given

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

calculate the products AB and BA.

E. 4.2. Given

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

determine the inverse A^{-1} and verify that $A^{-1}A = \mathbb{I} = AA^{-1}$.

E. 4.3. Consider

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

find $(AB)^{-1}$.

E. 4.4. Given

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

determine the algebraic complements matrix and compute the inverse matrix of A.

E. 4.5. Use the substitution to solve the system

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Rewrite the system in vector form and find the coefficients matrix A and the vector $\mathbf{b}$ representing the right hand side. Calculate $\det A$. Calculate A^{-1} and $A^{-1}\mathbf{b}$.

E. 4.6. When A is invertible?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E. 4.7. Discuss the singularity of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

with respect to the parameter $k \in \mathbb{R}$. When possible, calculate A^{-1} .

E. 4.8. Solve the system

$$\begin{cases} -x + y - 3z = 1 \\ 3x - 7y - z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

using Cramer's rule.

E. 4.9. Determine the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

E. 4.10. Discuss with respect to the parameter k the rank of the matrix

$$\begin{bmatrix} k+1 & 1-k & 1 & k \\ k-3 & k-1 & -1 & -1 \\ 2k+4 & 0 & 3 & 4-k \end{bmatrix}.$$

E. 4.11. State Rouché-Capelli's Theorem. Then, solve the system

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$

E. 4.12. Discuss with respect to $k \in \mathbb{R}$, and solve the following system

$$\begin{cases} (1+2k)x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 2y + (1+2k)z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

4.2 Exercises

E. 4.13. Discuss and solve with respect to $k \in \mathbb{R}$ the system

$$\begin{cases} kx - y + 4z = k - 2 \\ (4-k)y + 2z = 2 \\ 2y + (k+1)z = 1 \end{cases}.$$

S. 4.1. Introducing the coefficient matrix

$$A = \begin{bmatrix} k & -1 & 4 \\ 0 & 4-k & 2 \\ 0 & 2 & k+1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} k-2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

we deduce that

$$\det(A) = 3k^2 - k^3.$$

If $k \neq 0, 3$, A is invertible, and thanks to Cramer's theorem we have

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

We calculate

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{k-9}{k^2(k-3)} & -\frac{4k-18}{k^2(k-3)} \\ 0 & -\frac{k+1}{k(k-3)} & \frac{2}{k(k-3)} \\ 0 & \frac{2}{k(k-3)} & \frac{4-k}{k(k-3)} \end{bmatrix}.$$

We consider the case $k = 0$; the system becomes

$$\begin{cases} -y + 4z = -2 \\ 2y + z = 1. \end{cases}$$

It is compatible, since $r(A) = r(A|\mathbf{b})$; and its solution is the straight line where

$$\begin{cases} x \text{ is free} \\ y = 2/3 \\ z = -1/3. \end{cases}$$

The case $k = 3$ is impossible, since $2 = r(A) < r(A|\mathbf{b}) = 3$.

E. 4.14. Discuss and solve with respect to $k \in \mathbb{R}$ the system

$$\begin{cases} (1-2k)x + y + z = 2 \\ 3x + y - kz = 1-k \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

S. 4.2. Consider the coefficient matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1-2k & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-k \\ 1 \end{bmatrix}$$

we deduce that

$$\det(A) = 2(k-3)(k+1).$$

If $k \neq -1, 3$, A is invertible, and thanks to Cramer's theorem we have

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

We calculate

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} k-1 & 2 & -(k+1) \\ k+3 & 2k & -2(k+1)(k-3/2) \\ 4 & 2(k-1) & -2(k+1) \end{bmatrix}.$$

We consider the case $k = -1$; the system becomes

$$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

It is compatible, since $r(A) = r(A|\mathbf{b})$; and its solution is a straight line in $\mathbb{R}^3$ since Rouché-Capelli's theorem ensures that one out of the three variables can be taken as free and, for instance, let us use x and rewrite the system

$$\begin{cases} y + z = 2 - 3x \\ -y + z = 1 - x. \end{cases}$$

We deduce

$$\begin{cases} x \text{ is free} \\ y = 1/2 - x \\ z = 3/2 - 2x. \end{cases}$$

The case $k = 3$ is impossible, since $2 = r(A) < r(A|\mathbf{b}) = 3$.

E. 4.15. Discuss and solve with respect to $k \in \mathbb{R}$ the system

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 + k \\ 2x + (4-k)y = 2 \\ -(k+1)x - 2y = -1. \end{cases}$$

S. 4.3. Consider the coefficient matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 4-k & 0 \\ -k-1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1+k \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

we deduce that

$$\det(A) = k^2(3-k).$$

If $k \neq 0, 3$, A is invertible, and thanks to Cramer's theorem we have

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

We calculate

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2}{k(k-3)} & -\dfrac{k-4}{k(k-3)} \\ 0 & -\dfrac{k+1}{k(k-3)} & -\dfrac{2}{k(k-3)} \\ \dfrac{1}{k} & \dfrac{2}{k(k-3)} & \dfrac{1}{k(k-3)} \end{bmatrix}.$$

We consider the case $k =$; the system is compatible since $r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 1$ and it is equivalent to the constrain

$$x + 2y = 1$$

representing a plane in $\mathbb{R}^3$ since Rouché-Capelli's theorem ensures that two out of the three variables can be taken as free (namely z with x or y).

The case $k = 3$ is impossible, since $2 = r(A) < r(A|\mathbf{b}) = 3$.

E. 4.16. Discuss and solve with respect to $k \in \mathbb{R}$ the system

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = k \\ x - 2y + 2z + w = k \\ 4x - 3y + 3z + 5w = 3k. \end{cases}$$

S. 4.4. Consider the coefficient matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ 3k \end{bmatrix}$$

we deduce that $r(A) = 2 = r(A|\mathbf{b})$ (the first two rows and two columns are linearly independent). The system is compatible; two out of four variables can be taken as free, and for instance we use z and w as free variables. The system is equivalent to the following

$$\begin{cases} 2x + y = k + z - 3w \\ x - 2y = k - 2z - w. \end{cases}$$

Inverting the nonsingular square coefficient matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

we have the solution

$$\begin{cases} x = 3/5k - 7/5w \\ y = -k/5 + z - w/5 \\ z \text{ is free} \\ w \text{ is free.} \end{cases}$$

4.3 Vector Spaces

We devote some time to familiarize with the simplest abstract algebraic structure, the *vector space*

The importance of recognizing abstract structures is evident: all their properties can be applied to all the entries satisfying that structure. Among the algebraic structures, the vector space is surprising for its simplicity and the huge cargo of consequences that carries with it.

When introducing a structure, we consider a set of elements grouped not in consideration of their shapes, or color, or because they belong to whatever category; they are grouped because some operation is introduced among them: they are related by such operation, which actually is the structure. We shall analyze the properties and the consequences of such a relation.

A vector space is a set (of vectors, precisely) where any linear combinations of "objects" can be performed; namely those "objects" may be added together and multiplied ("scaled) by numbers, called scalars in this context. Scalars are usually taken to be real numbers, but one may also consider vector spaces with scalar multiplication by complex numbers. Also rational numbers or even more general fields could be taken instead, but here we will consider only vector spaces on the real field of scalars.

Of course, the operations of vector addition and scalar multiplication have to satisfy certain requirements. These requirements are quite natural ones, such as associativity and commutativity of addition, newertheless, I prefer not to recall them, preferring to concentrate on examples.

Definizione 4.1 (Vector Space). *V is a vector space if for every pair of elements $x, y \in V$ and taking any pair of scalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, then the linear combination of x and y with coefficients α and β is in V, namely $\alpha x + \beta y \in V$.*

Esempio 4.1. An example of a vector space is that points, or arrows, in an Euclidean space. Consider physical quantities such as forces, for instance: any two forces (of the same type) can be added to yield a third, and the multiplication of a force vector by a real factor is another force.

In the same vein, but with a more geometric (or cinematic) approach, vectors representing displacements in the plane or in three-dimensional space also form vector spaces.

In short, a coordinate space, a set whose elements are n-tuples (sequences of length n) of scalars is a vector space, and in particular $\mathbb{R}^3$ is a vector space.

Esempio 4.2. As a second fundamental example, let us take a set of functions: the set of all the continuous functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$.

The sum of two continuous functions is still a continuous function. On the other hand, the product of a continuous function by a scalar can be seen as an expansion or a contraction of the graph of the function (according to the size of the scalar, if in absolute value respectively grater or smaller than 1). Hence, the multiplication of a continuous function by a scalar produces a continuous function.

The set of all continuous functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is a vector space. Then, continuous functions are vectors, in the sense that they are elements of a vector space.

Definizione 4.2 (Linear in-dependence). *A family of vectors in a vector space is* **linearly independent** *if none of them can be written as a linear combination of finitely many other vectors in the collection. A family of vectors which is not linearly independent is called* **linearly dependent**.

Namely, the set $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ is linearly independent in V if and only if

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \cdots + \gamma v_n = \mathbf{0}$$

requires $\alpha, \beta, \cdots, \gamma = 0$. If, on the other hand, at least one of the coefficients $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ is non zero (suppose α, for the sake of simplicity) then one element of the set can be written as the linear combination of the others (v_1 in our example, with coefficients $-\beta/\alpha, \cdots, -\gamma/\alpha$).

Nota 4.1. Linear dependence is a property of the family, not of any particular vector.

Esempio 4.3. Consider

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

the first three vectors (the subset $\{v_1, v_2, v_3\}$) are linearly independent. In fact, if we consider the linear combination

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

which has to be equal to $\mathbf{0}$; namely, we have

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

We have a linear system of three equations in three unknown, where the coefficient matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

is nonsingular; hence the system has only the zero solution and $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On the other hand, the vector v_4 equals one times the first vector plus two times the second minus one times the third, so the four vectors together are linearly dependent.

Repeating that the linear dependence is a property of the family, not of any particular vector, we point out that we could rewrite the first vector as a linear combination of the last three.

Esempio 4.4. Consider

$$v_1 = 1 \quad v_2 = t \quad v_3 = t^2 \quad v_4 = 1 + 2t - t^2.$$

The first three vectors (the subset $\{v_1, v_2, v_3\}$) are linearly independent, because no linear combination of v_1 and v_2 could ever generate v_3; but the fourth vector (evidently) equals one times the first plus two times the second minus one times the third, so the four vectors together $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ are linearly dependent.

Since the linear dependence is a property of the family, not of any particular vector, we point out that we could rewrite the first vector as a linear combination of the last three.

4.3.1 Linear dependence of 2 vectors

Considering the case of just two vectors v_1 and v_2 of the vector space V, they are linearly dependent if and only if one is multiple of the other.

In the case of Euclidean spaces, take $V = \mathbb{R}^3$, this means that the arrows representing v_1 and v_2 have the same direction (and not necessarily the same orientation).

In the case of the set of the continuous functions, we have, for instance, that

- $v_1 = \sin t$ and $v_2 = \cos t$ are linearly independent,
- $v_1 = e^t$ and $v_2 = \cos t$ are linearly independent,
- $v_1 = e^t$ and $v_2 = e^{3t}$ are linearly independent,
- $v_1 = e^t$ and $v_2 = e^{-t}$ are linearly independent,
- $v_1 = \sin t$ and $v_2 = \sin(-t)$ are linearly dependent (the sine is an odd function),

In order to describe synthetically the elements of a vector space, we introduce the idea of its basis, as the smallest set of vectors necessary to generate (or to span) the whole space.

Definizione 4.3 (Basis). *A basis is a finite or infinite set of vectors B ($\{v_i\}$ with $i \in I$, and I could be either $\mathbb{N}$ or the set of natural numbers form 1 to n) with two properties:*

- *B spans the whole space,*
- *B is minimal with this property.*

The former of the two requirement implies that any vector v can be expressed as a finite sum (or infinite sum in the case $I = \mathbb{N}$) as a linear combination of the basis elements:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

where the a_k are scalars and v_k $(k = 1, \cdots, n)$ elements of the basis B; in this sense we call it a basis.

The second requirement, the minimality, on the other hand, is ensured if B is a set of linearly independent vectors.

In short, a basis of V is a set of linearly independent vectors that generates V, the process of generating is using the linear combinations.

4.3.2 Exercises

E. 4.17. Consider V the vector space of the polynomials of degree less or equal to 4 in the variable x. Write the vector $\mathbf{v} = x^3+x^2+x+1$ as a linear combination of $\mathbf{v}_1 = x^3 - x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^2 + x$, $\mathbf{v}_4 = -x + 1$.

S. 4.5. We have to find some real coefficients α, β, γ, δ such that

$$\alpha(x^3 - x) + \beta(x^2 - 1) + \gamma(x^2 + x) + \delta(-x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Hence, the system

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \gamma - \delta = 1 \\ -\beta + \delta = 1 \end{cases}$$

gives the solution $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 3/2$, $\delta = 1/2$.

E. 4.18. Determine if the following sets are vector spaces and eventually determine their dimension and a basis

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z = 0\}$
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 10\}$.

S. 4.6. The case *3.* is not a vector space, because the origin is not in the space (the coordinates of the origin don't satisfy the constrain $x + y + z = 10$). On the other hand the origin has to be in every vector space, since it is determined by the linear combination with zero coefficients.

The case *2.* is not a vector space, indeed the point $(-1, 1, 0)$ satisfies the constrain $x + y^2 + z = 0$, but the point scaled of a coefficient 2 $(-2, 2, 0)$ does not.

The case *1.* describes actually a vector subspace of $\mathbb{R}^3$. Indeed, we consider two points $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ and $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ such that

$$x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \qquad \text{and} \qquad x_2 + 2y_2 + z_2 = 0.$$

analyze every linear combination

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

and add twice the second component to the first and the third; we find

$$2(\alpha y_1 + \beta y_2) + \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha(x_1 + 2y_1 + z_1) + \beta(x_2 + 2y_2 + z_2) = 0.$$

Hence we have a vector subspace of $\mathbb{R}^3$.

In order to find a basis, we can rewrite the constrain as

$$x = -2y - z$$

and consider y and z as free coordinates and x depending on them. Choosing first $y = 1$ and $z = 0$, and then the converse combination, we find the vectors

$$u = 1 = (-2, 1, 0) \qquad u_2 = (-1, 0, 1).$$

It is immediate to prove that they are linearly independent; furthermore their linear combinations with coefficients α and β yield to the vectors like

$$(-2\alpha - \beta, \alpha, \beta)$$

exactly describing the constrain. Actually, $\{u_1, u_2\}$ generates the subspace: $\{u_1, u_2\}$ is a basis.

E. 4.19. Let V be the vector space of $(2, 2)$ matrices. Write one of the following vectors of V as a linear combination of the others:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad v_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

We search for some real coefficients α, β, γ, δ in order to write, for instance, v_5 as a linear combination of $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = v_5.$$

We find the system

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \delta = 1 \\ \gamma + \delta = 1 \\ -\beta = 1 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

whose solution is $\alpha = \gamma = 3/2$, $\beta = -1$, $\delta = -1/2$.

4.4 Linear transformations

In mathematics, a linear map is a function between two vector spaces that preserves the operations of vector addition and scalar multiplication. It can be also called linear function or linear operator. Here, we prefer to use the also common term *linear transformation*, because we want to point out its geometric meaning as a deformation of a vector of a space into another vector of another vector space.

Definizione 4.4 (Linear map). *Let V and W be vector spaces over the same field K.*[1]
A function

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow W \\ v &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

is said to be a linear map if for any two vectors x and y in V and any scalar a in K, the following two conditions are satisfied:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *additivity*
- $f(ax) = af(x)$ *homogeneity of degree 1.*

This is equivalent to requiring that for any vectors $x_1, \cdots, x_m$ and scalars $a_1, \cdots, a_m$ the equality

$$f(a_1x_1 + \cdots + a_mx_m) = a_1f(x_1) + \cdots + a_mf(x_m)$$

holds, namely, the transformation of a linear combination coincide with the same linear combination of the transformed vectors.

It immediately follows from the definition that $f(0) = 0$.

Nota 4.2. A linear map from V to K (with K viewed as a vector space over itself) is called a linear functional.

Esempio 4.5 (Trivial linear maps). The identity map

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow V \\ v &\mapsto f(v) = v \end{aligned}$$

and the zero map

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow W \\ v &\mapsto f(v) = 0 \end{aligned}$$

are linear.

Esempio 4.6. The map

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = cx \end{aligned}$$

where c is a constant, is linear.

[1] Commonly, we consider here $K = \mathbb{R}$, but sometimes also $K = \mathbb{C}$ could be considered.

Esempio 4.7. The map from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ associating x to x^2 is not linear.

Esempio 4.8. The map from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ associating x to $x+1$ is not linear (but is an affine transformation).

Esempio 4.9 (Representation theorem). If A is a real $m \times n$ matrix, then A defines a linear map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$ by sending the column vector $v \in \mathbb{R}^n$ to the column vector $Av \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

Conversely, any linear map between finite-dimensional vector spaces can be represented in this manner. In particular, given the basis of $\mathbb{R}^n$ and of $\mathbb{R}^m$, any linear function f from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$ can be represented in one unique way through a $m \times n$ matrix A, namely $f(x) = Ax$ for every $x \in \mathbb{R}^n$ (this statement is actually the thesis of the representation theorem).

Esempio 4.10. The integral is a linear map from the space of all real-valued integrable functions on some interval to $\mathbb{R}$; precisely, it is a linear functional.

Esempio 4.11. Differentiation is a linear map from the space of all differentiable functions to the space of all functions.

We introduce two subset of the starting space V and the ending space W where a linear map acts.

Definizione 4.5 (kernel and image of f). *Assume*

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow W \\ v &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

is linear, we define the kernel and the image (or range) of f by

$$\ker(f) = \{\, v \in V \text{ such that } f(v) = 0 \,\}$$

$$\operatorname{im}(f) = \{\, w \in W \text{ such that it exists } v \in V \text{ and } w = f(v)\}.$$

Consequently, the kernel is the set of vectors of the starting space V which are transformed into the origin. While the image is the subset of vectors of the ending space which are "touched" by the transformation of some vectors.

Nota 4.3. It is important to remember that $\ker(f)$ is a subspace of V and $\operatorname{im}(f)$ is a subspace of W.

Nota 4.4. When talking of linear transformations between euclidean spaces

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

we can define the kernel and the image in terms of representative matrix A such that $f(v) = Av$ in the following way:

$$\ker(f) = \{\, v \in V \text{ such that } Av = 0 \,\}$$

$$\mathrm{im}(f) = \{\, w \in W \text{ such that it exists } v \in V \text{ and } Av = w\}.$$

In other words, in order to find the kernel a linear homogeneous system has to be solved; in order to find the image, a linear system has to be compatible.

The following dimension formula, known as the rank-nullity theorem, is often useful:

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V).$$

The number $\dim(\mathrm{im}(f))$ is also called the rank of f and written as $\mathrm{rank}(f)$; the number $\dim(\ker(f))$ is called the nullity of f and written as $\mathrm{null}(f)$.

Nota 4.5. If V and W are finite-dimensional, bases have been chosen and f is represented by the matrix A, then the rank of f is equal to the rank of the matrix A.

Esempio 4.12. Denote V the vector space of all the polynomials of degree at most 2 and W the vector space of the (2,2)-matrices. Let f be the transformation defined as follows

$$\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow W \\ ax^2 + bx + c \ \mapsto & \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

recognize that f is linear and determine its kernel and image.

First, we recognize the linearity of f. Take two elements in V:

$$\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow W \\ v_1 = ax^2 + bx + c \ \mapsto & \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & c \end{bmatrix} \\ v_2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \ \mapsto & \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & \gamma \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

We immediately have that

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

which proves the additivity.

Furthermore, for every scalar $k \in \mathbb{R}$ we have

$$\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow W \\ kv_1 = akx^2 + bkx + ck \ \mapsto & \begin{bmatrix} ak & bk \\ ak+bk & ck \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & c \end{bmatrix} = kf(v_1) \end{aligned}$$

which proves the homogeneity of degree 1.

In order to find the kernel, we search for the elements $ax^2 + bx + c$ of V which are transformed into the "zero" element of W:

$$\begin{aligned} f: \qquad & V \longrightarrow W \\ ax^2 + bx + c \ \mapsto & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

in our example. Immediately, we deduce that $a = b = c = 0$ hence, the kernel is just made of the zero "vector", namely, the zero polynomial of degree 2.

On the other hand, the image is a subspace of W. For instance, the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

does not belong to the image. In order to be in the image the element in the position $(2, 1)$ has to be the sum of the first raw's entries; hence, the linear transformation given in this example does not "invades" the codomain of the function.

It is important to introduce two general properties for functions.

Definizione 4.6. *An injective function is a function that preserves distinctness, i.e. if* $v \neq w$ *then* $f(v) \neq f(w)$.

Definizione 4.7. *A function is said to be surjective, or onto, if its image is equal to its codomain.*

In the former example, the application was not surjective.

Teorema 4.1. *Let* f *be linear. It is injective if and only if its kernel is made only of the zero vector.*

In the former example, the application was injective.

4.4.1 Exercises

E. 4.20. Discuss whether the linear function

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \mapsto \begin{bmatrix} -2x + y \\ 6x - 3y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

is surjective or not.

S. 4.7. We rewrite the application in terms of representative matrix

$$\begin{bmatrix} -2x + y \\ 6x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

We observe that the second raw is equal to the first one multiplied by -3; hence, the application cannot cover the whole codomain, and it is not surjective.

E. 4.21. Discuss injectivity and surjectivity of the linear function

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} u+v \\ 2u-v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

S. 4.8. We rewrite the application in terms of representative matrix A:

$$\begin{bmatrix} u+v \\ 2u-v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

We deduce that $\det(A) = -3$, hence A is nonsingular and we can invert it. As a consequence, the linear application represented by A is one to one, surjective and injective.

E. 4.22. Find the dimension and a base of $\ker(f)$ and $\operatorname{Im}(f)$ for the linear function

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} 2x+z \\ x+y+z \\ 2x-y \\ x-y+z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

S. 4.9. The matrix representing the transformation is

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

which has rank equals to 3 (and nullity is 0). Hence the dimension of the image is 3, and it is less than the dimension of the codomain: the application is not surjective. A basis for the image can be made with the three columns of the representative matrix. On the other hand, the nullity being 0,implies that the kernel is made of the only zero vector, and hence, the application is injective.

E. 4.23. For which values of k the linear function

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{y} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

described by the matrix

$$A = \begin{bmatrix} k^2 & k+1 & 2k-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

is injective and surjective? Find the dimension and a basis for the kernel and the image of f for every value of k.

S. 4.10. We find that $\det(A) = 3(k-2)(k-1)$. Hence for $k \neq 1, 2$ the application is surjective and injective, and a basis of the image is the standard basis

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

If $k \neq 1, 2$ the nullity is zero, and there is no basis for the kernel.

We analyze the case $k = 1$. We have

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

having rank 2 (the submatrix obtained removing the first row and the third column is nonsingular, implying that the second and the third rows are linearly independent, and that the first and second columns are linearly independent as well). The image has dimension 2 and a basis is made of the first two columns of A. The nullity is one and in order to find the kernel we solve the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, which is actually equivalent to the following

$$\begin{cases} x + 2y = -z \\ 3x + y = -z \end{cases}$$

where the nonsingular submatrix that we have found before has been kept on the left hand side. Its solution is made of the points

$$\begin{cases} x = 3z/5 \\ y = -z/5 \\ z \text{ is free.} \end{cases}$$

Hence, as a basis for the kernel we can take the vector $[3, -1, 5]^{\mathrm{T}}$.

4.4.2 Examples

I would like to present you here introduce here some special case of linear transformations of the two-dimensional space $\mathbb{R}^2$ onto $\mathbb{R}^2$ (assuming the canonical basis is taken in $\mathbb{R}^2$). They are peculiar for their geometrical meaning. We discuss them using the representative matrix.

Esempio 4.13. A rotation by 90 degrees counterclockwise is described by the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Actually, the vector $[x, y]^{\mathrm{T}}$ is transformed in the vector $[-y, x]^{\mathrm{T}}$.

In general, a rotation by θ degrees counterclockwise is represented by the matrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Indeed, if we take the point in the complex plane with x and y coordinates: $z = x + iy$, we can rotate it of θ degrees multiplying by $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, obtaining

$$(x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

which, in terms of cartesian components, is the result of the multiplication of the representative matrix of the transformation by the vector $[x, t]^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.14. Reflections against the x, and respectively y axis are governed by the matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.15. The scaling by 2 in all directions, namely an expansion of 2 units is described by

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.16. The matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

describe a projection onto the y and respectively x axis.

4.5 Eigenvalues eigenvectors

As we have seen, any matrix, square or rectangular, can be seen as a linear transformation of an euclidean vector space into another.

In general, a matrix acts on a vector by changing both its magnitude and its direction; in this sense, it transforms it.

Here we want to focus on linear transformation of a vector space into itself, which are scheduled by square matrices. In particular, as shown by some of previous examples, a matrix may act on certain vectors by changing only their magnitude, and leaving their direction unchanged (or possibly reversing it), see Example 4.15.

The vectors whose direction is unchanged under the transformation, which in some sense, belong then to these preferential directions, are called the *eigenvectors* of the matrix.

A square matrix acts on an eigenvector by multiplying its magnitude by a factor, which is positive if its direction is unchanged and negative if its direction is reversed, which is grater that 1 if the eigenvector is expanded while it is between 0 and 1 if the eigenvector is contracted. This proportionality factor is the *eigenvalue* associated with that eigenvector.

An *eigenspace* is the set of all eigenvectors corresponding to the same eigenvalue and it is a subspace of $\mathbb{R}^n$ if the matrix is a (n, n)-square matrix.

Let me give you the formal definition.

Consider a linear transformation from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ represented by the matrix A.

Definizione 4.8 (Eigenvector, eigenvalue). *A non-zero vector x is an eigenvector of A if it is a (non-trivial) solution of the equation*

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

for some scalar λ (namely, if x is contracted or expanded by A by the factor λ). In this situation, the scalar λ is called an eigenvalue of A corresponding to the eigenvector x.

The key equation in this definition is the eigenvector equation, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. That is to say that the vector x has the property that its direction is not changed by the transformation A, but that it is only scaled by a factor of λ. Most vectors $\mathbf{x}$ will not satisfy such an equation: a regular vector $\mathbf{x}$ changes direction when acted on by A, so that $A\mathbf{x}$ is not a multiple of $\mathbf{x}$. This means that only certain special vectors $\mathbf{x}$ are eigenvectors, and only certain special scalars λ are eigenvalues. Of course, if A is a multiple of the identity matrix, then no vector changes direction, and all non-zero vectors are eigenvectors.

Nota 4.6. The requirement that the eigenvector be non-zero is imposed because the equation $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ holds for every A and every λ. Since the equation is always trivially true, it is not an interesting case.

In contrast, an eigenvalue can be zero in a nontrivial way. Each eigenvector is associated with a specific eigenvalue. One eigenvalue can be associated with an infinite number of eigenvectors.

As I have said, the geometric meaning of the eigenvector equation is that under the transformation A eigenvectors experience only changes in magnitude and sign, while the direction of $A\mathbf{x}$ is the same as that of $\mathbf{x}$. The eigenvalue λ is simply the amount of "stretch or "shrink to which a vector is subjected when transformed by A. If $\lambda = 1$, the vector remains unaffected by the transformation. A transformation I under which any vector $\mathbf{x}$ remains unchanged, $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, is defined as identity transformation. If $\lambda = -1$, the vector flips to the opposite direction; this is known as a reflection.

4.5.1 Properties

We itemize here some well known properties of eigenvectors. We don't prove them, even if the proofs are quite simple and follow directly from the definition.

- If $\mathbf{x}$ is an eigenvector of the linear transformation A with eigenvalue λ, then any scalar multiple $\alpha\mathbf{x}$ is also an eigenvector of A with the same eigenvalue.
- Similarly, if more than one eigenvector shares the same eigenvalue λ, any linear combination of these eigenvectors will itself be an eigenvector with eigenvalue λ.

- (Consequence of the former two.) Together with the zero vector, the eigenvectors of A with the same eigenvalue form a linear subspace of the vector space (the eigenspace).
- The eigenvectors corresponding to different eigenvalues are linearly independent meaning, in particular, that in an n-dimensional space the linear transformation A cannot have more than n eigenvectors with different eigenvalues.

Definizione 4.9 (Defective matrix). *A matrix is said to be* defective *if it fails to have n linearly independent eigenvectors.*

All defective matrices have fewer than n distinct eigenvalues, but not all matrices with fewer than n distinct eigenvalues are defective.

4.5.2 Characteristic equation and computation of eigenvectors

A scalar λ is an eigenvalue of A if and only if there is an eigenvector $\mathbf{v} \neq 0$ such that

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

the eigenvector equation can be either rearranged as

$$(\lambda I - A)\mathbf{v} = 0 \qquad \text{or} \qquad (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

(where I is the identity matrix). Since v is non-zero, this means that the matrix $\lambda I - A$ (or equivalently $A - \lambda I$) is singular, which in turn means that its determinant is 0 (non-invertible). Thus, the roots of the function $\det(\lambda I - A)$ are the eigenvalues of A, and it is clear that this determinant is a polynomial in λ.

If there exists an inverse

$$(A - \lambda I)^{-\mathbf{1}},$$

then both sides can be left multiplied by the inverse to obtain the trivial solution: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Thus we require there to be no inverse by assuming from linear algebra that the determinant equals zero:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

This requirement on the determinant leads to the characteristic equation of A, and the left-hand side is called the characteristic polynomial. When expanded, this gives a polynomial equation for λ. The eigenvector $\mathbf{x}$ or its components are not present in the characteristic equation.

4.5.3 Example

The matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

defines a linear transformation of the real plane $\mathbb{R}^2$ into $\mathbb{R}^2$. The eigenvalues of this transformation are given by the characteristic equation

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0\,, \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0\,, \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0\,.$$

The roots of this equation (i.e. the values of λ for which the equation holds) are $\lambda = 1$ and $\lambda = 3$. Having found the eigenvalues, it is possible to find the eigenvectors. Considering first the eigenvalue $\lambda = 3$, we have

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

After matrix-multiplication

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

This matrix equation represents a system of two linear equations $2x + y = 3x$ and $x + 2y = 3y$. Both the equations reduce to the single linear equation $x = y$ because the rank of the system is 1. To find an eigenvector, we are free to choose any value for x (except 0), so by picking $x = 1$ and setting $y = x$, we find an eigenvector with eigenvalue 3 to be represented as

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

from the first property of eigenvectors we know that every multiple of this vector is eigenvector related to the same eigenvalue. We can confirm this is an eigenvector with eigenvalue 3 by checking the action of the matrix on this vector:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Any scalar multiple of this eigenvector will also be an eigenvector with eigenvalue 3.

For the eigenvalue $\lambda = 1$, a similar process leads to the equation $x = -y$, and hence an eigenvector with eigenvalue 1 is given by

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

For transformations on real vector spaces, the coefficients of the characteristic polynomial are all real. However, the roots are not necessarily real; they may include complex numbers with a non-zero imaginary component. For instance, of course a matrix representing a planar rotation of 45 degrees will not leave any non-zero vector pointing in the same direction; in this case eigenvalues and eigenvectors will be complex. Complex eigenvectors lose the geometric meaning of being the (real) directions unchanged by the transformation.

As well as distinct roots, the characteristic equation may also have repeated roots. However, having repeated roots does not imply there are multiple distinct (i.e., linearly independent) eigenvectors with that eigenvalue.

Definizione 4.10 (Algebraic multiplicity). *The algebraic multiplicity of an eigenvalue is defined as the multiplicity of the corresponding root of the characteristic polynomial.*

Definizione 4.11 (Geometric multiplicity). *The geometric multiplicity of an eigenvalue is defined as the dimension of the associated eigenspace, i.e. number of linearly independent eigenvectors with that eigenvalue.*

Definizione 4.12 (Regular eigenvalue). *An eigenvalue is regular if its geometric and algebraic multiplicity coincide.*

If an eigenvalue is simple, it is regular.

4.6 Live Exercises on Linear Transformations and Eigenvectors

E. 4.24. Find eigenvalues and eigenvectors associated to the following $(2, 2)$ matrices:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$;
3. $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

E. 4.25. Consider the linear application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ represented by the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Find the eigenvalues and their eigenspace.

E. 4.26. Find eigenvalues and eigenvectors associated to

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Is A defective?

E. 4.27. Given

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

representing the linear transformation $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Find a base of $\ker(f)$ and $\mathrm{Im}(f)$. Find the subspaces of $\mathbb{R}^3$ of the vectors which are not rotated by f.

E. 4.28. Can you find a basis of $\mathbb{R}^3$ made of eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}?$$

E. 4.29. Study the regularity of the eigenvectors associated to the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

E. 4.30. Given $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$, are there value of the parameter k for which all the eigenvalues of A are regular? When possible, find a basis of eigenvectors of $\mathbb{R}^3$.

4.7 Exercises

E. 4.31. A linear transformation $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $\boxed{\mathbf{a}}$ is injective, $\boxed{\mathbf{b}}$ is surjective, $\boxed{\maltese}$ is never injective, $\boxed{\mathbf{d}}$ is never surjective.

E. 4.32. A linear transformation $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ $\boxed{\mathbf{a}}$ is injective, $\boxed{\mathbf{b}}$ is surjective, $\boxed{\mathbf{c}}$ is one to one, $\boxed{\maltese}$ is never surjective.

E. 4.33. Consider the linear transformation $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ represented by the matrix A. Then $\boxed{\mathbf{a}}$ A is non singular, $\boxed{\mathbf{b}}$ f is surjective, $\boxed{\mathbf{c}}$ A has four distinct eigenvalues, $\boxed{\maltese}$ if A is non singular, the ker of f is made of the origin only.

E. 4.34. The linear application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ represented by the matrix A is injective. Then $\boxed{\maltese}$ A is non singular, $\boxed{\mathbf{b}}$ f is not surjective, $\boxed{\mathbf{c}}$ eigenvalues of A are distinct, $\boxed{\mathbf{d}}$ an eigenvalue is 0.

E. 4.35. Given the linear transformation $f : V \longrightarrow W$ between vector spaces, then $\boxed{\mathbf{a}}$ f is invertible, $\boxed{\maltese}$ $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$, $\boxed{\mathbf{c}}$ f can be represented by some appropriate matrix A, $\boxed{\mathbf{d}}$ f is surjective if and only if it is injective.

E. 4.36. Consider the linear application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ described by the relation $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$. Then $\boxed{\mathbf{a}}$ f cannot be inverted, $\boxed{\maltese}$ $\ker(f) = \mathbf{0}$, $\boxed{\mathbf{c}}$ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, $\boxed{\mathbf{d}}$ there are no directions which remains unchanged under the transformation.

E. 4.37. Given the linear transformation $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ described by the relation $f(x, y, z) = (x + y + z, 4x + y, 2x - y - 2z)$, we deduce that $\boxed{\mathbf{a}}$ $(3, 2, 1) \in \mathrm{Im}(f)$, $\boxed{\mathbf{b}}$ the eigenvalues of the representative matrix are not distinct, $\boxed{\mathbf{c}}$ f is one to one, $\boxed{\maltese}$ $(1, -4, 3) \in \ker(f)$.

E. 4.38. Let $f : V \longrightarrow W$ be a linear application between Euclidean spaces. Then $\boxed{\mathbf{a}}$ f is injective if and only if it is surjective, $\boxed{\maltese}$ the dimension of the image plus the dimension of the kernel equals the dimension of V, $\boxed{\mathbf{c}}$ the dimension of the image added to the dimension of the kernel equals the dimension of W, $\boxed{\mathbf{d}}$ if $\dim(V) > \dim(W)$ then f is surjective.

E. 4.39. Consider $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ and A the matrix representing the transformation. Then, $\boxed{\mathbf{a}}$ A has distinct eigenvalues, $\boxed{\mathbf{b}}$ the algebraic and geometric multiplicity of eigenvalues coincide, $\boxed{\maltese}$ if λ_1 and λ_2 are distinct eigenvalues, their corresponding eigenvectors are distinct, $\boxed{\mathbf{d}}$ the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has the zero solution only.

E. 4.40. A is a square matrix. Which is true? $\boxed{\mathbf{a}}$ If $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are eigenvectors of A corresponding to distinct eigenvalues, then $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ is an eigenvector. $\boxed{\mathbf{b}}$ The eigenvector $\mathbf{x}$ solves the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\boxed{\mathbf{c}}$ The product of the eigenvalues of A coincide with the sum of the diagonal entries of A. $\boxed{\maltese}$ If $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are eigenvectors associated to the same eigenvalue, then $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ is an eigenvector.

E. 4.41. A is a (n, n)-matrix. Which is true? $\boxed{\mathbf{a}}$ The algebraic and geometric multiplicity of every eigenvalue coincide if the determinant of A is different from zero. $\boxed{\mathbf{b}}$ If the matrix is singular, then the zero eigenvalue is regular. $\boxed{\mathbf{c}}$ Every eigenvector has algebraic multiplicity 1. $\boxed{\maltese}$ n linearly independent eigenvectors can be found if every eigenvalue is regular.

E. 4.42. Consider the matrix A representing the linear transformation $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Then, $\boxed{\mathbf{a}}$ the columns of A are linearly independent, $\boxed{\maltese}$ A is (n, m), $\boxed{\mathbf{c}}$ A is (m, n), $\boxed{\mathbf{d}}$ $\ker(f) = \mathbf{0}$.

E. 4.43. Consider A the matrix describing the linear transformation $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ such that $\ker(f) = \mathbf{0}$. Then, $\boxed{\mathbf{a}}$ all eigenvalues of A are zero, $\boxed{\mathbf{b}}$ the rank of A is 1 $\boxed{\maltese}$ $\det(A) \neq 0$ $\boxed{\mathbf{d}}$ the rows of A are not linearly independent.

E. 4.44. Let A be a matrix with the zero eigenvalue. Then, $\boxed{\mathbf{a}}$ columns of A are linearly independent, $\boxed{\mathbf{b}}$ the rank of A is maximum $\boxed{\mathbf{c}}$ the zero eigenvalue is regular $\boxed{\maltese}$ A is square.

E. 4.45. Consider the matrix A representing the linear transformation $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Then, $\boxed{\maltese}$ $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = m$, $\boxed{\mathbf{b}}$ $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$, $\boxed{\mathbf{c}}$ the rank of A is m, $\boxed{\mathbf{d}}$ the rank of A is n.

5

Trasformazioni lineari

5.1 Trasformazioni lineari tra spazi vettoriali

E. 5.1. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e W lo spazio vettoriale delle matrici (2,2). Sia f l'applicazione

$$\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow W \\ ax^2+bx+c \ \mapsto & \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Riconoscere se si tratta di una applicazione lineare. Determinare inoltre se è suriettiva e iniettiva.

E. 5.2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici (2,2). Sono assegnate le seguenti applicazioni da V in V:

1. $\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow V \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto & \begin{bmatrix} a+b & a^2 \\ a+b & c \end{bmatrix} \end{aligned}$
2. $\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow V \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto & \begin{bmatrix} a-b & a-2 \\ a-2b & d \end{bmatrix} \end{aligned}$
3. $\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow V \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto & \begin{bmatrix} a+b+c & a-b-c \\ a+d & c-b+d \end{bmatrix}. \end{aligned}$

Riconoscere se si tratta di applicazioni lineari. Determinare inoltre se sono suriettive e iniettive.

E. 5.3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici (2,2). La funzione lineare così definita

$$\begin{aligned} f: \quad & V \longrightarrow V \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto & \begin{bmatrix} a-b & d \\ a-b & c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

è iniettiva o suriettiva? Determinare la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine.

E. 5.4. Sia v lo spazio vettoriale della matrici (2,2) e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$ l'applicazione così definita

$$(a, b) \mapsto \begin{bmatrix} a\ b\ a \\ a\ b\ a \end{bmatrix}.$$

Rispondere alle domandi seguenti.

1. f è iniettiva, ma non sureittiva?
2. f è suriettiva ma non iniettiva?
3. f è biiettiva?
4. $\mathrm{Im}(f)$ è lo spazio vettoriale generato da $\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}$?
5. $\mathrm{Im}(f)$ è lo spazio vettoriale generato da $\begin{bmatrix} 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \end{bmatrix}$?

5.2 Trasformazioni lineari tra spazi euclidei

E. 5.5. Discutere la suriettività dell'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} -2x + y \\ 6x - 3y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E. 5.6. Discutere l'iniettività e la suriettività dell'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} u + v \\ 2u - v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E. 5.7. Trovare la dimensione e una base di $\ker(f)$ per la funzione

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) &\mapsto \begin{bmatrix} 2x + z \\ y + z - t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E. 5.8. Trovare la dimensione e una base di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ per la funzione

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{bmatrix} 2x + z \\ x + y + z \\ 2x - y \\ x - y + z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E. 5.9. Sia f l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ descritta dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & k \end{bmatrix}.$$

Determinare i valori di k per cui f è iniettiva e quelli per cui è suriettiva. Quando l'applicazione non è suriettiva, trovare la dimensione e la base del nucleo.

E. 5.10. Trovare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione ed una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$ quando

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x + ky + 2z \\ 3y - kz \\ x + 2y + 3z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E. 5.11. Sia data

$$A = \begin{bmatrix} k & k+1 \\ k+1 & 4 \\ 2k+1 & -4 \end{bmatrix}$$

e sia

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{y} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 2k \\ k \end{bmatrix}$ appartiene a $\mathrm{Im}(f)$? Determinarne quindi la controimmagine.

E. 5.12. Per quali valori di k l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{y} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

e definita dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} k^2 & k+1 & 2k-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

risulta biiettiva? Trovare la dimensione e la base del nucleo di f e dell'immagine di f per ogni valore di k.

5.3 Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$: autovalori, autovettori e diagonalizzazione

E. 5.13. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Trovare gli autovalori e l'autospazio associato a ciascuna autovalore.

E. 5.14. Data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare autovalori ed autovettori e se possibile una matrice diagonale D simile ad A.

E. 5.15. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

associata alla trasformazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Trovare una base di $\ker(f)$ ed $\mathrm{Im}(f)$. Determinare i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di vettori che non vengono ruotati da f.

E. 5.16. Dopo aver trovato la matrice P che porta $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ in forma diagonale $D = P^{-1}AP$, sfruttare la relazione $D = P^{-1}AP$ per calcolare A^6.

E. 5.17. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ determinare la dimensione ed una base degli autospazi associati a ciascun autovalore.

E. 5.18. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

trovare il determinante, autovettori ed autospazi associati. Calcolare quindi il determinante, gli autovalori e gli autospazi della matrice che si ottiene da A scambiando la prima riga con l'ultima.

E. 5.19. Studiare la regolarità degli autovalori di

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A è diagonalizzabile?

E. 5.20. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

trovare una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

E. 5.21. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

studiare la regolarità degli autovalori.

E. 5.22. Per quali valori del parametro k la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile? Trovare gli autovettori associati.

5.4 Esercizi a risposta multipla

Esercizio 1.
Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $\boxed{\textbf{a}}$ è sempre iniettiva, $\boxed{\textbf{b}}$ è sempre suriettiva, $\boxed{\textbf{c}}$ non è mai iniettiva, $\boxed{\textbf{d}}$ non è mai suriettiva.

Esercizio 2.
Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ $\boxed{\textbf{a}}$ è sempre iniettiva, $\boxed{\textbf{b}}$ è sempre suriettiva, $\boxed{\textbf{c}}$ è biunivoca, $\boxed{\textbf{d}}$ non è mai suriettiva.

Esercizio 3.
Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ rappresentata dalla matrice A. Allora $\boxed{\textbf{a}}$ A è non singolare, $\boxed{\textbf{b}}$ f è sempre suriettiva, $\boxed{\textbf{c}}$ A ha quattro autovalori, $\boxed{\textbf{d}}$ il nucleo di f è la sola origine.

Esercizio 4.
L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice A è iniettiva. Allora $\boxed{\textbf{a}}$ A è non singolare, $\boxed{\textbf{b}}$ f non è suriettiva, $\boxed{\textbf{c}}$ gli autovalori sono distinti, $\boxed{\textbf{d}}$ un autovalore è 0.

Esercizio 5.
Data l'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tra spazi vettoriali, allora $\boxed{\textbf{a}}$ f è invertibile, $\boxed{\textbf{b}}$ $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$, $\boxed{\textbf{c}}$ f può essere rappresentata con una opportuna matrice A, $\boxed{\textbf{d}}$ f è suriettiva se e solo se è iniettiva.

Esercizio 6.
Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così descritta $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$. Allora $\boxed{\textbf{a}}$ f non può essere invertita, $\boxed{\textbf{b}}$ $\ker(f) = \mathbf{0}$, $\boxed{\textbf{c}}$ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, $\boxed{\textbf{d}}$ non ci sono direzioni che rimangono invariate dall'applicazione.

Esercizio 7. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così descritta $f(x, y, z) = (x + y + z, 4x + y, 2x - y - 2z)$. Allora $\boxed{\textbf{a}}$ $(3, 2, 1) \in \mathrm{Im}(f)$, $\boxed{\textbf{b}}$ gli autovalori non sono distinti, $\boxed{\textbf{c}}$ f è biunivoca $\boxed{\textbf{d}}$ $(1, 4, 1) \in \ker(f)$.

Esercizio 8. Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi euclidei. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ f è iniettiva se e solo se è suriettiva, $\boxed{\mathbf{b}}$ la dimensione dell'immagine sommata alla dimensione del nucleo deve dare la dimensione di V, $\boxed{\mathbf{c}}$ la dimensione dell'immagine sommata alla dimensione del nucleo deve dare la dimensione di W, $\boxed{\mathbf{d}}$ se $\dim(V) > \dim(W)$ allora f è suriettiva.

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e A la matrice che descrive la trasformazione. Allora, $\boxed{\mathbf{a}}$ A della ha autovalori distinti, $\boxed{\mathbf{b}}$ la molteplicità geometrica degli autovalori coincide con quella geometrica, $\boxed{\mathbf{c}}$ se λ_1 e λ_2 sono autovalori diversi, sono diversi gli autovettori corrispondenti, $\boxed{\mathbf{d}}$ l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha solo la soluzione nulla.

Esercizio 10. Sia data A, quadrata; allora $\boxed{\mathbf{a}}$ se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono autovettori di A relativi ad autovalori diversi, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è ancora autovettore, $\boxed{\mathbf{b}}$ l'autovettore $\mathbf{x}$ risolve l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\boxed{\mathbf{c}}$ il prodotto degli autovalori di A coincide con la somma degli elementi della diagonale di A, $\boxed{\mathbf{d}}$ se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono autovettori relativi ad uno stesso autovalore, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è ancora autovettore.

Esercizio 11. Sia data A, di dimensione (n, n); allora $\boxed{\mathbf{a}}$ la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori coincide se il determinante è non nullo, $\boxed{\mathbf{c}}$ ogni autovalore ha molteplicit $\boxed{\mathbf{a}}$ algebrica pari a 1, $\boxed{\mathbf{d}}$ esistono n autovettori linearmente indipendenti se la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori coincide.

Esercizio 12. Sia A una matrice che descrive una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ le colonne di A sono linearmente indipendenti, $\boxed{\mathbf{b}}$ A è (n, m), $\boxed{\mathbf{c}}$ A è (m, n), $\boxed{\mathbf{d}}$ $\ker(f) = \mathbf{0}$.

Esercizio 13. Sia V il sottospazio vettoriale generato dalla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. La matrice A ottenuta dall'accostamento dei tre vettori descrive una trasformazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. Risulta: $\boxed{\mathbf{a}}$ $r(A) = 5$, $\boxed{\mathbf{b}}$ f è suriettiva, $\boxed{\mathbf{c}}$ $\ker(f) = \mathbf{0}$, $\boxed{\mathbf{d}}$ le righe di A sono linearmente indipendenti.

Esercizio 14. Sia V uno spazio euclideo e A una matrice che descrive la trasformazione suriettiva $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^5$; allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $\dim(V) = 5$, $\boxed{\mathbf{b}}$ $\dim(V) \geq 5$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\dim(V) \leq 5$ $\boxed{\mathbf{d}}$ le righe di A sono linearmente indipendenti.

Esercizio 15. Sia A una matrice che descrive la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = \mathbf{0}$. $\boxed{\mathbf{a}}$ gli autovalori di A sono tutti nulli $\boxed{\mathbf{b}}$ $r(A) = 1$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\det(A) \neq 0$ $\boxed{\mathbf{d}}$ le righe di A non solo linearmente indipendenti.

Esercizio 16. Sia A una matrice con autovalore 0. $\boxed{\mathbf{a}}$ A le righe di A sono linearmente indipendenti, $\boxed{\mathbf{b}}$ $r(A)$ è massimo $\boxed{\mathbf{c}}$ l'autovalore 0 è regolare $\boxed{\mathbf{d}}$ A è quadrata.

Esercizio 17. Sia A una matrice che descrive la trasformazione $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, allora
$\boxed{\mathbf{a}}$ $\dim(ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = m$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\dim(ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $r(A) = m$
$\boxed{\mathbf{d}}$ $r(A) = n$

SOLUZIONI

Esercizio 1. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 2. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 3. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 4. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 5. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 6. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 7. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 8. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 9. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 10. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 11. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 12. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 13. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 14. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 15. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 16. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 17. $\boxed{\mathbf{a}}$

6

Introduzione

6.1 Prerequisiti

6.1.1 Esercizi

E. 6.1. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

a. $2^z - 15\sqrt{2^z} = 16$
b. $7^{x-1} + 7^{x+1} = 2^x$
c. $9^y - 3^{y+1} + 2 = 0$.

E. 6.2. Disegnare, qualitativamente, i grafici delle linee descritte dalle relazioni che seguono.

a. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$
b. $y = \arctan x$
c. $y = e^x$, $y = (\sqrt{2})^x$, $y = 7^{x/4}$, $y = \big(1/3\big)^x$
d. $2y + x - 1 = 0$, $6x = 21$, $y = x$, $y + x = -\sqrt{2}$, $y = e$, $x = 2y + 3$
e. $y = \log_{10} x$, $y = \log_e x$, $y = \log_{1/\pi} x$, $y = \log_{\sqrt{3}} x$
f. $y = x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - x$
g. $y = x^2 + 2x - 1$, $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 3x^2 + 2$
h. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 10 = 0$

E. 6.3. Calcola i seguenti logaritmi:

a. $\log_{100} 10$
b. $\log_{\pi^2} \pi\sqrt{\pi^5}$
c. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8}$
d. $\log_y y$,
e. $\log_{1/2} 4$.

E. 6.4. Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche

a. $\log_4(x^2) - \log_8 \sqrt{x} = \dfrac{5}{3}$
b. $2\log_2(5-x) = \log_2(3-x) + 1$.

E. 6.5. Utilizzando la definizione di *modulo* (o *valore assoluto*) di un numero, e ricordando come agiscono le traslazioni sui grafici delle funzioni, disegnare nel piano cartesiano le linee descritte nel seguito, trovando per ciascuna, il valore delle intersezioni coll'asse x e coll'asse y.

a. $y = |\sin(x+\pi/3)|$, $y = |\cos x - 1|$, $y = |\tan(x+\pi/4)|$
b. $y = |\arctan(x-1)|$
c. $y = |x-1|$, $y = |2-3x|$, $y = |\pi x - e|$, $y = |x-\sqrt{2}| - \sqrt{3}$
d. $y = |\log_{10}(x-2)|$, $y = |\log_e x + e|$, $y = |\log_{1/\pi}(x+\pi) - \pi|$
e. $y = |x^2-1|$, $y = 1-|x^2-1|$, $y = |x^2-x|$, $y = |x^2-x|-1$.

E. 6.6. Dopo aver disegnato, qualitativamente, i grafici delle funzioni che possiamo associare ai vari membri delle disuguaglianze nel seguito, indicare precisamente quali sono i valori della variabile x per i quali la disequazione è soddisfatta.

a. $\sin x > \pi/4$,
b. $|\cos x| < 1$,
c. $-1 < |\tan x| < 1$ (attenzione alla periodicità)
d. $\arctan(x-1) > 0$,
e. $e^x > 0$, $e^x > 1$,
f. $(\sqrt{2})^x > 0$,
g. $(\sqrt{2})^x > 1$,
h. $\big(1/3\big)^x > 0$,
i. $\big(1/3\big)^x < 1$
j. $|x-2| > |2-3x|$, $|x| < 12$, $|x| > -2$,
k. $|x-2e| \geq -2$, $|2-\pi x| > 1$,
l. $|x|x > 1$.

E. 6.7. Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali e logaritmiche:

a. $3^{x+1} \geq 5^{1-x}$,
b. $\log_3 x - \log_{1/3} x \leq 2$,
c. $\log_2(\log_3(x-4)) > 0$,
d. $|2^x - 1| > 3$,
e. $4^2 y \leq 4^{y+1/2} - 1$.

E. 6.8. Come si dimostra che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale?

E. 6.9. Supponiamo che studenti iscritti al Politecnico nel 2005 siano stati 5700. E supponiamo che ogni anno vi sia un incremento delle immatricolazioni pari al 2%.

a. Quante saranno le matricole al Politecnico nel 2010, seguendo questo modello?
b. Sempre secondo il modello assunto, quando le matricole saranno almeno 7000?

E. 6.10. Disegna il grafico della funzione

$$y = |||x-1|-2|-3|.$$

6.2 Esercizi aggiuntivi

E. 6.11. Dati gli insiemi

$$A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\} \text{ e } B = \{\flat, \natural, \sharp\}$$

costruire il prodotto $A \times B$, $A \times A$ e $B \times B$. Quindi INVENTARE una relazione su $A \times B$, una relazione d'ordine (non totale e non banale) su A ed una relazione di equivalenza (non banale) su B.

E. 6.12. Si dia una definizione di *funzione*.

E. 6.13. Se Q è un insieme di 10 oggetti distinti, quante sono le funzioni biunivoche che possono essere definite da Q in Q? Quante quelle suriettive? Quante quelle iniettive?

E. 6.14. Cos'è una *relazione* tra due elementi x ed y appartenenti ad insiemi diversi (X e Y rispettivamente)? Cos'è il suo *grafico*? Quando questa può dirsi una *funzione*?

E. 6.15. La funzione

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

è iniettiva? Restringendo il suo dominio all'intervallo reale $0 \leq x \leq 2\pi$ la funzione è iniettiva? Restringendo il suo dominio all'intervallo reale $-\pi \leq x \leq \pi$ la funzione è iniettiva? Restringendo il suo dominio all'intervallo reale $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ la funzione è iniettiva?

E. 6.16. La relazione in $\mathbb{Z}$ descritta da $r(x, y) \Leftrightarrow \{x, y \in \mathbb{Z} \wedge |x| = 5|y|\}$ è una funzione? Se ne disegni il grafico.

E. 6.17. Dimostrare che se $A \subset B$ e $C \subset D$ allora $A \times C \subset B \times D$.

7

Grafici di funzioni elementari

7.1 Esercizi proposti

E. 7.1. Si disegnino i grafici delle funzioni $y = \sin(-x)$, $y = \cos(-x)$, $y = \arctan(-x)$, $y = \log(-x)$.

E. 7.2. Si disegnino i grafici delle funzioni $y = \sin|x|$, $y = \cos|x|$, $y = \arctan|x|$, $y = \log|x|$, $y = e^{|x|}$.

E. 7.3. Si disegni il grafico della funzione periodica di periodo 2 che coincide con la retta $y = x$ nell'intervallo $0 \leq x < 2$.

E. 7.4. Sovrapporre il grafico delle funzioni $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, trovandone le intersezioni.

E. 7.5. Si disegni il grafico della funzione periodica di periodo 2 che coincide con $y = x^2$ nell'intervallo $-1 \leq x < 1$.

E. 7.6. Sovrapporre il grafico della funzione $y = x^2$ e quello della funzione $y = \sqrt{x}$ per i valori i $x \geq 0$.

E. 7.7. Sia $y = f(x)$ il grafico della funzione $y = |||x-1|-2|-3|$. Disegnare il grafico di

$$y = \frac{1}{f(x)} \text{ e di } y = f(|x|).$$

E. 7.8. Sia $y = f(x)$ la retta passante per $A = (0, 2)$ e $B = (1, 0)$. Trovare l'espressione analitica, e disegnare qualitativamente i grafici di:

1. $y = -f(x)$ ed $y = f(-x)$;
2. $y = |f(x)|$ ed $y = f(|x|)$;
3. $y = f(x + 1)$ ed $y = f(x) + 1$;
4. $y = f(2 - x)$ ed $y = 2 - f(x)$;

5. $y = f(2x)$ ed $y = 2f(x)$;
6. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ed $y = \frac{1}{f(x)}$.

E. 7.9. Si definisce la funzione *segno* di x come $y = \dfrac{|x|}{x}$ per ogni $x \neq 0$. Essa viene indicata con $y = \operatorname{sign} x$. Se ne trovi il dominio e se ne disegni il grafico.

E. 7.10. Sovrapporre il grafico della funzione $y = x^2$ e quello della funzione $y = \sqrt{|x|}$ e trovarne le intersezioni.

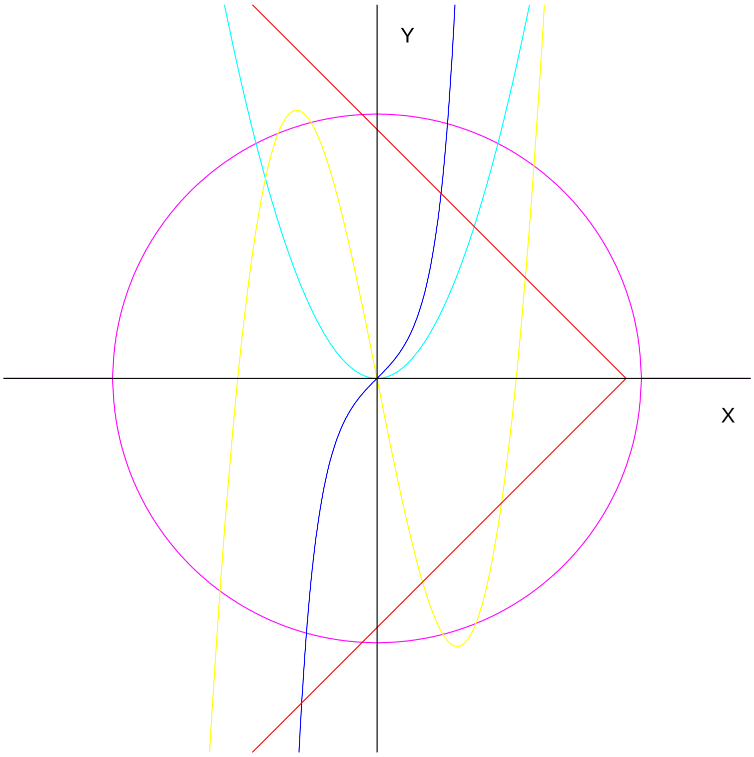

Figura 7.1.

E. 7.11. Si disegni il grafico della funzione periodica di periodo 2 che coincide con $y = x + 1$ nell'intervallo $-1 \leq x < 0$ e con $y = -x + 1$ nell'intervallo $0 \leq x < 1$.

E. 7.12. Si disegni il grafico della funzione $y = \operatorname{sign} x \arctan x$, specificando il dominio.

E. 7.13. Si disegnino i grafici delle funzioni $y = x\operatorname{sign} x$, $y = x^2\operatorname{sign} x$, $y = \dfrac{\operatorname{sign} x}{x}$ precisando il dominio.

E. 7.14. Si disegni il grafico di $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $y = |x - \frac{\pi}{3}|$, $y = \operatorname{sign}(x-1)$, $y = \operatorname{sign} x + 1$, $y = \arctan(x + \frac{\pi}{4}) - 1$, $y = \cos(x + \frac{5\pi}{6}) + \frac{1}{2}$, $y = \exp(x-1)$, $y = \exp(x) - 1$, $y = \exp(x+4) - 6$, $y = x^4 - 2$.

E. 7.15. Si disegni il grafico delle funzioni $y = \cos 2x$, $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = |2x - \frac{\pi}{3}| - 1$, $y = \operatorname{sign} 3x$, $y = \operatorname{sign} 3x - 2$, $y = 3\operatorname{sign} x + 1$, $y = \arctan 4x + 2$, $y = \cos \frac{x}{\pi}$, $y = \exp(2x-1)$, $y = 2\exp x - 1$. Per ciascuna si trovino le intersezioni con l'asse x.

E. 7.16. Si disegni il grafico della funzione così definita:

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ se } x \text{ è razionale} \\ 0 \text{ se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases} \end{array}$$

E. 7.17. Si disegnino i grafici delle funzioni $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt[3]{x}$ precisando il dominio.

E. 7.18. I grafici nei vari colori in Figura 7.10 rappresentano delle relazioni in $X \times Y$. Si dica quali tra questi rappresentano delle funzioni $f : X \longrightarrow Y$ e quali delle funzioni $f : Y \longrightarrow X$.

E. 7.19. In Figura 7.2 sono rappresentati i grafici di 4 funzioni $y = f(x)$ definite dall'intervallo $[-1, 3]$ all'intervallo $[-2, 0.5]$:

$$f : \begin{array}{rcl} [-1, 3] & \longrightarrow & [-2, 0.5] \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Per ciascuna funzione (a), (b), (c), (d) si dica se è iniettiva, suriettiva, biunivoca, precisando (con l'approssimazione consentita dalla scala dei grafici) quale è il dominio della funzione e quale la sua immagine.

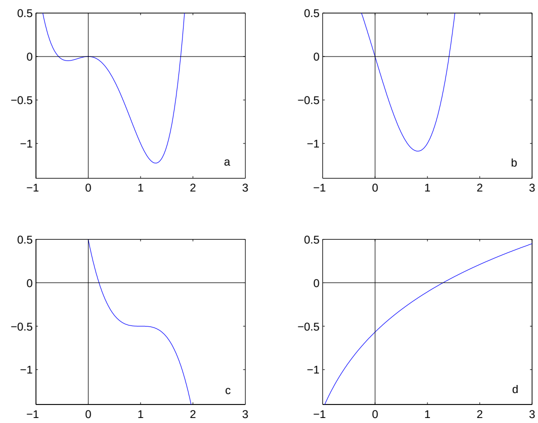

Figura 7.2.

8

Topologia in $\mathbb{R}^n$. Introduzione ai limiti

8.1 Definizioni

Si danno le seguenti definizioni riferite a un insieme A di punti in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Solo quando esplicitamente ricordato ci riferiremo al caso monodimensionale $n = 1$.

Dati due punti

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

appartenenti ad $\mathbb{R}^n$ indichiamo con

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

la distanza tra questi due punti.

df. Dato un qualunque punto x di $\mathbb{R}^n$ chiamiamo **intorno sferico** di x di raggio r l'insieme di punti che hanno distanza da x strettamente minore di r:

$$\mathcal{I}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}.$$

Osserviamo che nel caso monodimensionale $n = 1$, l'intorno sferico è un intervallo della retta reale di ampiezza $2r$ centrato in x, estremi esclusi. Nel caso bidimensionale $n = 2$, l'intorno sferico di raggio r del punto x è un disco di raggio r, circonferenza esclusa. Solo nel caso tridimensionale $n = 3$, l'intorno sferico di raggio r coincide effettivamente coi punti appartenenti ad una sfera (superficie laterale esclusa). Nel caso $n \geq 4$ si parla comunque di intorno sferico di x di raggio r intendendo l'insieme di punti con distanza da x inferiore ad r. Tale insieme generalizza il concetto di sfera e costituisce una *ipersfera* in n dimensioni.

Si considera un insieme $A \in \mathbb{R}^n$. Definiamo alcune importanti proprietà topologiche relative ai punti di A.

df. Diciamo che $x \in A$ è **punto interno** ad A se esiste un intorno sferico tutto contenuto in A, ovvero se esiste r (sufficientemente piccolo) tale che

$$\mathcal{I}(x, r) \subset A.$$

oss. Si osserva che necessariamente un punto interno ad un insieme appartiene all'insieme.

df. Diciamo insieme **complementare** di A in $\mathbb{R}^n$ l'insieme

$$\mathcal{C}_A = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus A\}.$$

df. Diciamo che x è **punto esterno** ad A se è interno a $\mathcal{C}_A$.

oss. Necessariamente un punto esterno non può appartenere all'insieme.

df. Diciamo che x è **punto di frontiera** per A se non è né interno né esterno.

oss. Un punto di frontiera può appartenere o non appartenere all'insieme.

df. Diciamo che x è **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno sferico di x cade almeno un punto (diverso da x) di A, ovvero se

$$\forall r > 0\ \exists y \in A\ (y \neq x) : y \in \mathcal{I}(x, r) \cap A.$$

oss. 1 Un punto di accumulazione per l'insieme A può appartenere o non appartenere ad A.

oss. 2 Necessariamente ogni punto interno è punto di accumulazione.

df. Un punto $x \in A$ che non sia di accumulazione per A si dice **punto isolato**.

Dato un insieme A in $\mathbb{R}^n$ indichiamo allora con

$$\begin{array}{rl} \dot{A} & \text{l'insieme dei punti interni di } A \\ \partial A & \text{l'insieme dei punti di frontiera di } A. \\ A' & \text{l'insieme dei punti di accumulazione di } A \end{array}$$

oss. $A' \supseteq \dot{A}$.

df. Un insieme A è detto **discreto** se non ha punti di accumulazione ovverosia

$$A' = \emptyset.$$

Le definizioni seguenti sono di importanza capitale.

df. Un insieme A è **aperto** se è costituito solo da punti interni, ovvero se coincide con l'insieme dei suoi punti interni:

$$A = \dot{A}.$$

df. Un insieme A è **chiuso** se è aperto $\mathcal{C}_A$.

df. Diciamo **chiusura** dell'insieme A, e la indichiamo con $\overline{A}$, l'insieme $\overline{A} = A \cup \partial A$.

df. Dati due insiemi $A \subset B$, se accade che $\overline{A} = \overline{B}$ si dice che A è **denso** in B.

df. Un insieme A è **limitato** in $\mathbb{R}^n$ se esiste un intorno sferico dell'origine che contiene A, ovvero se

$$\exists\, r > 0 : A \subset \mathcal{I}(0, r).$$

df. Un insieme A è **finito** in $\mathbb{R}^n$ se è costituito da un numero finito di punti.
df. Un insieme A è **infinito** in $\mathbb{R}^n$ se è costituito da un numero infinito di punti.
df. Un insieme A infinito che può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ è detto **numerabile**.

Teorema di Bolzano Weierstrass. Ogni insieme A di $\mathbb{R}^n$ che sia infinito e limitato possiede almeno un punto di accumulazione.

Per concludere, diamo alcune definizioni relative ad insiemi A in $\mathbb{R}$. Come è noto $\mathbb{R}$ è *totalmente ordinato*, è quindi possibile introdurre in concetto di *maggiorante* M di un insieme A limitato in $\mathbb{R}$.

df. M è un **maggiorante** dell'insieme A se

$$\forall x \in A\; x \leq M.$$

oss. Se un insieme A possiede un maggiorante, necessariamente ne ha infiniti.
df. Diciamo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti e lo indichiamo con

$$\sup_{x \in A} x.$$

Analogamente,

df. m è un **minorante** dell'insieme A se per ogni $x \in A \Rightarrow m \leq x$.
df. Diciamo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti e lo indichiamo con $\inf_{x \in A} x$.

Se l'estremo superiore o inferiore di A appartengono all'insieme prendono, rispettivamente, il nome di massimo e di minimo dell'insieme e vengono indicati con

$$\max_{x \in A} x \qquad \min_{x \in A} x.$$

8.2 Esercizi a risposta multipla

E. 8.1. $\min_{x \in \mathbb{R}} |x - 17| =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 17 $\boxed{\mathbf{b}}$ $\frac{17}{2}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ non esiste $\boxed{\mathbf{d}}$ 0.

Notazione Si indica con

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

l'unione tra gli n insiemi E_1, E_2, $\cdots$,E_n; essa viene definita in modo analogo a quanto fatto definendo l'unione tra 2 insiemi:

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \{x : x \in E_1 \vee x \in E_2 \vee x \in E_3 \vee \cdots \vee x \in E_n\}.$$

Tale unione può anche essere fatta tra infiniti insiemi.

E. 8.2. $B_n = [-1, 1+\cos(n\pi))$ allora $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n =$ **a** $(-1,2]$ **b** $[-1,2)$ **c** $[-1,2]$ **d** $(-1,2)$.

E. 8.3. $\mathbb{Q}$ è **a** aperto in $\mathbb{R}$ **b** limitato in $\mathbb{R}$ **c** denso in $\mathbb{R}$ **d** chiuso in $\mathbb{R}$.

E. 8.4. $\displaystyle\max_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} =$ **a** $+\infty$ **b** 0 **c** non esiste **d** 1.

E. 8.5. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}$ allora $A =$ **a** $(0,1)\times(0,1)$ **b** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ **c** è illimitato **d** $(-1,1)\times(-1,1)$

E. 8.6. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1\}$ allora $A \cap B =$ **a** $\left\{\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ **b** $\{(0,0)\}$ **c** $\emptyset$ **d** $\{(0,1),(-1,0)\}$.

E. 8.7. Dato l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} : x = k^3\}$, tale insieme è **a** denso in $\mathbb{R}$ **b** numerabile **c** limitato **d** aperto.

E. 8.8. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 3\}$ è **a** aperto **b** chiuso **c** limitato **d** denso in $\mathbb{R}^2$.

E. 8.9. $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}$ **a** A è denso in $\mathbb{R}$ **b** $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ **c** A è limitato **d** A non è numerabile.

E. 8.10. $A = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ **a** A non ha punti di accumulazione **b** $\sup A = +\infty$ **c** $\inf A = 1$ **d** $\sup A = 1$.

E. 8.11. $A \subset \mathbb{R}$ è aperto e non vuoto in $\mathbb{R}$, allora A **a** ha infiniti punti di accumulazione **b** contiene tutti i propri punti di accumulazione **c** è un intervallo **d** non contiene alcun punto di accumulazione.

E. 8.12. $E_n = \left[-\frac{3}{n}, \frac{\pi}{n}\right)$, con $n = 1,2,3,...$; risulta $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n =$ **a** $\{0\}$ **b** $\emptyset$ **c** $[-3,\pi)$ **d** $[-3,\pi]$.

E. 8.13. $E = \left\{x \in \mathbb{R} : x = n + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ è **a** denso in $\mathbb{R}$ **b** contenuto in $\mathbb{Q}$ **c** aperto in $\mathbb{R}$ **d** limitato.

E. 8.14. Sia $A = \{\{1,2\},\{2\},\{4,5\}\}$. Allora A **a** A è finito **b** $A \equiv \{1,2,4,5\}$ **c** $A \subset \mathbb{N}$ **d** $4 \in A$.

E. 8.15. Sia E il generico insieme chiuso, si indica con E' il derivato (insieme dei punti di accumulazione) e con ∂E la sua frontiera, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $E' \subset E$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $E' \neq \emptyset$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $E = E'$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $E = \partial E$.

E. 8.16. Sia $E \subset \mathbb{R}$. La scrittura $\inf E = 4$ significa $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall x \in E, 4 \leq x$ e $\forall x \in E, \exists \epsilon > 0 : 4 < x < 4 - \epsilon$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\forall x \in E, x \leq 4$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\forall x \in E, 4 \leq x$ e $\forall \epsilon > 0, \exists x \in E : 4 \leq x < 4 + \epsilon$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\forall x \in E, 4 \leq x$ e $\forall \epsilon > 0, \exists x \in E : 4 - \epsilon < x \leq 4$.

E. 8.17. L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $x^2 - x - 10 > 0$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ finito $\boxed{\mathbf{b}}$ limitato $\boxed{\mathbf{c}}$ dotato di massimo $\boxed{\mathbf{d}}$ aperto.

E. 8.18. L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $x^2 - x - 11 \geq 0$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ limitato $\boxed{\mathbf{b}}$ finito $\boxed{\mathbf{c}}$ dotato di minimo $\boxed{\mathbf{d}}$ chiuso.

E. 8.19. L'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verificanti la condizione $(y-1)^{\frac{1}{4}} + (4-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ finito $\boxed{\mathbf{b}}$ vuoto $\boxed{\mathbf{c}}$ illimitato $\boxed{\mathbf{d}}$ aperto.

E. 8.20. L'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ definito da $A = \{(x, y) : x = y\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ né chiuso né aperto $\boxed{\mathbf{b}}$ non ha punti di accumulazione $\boxed{\mathbf{c}}$ chiuso $\boxed{\mathbf{d}}$ limitato.

E. 8.21. Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : \log x \leq 5\}$. Allora E $\boxed{\mathbf{a}}$ è limitato $\boxed{\mathbf{b}}$ non è dotato di massimo $\boxed{\mathbf{c}}$ è dotato di minimo $\boxed{\mathbf{d}}$ è finito.

E. 8.22. L'insieme $A = \{x : x = 1 + 6^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$, è $\boxed{\mathbf{a}}$ finito $\boxed{\mathbf{b}}$ ha minimo $\boxed{\mathbf{c}}$ ha massimo $\boxed{\mathbf{d}}$ non è limitato inferiormente.

E. 8.23. Sia $E = \left\{n + \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, ...\right\}$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ E è aperto $\boxed{\mathbf{b}}$ $\inf E = 0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ E è costituito di punti isolati $\boxed{\mathbf{d}}$ E è finito.

E. 8.24. L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $x^2 - 2x - 7 \leq 0$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ illimitato $\boxed{\mathbf{b}}$ finito $\boxed{\mathbf{c}}$ non è dotato di minimo $\boxed{\mathbf{d}}$ chiuso.

8.3 Soluzioni

S. 8.1. $\boxed{\mathbf{d}}$

S. 8.2. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 8.3. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 8.4. $\boxed{\mathbf{d}}$

S. 8.5. $\boxed{\text{c}}$

S. 8.6. $\boxed{\text{c}}$

S. 8.7. $\boxed{\text{b}}$

S. 8.8. $\boxed{\text{a}}$

S. 8.9. $\boxed{\text{b}}$

S. 8.10. $\boxed{\text{d}}$

S. 8.11. $\boxed{\text{a}}$

S. 8.12. $\boxed{\text{c}}$

S. 8.13. $\boxed{\text{b}}$

S. 8.14. $\boxed{\text{a}}$

S. 8.15. $\boxed{\text{a}}$

S. 8.16. $\boxed{\text{c}}$

S. 8.17. $\boxed{\text{d}}$

S. 8.18. $\boxed{\text{d}}$

S. 8.19. $\boxed{\text{a}}$

S. 8.20. $\boxed{\text{c}}$

S. 8.21. $\boxed{\text{a}}$

S. 8.22. $\boxed{\text{c}}$

S. 8.23. $\boxed{\text{c}}$

S. 8.24. $\boxed{\text{d}}$

8.4 Sfida

Qualche esercizio per cui occorre l'*intuizione*.

E. 8.25. Scrivere in forma cartesiana i complessi $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ per $n = 1...9$. Se $A = \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n n \in Z\right\}$, l'insieme A è numerabile? Se $B = \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{n}},\ n \in Z\right\}$, l'insieme B è numerabile?

E. 8.26. Calcolare $\sum_{k=0}^{10} \cos k\theta$, utilizzando la formula $\sum_{k=0}^{n} q_k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ che vale anche per $q \in \mathbb{C}$ purché $|q| < 1$.

E. 8.27. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Provare che se z_0 è una radice di $P(x)$ allora anche $\overline{z_0}$ è radice. Utilizzando questo risultato provare che ogni polinomio di grado dispari con coefficienti reali ha almeno una radice reale.

E. 8.28. Risolvere l'equazione $z^3 + (2+3i)\,z^2 + (5+6i)\,z + 15i = 0$ sapendo che ha almeno una radice immaginaria pura. Disegnare quindi le soluzioni.

9

Limiti elementari

9.1 Definizione di limite

E. 9.1. Scrivere RIGOROSAMENTE la definizione TOPOLOGICA di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, ricordando il significato delle diverse espressioni che compaiono nella formula.

E. 9.2. Scrivere RIGOROSAMENTE la definizione ANALITICA di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ nei casi seguenti:

1. $x_0, l \in \mathbb{R}$
2. $x_0 \in \mathbb{R}$, $l = -\infty$
3. $x_0 = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$
4. $x_0, l = -\infty$.

E. 9.3. Utilizzare la DEFINIZIONE di limite per verificare le seguenti scritture:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(1 + x + \dfrac{1}{x}) = +\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{(1-x)^2} = -\infty$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2+1} = -\dfrac{1}{5}$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+} \log(x^2-1) = -\infty$

E. 9.4. Utilizzare la DEFINIZIONE di limite di una successione per verificare le seguenti scritture:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1} = 0^+$

2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - n^2 + n}{n^2} = +\infty$

E. 9.5. Calcolare il limite delle seguenti successioni, che non presentano indeterminazione:

1. $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}\right)$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sin n\pi$
3. $\lim_{n\to+\infty} \cos n\pi$
4. $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\arctan\left(n^2 - n\right)$
5. $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{n^2-1}\right)$

9.2 Limiti senza forme di indeterminazione

E. 9.6. Calcolare i seguenti limiti, senza forme di indecisione, che appartengono al tipo $+\infty+\infty$, $l\pm\infty$, $l_1 \pm l_2$:

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+e^{-x})}{\arctan x} + \cosh(-x)$
2. $\lim_{x\to\pi/2} x + \sin x$
3. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\arctan x} + \dfrac{1}{x}$
4. $\lim_{x\to 0^+} \log x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
5. $\lim_{x\to+\infty} x^{1/\pi} + \cos x$
6. $\lim_{x\to+\infty} \log\dfrac{1}{x} - \left(x^2 - \sqrt{x^2+x}\right)^4$

E. 9.7. Calcolare i seguenti limiti, senza forme di indecisione, che appartengono al tipo $\infty\cdot\infty$, $l\cdot\infty$:

1. $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}\tan\left(2 + x^{-1/4}\right)$
2. $\lim_{x\to 0^+} (\log x)^5\,(1+x)^{\sqrt{2}}$
3. $\lim_{x\to 0^+} x^{1-\pi}\log x$
4. $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

E. 9.8. Calcolare i seguenti limiti, senza forme di indecisione, che appartengono al tipo $l \cdot 0$, l/∞:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cos x$
2. $\lim_{x\to 0^\pm} x \sin\frac{1}{x}$
3. $\lim_{x\to-\infty} e^{\sqrt[3]{x}} \arctan\frac{x^2-x}{\cos x+2}$
4. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\sin\left(\sinh\frac{1}{x}+4\right)$
5. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\cos x}{\log x}$

E. 9.9. Calcolare i seguenti limiti, senza forme di indecisione, che appartengono al tipo $\infty/0$, $l/0$, ∞/l:

1. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-x}\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{1/x}-2}{\arctan x-\pi/2}$
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-1}{\log^2(1-x)}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(-x)^{3/5}}{\cos 1/x-1}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|\log_{1/3} x\right|}{1-(1+1/x)^\pi}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left|e^{-1/\log x}-1\right|}{\sin(1/x-\pi/2)}$
7. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{(\log|x|)^{-1}-1}{x\log(1-x)}$

E. 9.10. Calcolare i seguenti limiti, senza forme di indecisione:

1. $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\arctan x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
2. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin x}{e^{-x}+\sqrt{x+1}}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\log x-\sin(x\pi/2)}{x^2+1}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \log\sin\left(e^{-x}\right)^{1/\sqrt{3}}$

5. $\lim_{x\to 0^+} \arctan \log_\pi x$
6. $\lim_{x\to -\infty} \sin \log \cos \exp(x)$

10

Simboli di asintotico o piccolo, grafici locali e limiti notevoli

10.1 Simbolo di equivalente asintotico $\sim$

E. 10.1. Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dare la definizione della scrittura

$$f \sim g \text{ per } x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$$

(si legge f è *asintotica* a g per x tendente ad x_0, oppure f è *equivalente* a g per x tendente ad x_0).

E. 10.2. Trovare 3 funzioni equivalenti a $f = x^3 - x$ per $x \to +\infty$.

E. 10.3. Dimostrare che se $f \sim g$ per $x \to x_0$ allora $\lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} g$.

E. 10.4. Trovare due funzioni f e g tali che

$$\lim_{x\to 0} f = \lim_{x\to 0} g$$

ma che non sono equivalenti.

E. 10.5. Trovare due funzioni f e g tali che

$$\lim_{x\to +\infty} f = \lim_{x\to +\infty} g$$

ma che non sono equivalenti.

E. 10.6. Risolvere le seguenti forme di indecisione, usando le proprietà dell'asintotico:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + \sin x}}{6x + 2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{2x - 3}$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x}}{\sin x}$
4. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{\log^4 x + 3\log^2 x - 2\log x + \cos x}}{1 - 3\log^2 x}$

E. 10.7. Calcolare, sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$

$$\lim \frac{\sqrt[4]{x^4 + 6x^3 - 2x}}{x - 1}.$$

E. 10.8. Saper dimostrare le seguenti FONDAMENTALI equivalenze nell'intorno dell'origine è FONDAMENTALE per passare l'esame:

1. $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
2. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.

Quindi disegnare su uno stesso grafico le funzioni a primo membro e a secondo membro dell'equivalenza in (a) ed in (b), rispettivamente.

E. 10.9. Trovando un opportuno stratagemma per eliminare la forma di indecisione dovuta alla differenza a numeratore, risolvere il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^2 - x^3} - \cos x}{\sin x}.$$

E. 10.10. Tenendo conto della definizione del numero e, che qui ricordiamo

$$e = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

dimostrare le seguenti equivalenze

1. $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
2. $\log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$.

N.B. Saper dimostrare le equivalenze FONDAMENTALI, sopra riportate, è FONDAMENTALE per passare l'esame!

E. 10.11. Sovrapporre su uno stesso grafico le funzioni che compaiono a primo ed a secondo membro nelle equivalenze

1. $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
2. $\log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$.

rispettivamente.

E. 10.12. Usando l'equivalenza $\log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$, dimostrare la seguente FONDAMENTALE equivalenza nell'intorno dell'origine, FONDAMENTALE per passare l'esame:

$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

E. 10.13. Dimostrare, per $a, b > 0$, le seguenti (notissime) proprietà dei logaritmi:

1. $\log_e a + \log_e b = \log_e ab$
2. $\log_e a - \log_e b = \log_e \dfrac{a}{b}$
3. $\log_e a^x = x \log_e a$, con $x \in \mathbb{R}$
4. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (formula per il cambiamento di base nei logaritmi) con a e c positivi e diversi da 1.

E. 10.14. Utilizzando l'ultima proprietà dell'esercizio precedente ed avendo scelto $a > 0$ e $a \neq 1$, il saper dimostrare le seguenti FONDAMENTALI equivalenze nell'intorno dell'origine è (di nuovo!) FONDAMENTALE per passare l'esame:

1. $\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\log_e a}$ per $x \to 0$
2. $a^x - 1 \sim x \log_e a$ per $x \to 0$.

E. 10.15. Trovare gli asintoti obliqui della funzione

$$y = \frac{|x + 2| - x^3}{x + 5}.$$

10.2 Simbolo di o piccolo

E. 10.16. Dare la definizione della scrittura $f = o(g)$ per $x \to x_0$. Quali sono le ipotesi su f e g? Quali le ipotesi su x_0?

E. 10.17. Per $x \to 0$, è corretto scrivere $x^4 = o(x^3)$ oppure $x^3 = o(x^4)$?

E. 10.18. Dalle due scritture $x^2 = o(x^5)$ e $x^3 = o(x^5)$ per $x \to +\infty$, è corretto dedurre che $x^2 = x^3$ per $x \to +\infty$? Perché? La scrittura $f = o(g)$ può essere *interpretata* da destra a sinistra? Cioé attribuendo una espressione concreta f ad una quantità che sappiamo solo essere trascurabile rispetto ad un'altra g?

E. 10.19. Scrivere tutti i limiti notevoli fin qui studiati utilizzando l'espressione o piccolo.

E. 10.20. Trovare tre funzioni f, g ed h tali che per $x \to 0$

1. $\sinh x = f + o(f)$
2. $\cosh x = g + o(g)$
3. $\tanh x = h + o(h)$.

E. 10.21. Calcolare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4\sqrt{e^{2x} - e^x}}{2^{kx}}.$$

10.3 Calcolo di limiti con *o* piccolo

E. 10.22. Calcolare i limiti che seguono, utilizzando *o* piccolo.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\tan 6x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - e^{\sin 9x}}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_{e^2}(1 + \sin^3 2x)}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x \log_a x}{e^{2x} - 1}$ sia nel caso $a \neq 1$ sia nel caso $a > 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\tan x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin^2 x)^{1/\log_a(1+x^2)}$ con $a \neq 1$ e $a > 0$

E. 10.23. Calcolare i limiti che seguono, utilizzando *o* piccolo ogni volta che è necessario.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 + 3^x)^{1/x}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\log(1 + e^x)\sqrt{1 + x^3}}{(x - 1)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x \log\left(2^{-1/x} + \dfrac{1}{x \log x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - 1 - \sqrt{2x^2 + x + 1}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2 + 9^x}\left(\sqrt{1 + 9^x} - 3^x\right)\right)$

10.4 Alcuni limiti notevoli -da conoscere perfettamente-

- $x \to 0$: $\begin{cases} \sin(x) \sim x \\ \tan(x) \sim x \\ \arctan(x) \sim x \\ \arcsin(x) \sim x \\ \sinh(x) \sim x \\ \tanh(x) \sim x \\ e^x - 1 \sim x \\ \log(1+x) \sim x \\ \dfrac{(1+x)^p - 1}{p} \sim x \\ 1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2} \\ \cosh(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$
- $x \to 0^+$: $\log(x) = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $k > 0$
- $x \to +\infty$: $x^k = o(e^x)$ e $\log(x) = o(x^k)$ per $k > 0$.

10.5 Accenni alle dimostrazioni

Proposizione

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Dimostrazione

Considerando sulla circonferenza trigonometrica i punti $O = (0,0)$, $I = (1,0)$, $P = (\cos(x), \sin(x))$ e $Q = (1, \tan(x))$, le tre aree del triangolo OIP, del settore circolare corrispondente all'arco IP e del triangolo OIQ sono una contenuta nell'altra e quindi forniscono (per $x > 0$)

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2}$$

da cui si ottiene

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

A questo punto per il teorema del confronto il limite è 1. Poi si procede analoganente per $x < 0$.

Sfruttando questo limite notevole si ottengono quelli per $\tan(x)$, per $\arctan(x)$ (usare il cambio di variabile $y = \arctan(x)$) e per $\arcsin(x)$ (usare il cambio di variabile $y = \arcsin(x)$).

Proposizione

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

Dimostrazione

Usando le proprietà dei logaritmi e poi facendo il cambio di variabile $y = 1/x$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \log\left(1+x\right)^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log(e) = 1.$$

Analogamente per $x \to 0^-$.

Sfruttando questo limite notevole si ottengono quelli per $e^x - 1$ (usare il cambio di variabile $y = e^x - 1$) e per $(1+x)^p - 1$ (usare il cambio di variabile $y = e^{p\log(1+x)}$).

Proposizione

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Dimostrazione

Per le proprietà delle funzioni trigonometriche

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2).$$

Si usa quindi il limite per $\sin(x)$.

Proposizione

$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$

Dimostrazione

$\dfrac{\sinh(x)}{x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = e^{-x}\dfrac{e^{2x}-1}{2x} \to 1.$

Sfruttando questo limite si ottiene quello per $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Proposizione

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh(x)-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Dimostrazione

Risulta

$$\frac{\cosh(x)-1}{x^2} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = e^{-x}\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2x^2} = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 \to \frac{1}{2}.$$

Proposizione

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\log(x) = 0$

Dimostrazione

Con il cambio di variabile $y = 1/x$ e poi usando le proprietà dei logaritmi si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1/y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log(y)}{y} = 0$$

(perché $\log(y) = o(y)$ per $y \to +\infty$).

10.6 Esercizi risolti

Esercizio

Calcolare i limiti seguenti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-\cos x} - x^2}{\sqrt{1-\cos x} + x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+2\sin\frac{1}{x}\right)^x$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x^2-4}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(x-\log(1+x^2+e^x)\big)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Soluzioni

(a) Per $x\to 0^-$; osserviamo che

$$\begin{aligned}1-\cos x &\sim \frac{x^2}{2} \qquad \text{quindi}\\ \sqrt{1-\cos x} &\sim \sqrt{\frac{x^2}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{2}} \qquad \text{allora}\\ \sqrt{1-\cos x} &= -\frac{x}{\sqrt{2}}+o(x).\end{aligned}$$

Essendo $x^2=o(x)$, possiamo dedurre

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}-x^2}{\sqrt{1-\cos x}+x^2}=\frac{-x/\sqrt{2}+o(x)}{-x/\sqrt{2}+o(x)}=1.$$

(b) Sia $x\to+\infty$.

$$\begin{aligned}\left[\left(1+2\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2\sin 1/x}}\right]^{2x\sin 1/x} &= \left[(1+2\sin t)^{\frac{1}{2\sin t}}\right]^{2\sin t/t} \quad \text{con } t=1/x\to 0^+\\ &\sim \left[(1+2t)^{\frac{1}{2t}}\right]^2 \quad \text{ancora con } z=1/2t\to+\infty\\ &\sim \left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^2 \longrightarrow e^2\end{aligned}$$

(c) Per $x\to 2$;

$$\begin{aligned}\frac{e^x-e^2}{x^2-4} &= \frac{e^2(e^{x-2}-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{e^2(x-2+o(x-2))}{(x-2)(x+2)}\\ &\sim \frac{e^2}{4}\,\frac{(x-2+o(x-2))}{(x-2)} = \frac{e^2}{4}\end{aligned}$$

(d) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x &= \left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x \\ &\sim \left(1+\frac{2}{x}\right)^x \longrightarrow e^2\end{aligned}$$

(e) Per $x \to +\infty$ si ha

$$x - \log(1+x^2+e^x) = \log\frac{e^x}{1+x^2+e^x} \longrightarrow 0$$

(f) Per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x} &= \frac{1+x^2+o(x^2)-1+x^2/2-o(x^2)}{\sin^2 x} \\ &\sim \frac{3/2x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(g) Per $x \to 0$ possiamo scrivere

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{2\sqrt{1+x/4}-2}{x} = \frac{2(1+x/8+o(x))-2}{x} = \frac{1}{4}$$

11

Successioni

11.1 Esercizi a risposta multipla

E. 11.1. $a_n = \cos(\pi n) + \sin(\frac{\pi}{2}n)$, $n \in \mathbb{N}$ allora necessariamente $\limsup_{n \longrightarrow +\infty} a_n =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 1 $\boxed{\mathbf{c}}$ 2 $\boxed{\mathbf{d}}$ non esiste

E. 11.2. L'insieme dei valori limite della successione $\left\{(-1)^n n^{\frac{1}{6}} \sin \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ $\mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\{-1, +1\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\{0\}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $[-1, +1]$

E. 11.3. L'insieme dei valori limite della successione $\left\{(-1)^n \cos \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ $\mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\{-1, +1\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\{0\}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $[-1, +1]$

E. 11.4. Quale tra le seguenti affermazioni è vera: $\boxed{\mathbf{a}}$ ogni successione limitata converge $\boxed{\mathbf{b}}$ ogni successione limitata è monotona $\boxed{\mathbf{c}}$ ogni successione monotona converge $\boxed{\mathbf{d}}$ ogni successione convergente è limitata
GIUSTIFICARE LA RISPOSTA FORNENDO UN CONTROESEMPIO PER OGNI RISPOSTA ERRATA.

E. 11.5. $\lim a_n = -5$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $a_n < 0$, $\forall n$ $\boxed{\mathbf{b}}$ a_n è monotona $\boxed{\mathbf{c}}$ $|a_{n+1} - a_n| < 1$ per n abbastanza grande $\boxed{\mathbf{d}}$ $\inf a_n = -5$

E. 11.6. $\lim a_n = \sqrt{3}$, ed inoltre $\{a_n\}$ è monotona crescente, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $\inf a_n = \sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\inf a_n = 0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sup a_n = \sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\inf a_n = -\infty$

E. 11.7. Sia $\lim a_n = a$, con $0 < a < +\infty$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ se $a < 1$ allora $a_n < 1$, $\forall n$ $\boxed{\mathbf{b}}$ se $n > 10$ allora $|a_{n+3}| < a$ $\boxed{\mathbf{c}}$ se n è grande $|a_{n+1} + a_{n+2}| < \frac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\lim_k a_{2k} = \lim_k a_{2k+1}$ con $k \in \mathbb{N}$

E. 11.8. $\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\right\}$, $\boxed{\mathbf{a}}$ è indeterminata $\boxed{\mathbf{b}}$ converge a zero $\boxed{\mathbf{c}}$ diverge $\boxed{\mathbf{d}}$ converge ad 1

E. 11.9. Sia $\{a_n\}$ monotona limitata, allora necessariamente $\boxed{\mathbf{a}}$ $\lim a_n = \sup a_n$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\{a_n\}$ è convergente $\boxed{\mathbf{c}}$ $\lim a_n = \inf a_n$ $\boxed{\mathbf{d}}$ nessuna delle precedenti affermazioni è vera

E. 11.10. Sia $X = \{a_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}, n \in N\}$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ X è chiuso $\boxed{\mathbf{b}}$ l'insieme ω-limite è aperto $\boxed{\mathbf{c}}$ $\inf X = -\sin 1$ $\boxed{\mathbf{d}}$ a_n ha segno costante

E. 11.11. Sia $X = \{a_n = \sin \frac{n\pi}{n+1} \in \mathbb{R}, n \in N\}$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ X è aperto $\boxed{\mathbf{b}}$ X è chiuso $\boxed{\mathbf{c}}$ X è discreto $\boxed{\mathbf{d}}$ X non ha punti di accumulazione

11.2 Soluzioni

S. 11.1. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 11.2. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 11.3. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 11.4. $\boxed{\mathbf{d}}$

S. 11.5. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 11.6. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 11.7. $\boxed{\mathbf{d}}$

S. 11.8. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 11.9. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 11.10. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 11.11. $\boxed{\mathbf{c}}$

11.3 Esercizi proposti

Esercizio 0

Trovare sup, inf, max, min ed eventuali punti di accumulazione degli insiemi

1. $A = \{3 \sin n\pi/2 + 1/n\}$

2. $B = \{3 - 3^{-n}\}$
3. $C = \left\{(-1)^{n+1}(1 - 1/n)\right\}$
4. $D = \{\sqrt{n}/(2n + 9) - 1\}$
5. $E = \left\{(\log^2 n - \log n)^{-1}, n \in \mathbb{N}, n > 3\right\}$
6. $F = \left\{3^{(-1)^n n}\right\}$
7. $G = \left\{\dfrac{1-n}{n+1} 2^{\cos n\pi}\right\}$

Esercizio 1

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

1. $\left\{a_n = \dfrac{n! e^{3n}}{(2n)!}, n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $\left\{a_n = (-1)^n \left(\dfrac{-e^{2n} + n^2}{\sqrt{n! + \log n}}\right)^{-1}, n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $\left\{a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{2n^2 - n}, n \in \mathbb{N}\right\}$
4. $\left\{a_n = \dfrac{(3n)!}{(3 + \sin n)n!}, n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $\left\{a_n = \sqrt[4]{n^4 - n} - \sqrt{n^2 + n}, n \in \mathbb{N}\right\}$
6. $\left\{a_n = \sqrt[4]{n^8 + n^5} - \sqrt[3]{n^6 + n^4}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Esercizio 2

Determinare l'insieme ω-limite della successione

$$\left\{\arctan\left(n^2 \sin n\frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Esercizio 3

Trovare l'insieme ω-limite ed il massimo e minimo limite della successione

$$\left\{a_n = \left(5n \sin\frac{1}{n} + \frac{2^n}{n!}\right) \cos\frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

Esercizio 4

Determinare il limite della successione

$$\left\{ \left(n\pi + \frac{1}{n} \right)^3 \sin^2 \left(n\pi + \frac{1}{n} \right) \log \frac{\pi + n}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Esercizio 5

Determinare il carattere della successione $\left\{ \dfrac{\log \left| \left(e^{-\frac{1}{\log n}} - 1 \right)^2 - 1 \right|}{\sin \left(\frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} \right)} \right\}.$

Esercizio 6

Studiare $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1/\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Esercizio 7

Studiare $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(\cosh \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$.

Esercizio 8

Studiare al variare del parametro $\alpha > 0$ il carattere della successione

$$\left\{ a_n = \frac{n + \alpha^n}{2n^2 + 3^n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 9

Discutere il limite della successione

$$\left\{ a_n = \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^\alpha}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10

Discutere il limite della successione

$$\left\{ a_n = \sin \frac{3 + \pi n}{2 - 2n} + \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{1/\log n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.4 Alcune soluzioni

Esercizio 2

$\omega = \left\{ -\frac{\pi}{2}, 0, +\frac{\pi}{2} \right\}$

Esercizio 4

Per $n \to +\infty$ si ha:

- $\sin^2 \left(n\pi + \dfrac{1}{n} \right) = \left((-1)^n \sin \dfrac{1}{n} \right)^2 = \sin^2 \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$
- $n\pi + \dfrac{1}{n} \sim n\pi$
- $\log \dfrac{\pi + n}{n} = \log \left(1 + \dfrac{\pi}{n} \right) \sim \dfrac{\pi}{n}$

Sappiamo che se $f_1 \sim f_2$, $g_1 \sim g_2$ e $h_1 \sim h_2$ per $n \to \infty$ si può dedurre $f_1 g_1 h_1 \sim f_2 g_2 h_2$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n\pi + \frac{1}{n} \right)^3 \sin^2 \left(n\pi + \frac{1}{n} \right) \log \frac{\pi + n}{n} = \pi^4.$$

Esercizio 9

Per $n \to +\infty$ si ha:

- $\lim \cos \dfrac{\pi}{n} = 1$
- $\lim n^\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$

Se $\alpha \leq 0$ non c'è forma di indeterminazione, ed abbiamo $\lim a_n = 1$.

Se $\alpha > 0$, la forma di indecisione 1^∞ si risolve nel modo seguente:

$$\lim a_n = \lim e^{n^\alpha \log \cos \frac{\pi}{n}}.$$

Studiando l'esponente per $n \to +\infty$ ed utilizzando i limiti notevoli del logaritmo e del coseno

$$\log\left(1 + \cos\frac{\pi}{n} - 1\right) \sim \left(\cos\frac{\pi}{n} - 1\right) \sim \left(-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}\right)$$

quindi

$$n^\alpha \log\left(1 + \cos\frac{\pi}{n} - 1\right) \sim n^\alpha \left(-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{2} & \alpha = 2 \\ -\infty & \alpha > 2 \\ 0 & 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto

$$\lim \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^\alpha} = \begin{cases} e^{-\frac{\pi^2}{2}} & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha > 2 \\ 1 & \alpha < 2. \end{cases}$$

12

Continuità e derivate

12.1 Continuità

Definizione 12.1. *Una funzione f è* **continua in** x_0 *se*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Definizione 12.2. *Una funzione f è* **continua in un intervallo** *se è continua in tutti i punti appartenenti all'intervallo.*

Nota 12.1. Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti appartenenti al loro dominio.

Classificazione delle discontinuità di una funzione

Consideriamo una funzione discontinua in x_0. Si distinguono tre tipi di discontinuità:

Discontinuità di prima specie

Anche detta *discontinuità di salto*, se i limiti destro e sinistro in x_0 esistono finiti ma sono diversi

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2.$$

La funzione f in x_0 può assumere qualunque valore finito (taluni, impropriamente, parlano di punto di discontinuit‡ anche se non fosse definita in quel punto).

Discontinuità di seconda specie

Se anche solo uno dei due limiti destro o sinistro in x_0 esiste infinito. La funzione f in x_0 può assumere qualunque valore finito (taluni, impropriamente, parlano di punto di discontinuit‡ anche se non fosse definita in quel punto). .

Discontinuità di terza specie

Anche detta *discontinuità eliminabile*. Se i due limiti destro o sinistro in x_0 esistono finiti e sono uguali. La funzione f in x_0 può assumere qualunque valore finito:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

È allora possibile definire una funzione continua $\tilde{f}(x)$ che coincide con f nell'intorno di x_0.

12.2 Esercizi proposti

E. 12.1. Una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ può essere illimitata? Una funzione continua su $\mathbb{R}$ può essere illimitata? Fornire degli esempi.

E. 12.2. Verificare la continuità della funzione $y = x^{-4}$ nel punto $x_0 = 4$ tramite la definizione.

E. 12.3. La somma di due funzioni continue su $[a, b]$ è continua? La somma di due funzioni discontinue su $[a, b]$ è discontinua?

E. 12.4. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 6x}{x} & x < 0 \\ \alpha \cos x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$

E. 12.5. Studiare la continuità su $\mathbb{R}$ della funzione $y = \sqrt{|x|}$.

E. 12.6. Studiare la continuità nell'origine della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\frac{1}{x})}{\arctan x} & x > 0 \\[2ex] \dfrac{\cos x - 1}{x} & x < 0. \end{cases}$$

12.3 Derivate con la definizione

E. 12.7. Calcolare con la definizione la derivata di $y = |x|$.

E. 12.8. Calcolare con la definizione la derivata di $y = \cos x$.

E. 12.9. Calcolare con la definizione la derivata di $y = \exp(1/x)$.

E. 12.10. Calcolare con la definizione la derivata di $y = \exp(1 + 2x)$. Calcolare con la definizione la derivata di $y = \exp(1 + 2x)$ nel punto $x_0 = 1$.

E. 12.11. Studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione $f(x) = (1 - \cos|x|)^\alpha$ al variare del parametro $\alpha > 0$. Disegnare nei vari casi il grafico della funzione nell'intorno dell'origine.

E. 12.12. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{\sin x} & x > 0 \\ \\ \beta x & x \leq 0. \end{cases}$$

1. Determinare i valori di α e β appartenenti ad $\mathbb{R}$ in modo che f sia continua.
2. Determinare i valori di α e β appartenenti ad $\mathbb{R}$ in modo che f sia derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$.

E. 12.13. La funzione $y = |x|$ è continua ma non derivabile laddove la variabile contenuta nel modulo si annulla. Partendo da questa osservazione, studiare con la definizione la derivabilità nei punti $x_1 = -2$ e $x_2 = 0$ per la funzione

$$f(x) = (\arctan|x + 2|)^{|x|}.$$

Disegnare quindi i grafici locali di f nell'intorno di x_1 e di x_2.

12.4 Derivazione

Derivate delle funzioni elementari

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

E. 12.14. Utilizzare la formula di cambiamento di base del logaritmo per calcolare la derivata della funzione $y = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$.

E. 12.15. Calcolare la derivata della funzione $y = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Derivata di funzioni composte $\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)}}$

E. 12.16. Sia data la funzione

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \ \mapsto \ \tan x.$$

La f è invertibile? Sia dunque

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x \ \mapsto \ \arctan x$$

la funzione inversa. Sfruttando la relazione $\tan(\arctan x) = x$, trovare la derivata di f^{-1}.

E. 12.17. Trovare un intervallo $[a, b]$ su cui la funzione $y = \sin x$ sia invertibile. Trovare quindi la derivata della funzione inversa sfruttando la regola di derivazione delle funzioni composte.

E. 12.18. Trovare un intervallo $[a, b]$ su cui la funzione $y = \cos x$ sia invertibile. Trovare quindi la derivata della funzione inversa.

E. 12.19. Nei punti in cui è definita, calcolare la derivata di f con le regole di derivazione.

1. $f(x) = \sin \log x$
2. $f(x) = \log(1 + \sqrt{1 - x^2})$
3. $f(x) = \sqrt[3]{\tan \sin x^3}$
4. $f(x) = \cos \tan 6^x$
5. $f(x) = \arctan x^2$
6. $f(x) = \log_{1/2} |x|$

Derivata di prodotti $\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}}$

E. 12.20. Nei punti in cui è definita, calcolare la derivata di f con le regole di derivazione.

1. $f(x) = x^3 \log_2 x$
2. $f(x) = \arcsin x \log 4x$
3. $f(x) = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x} \arccos x}$
4. $f(x) = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \arccos x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(\log \cos x)^7 \tan^3 x}}$ da derivare come prodotto di $g(x)^\alpha h(x)^\beta$.

Derivata di quozienti $\boxed{\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$

E. 12.21. Nei punti in cui è definita, calcolare la derivata di f con le regole di derivazione.

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(\log\cos x)^7 \tan^3 x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{\log(1+x^2)}$
3. $f(x) = \dfrac{e^{\tan x}}{\sin x - \cos x}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-2x^3} + \sqrt{x^2-3}}{\sqrt{1+x^2} - 2x + 3}$
5. $f(x) = \dfrac{\log\sqrt{1-x^2} + \log(1-\sqrt{x})}{\arctan x}$.

Derivata di funzioni tipo $\boxed{f(x)^{g(x)}}$

Si osservi che vale l'identità

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)})}$$

quindi per le proprietà dei logaritmi

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}.$$

Ne segue che possiamo calcolare la derivata di $f(x)^{g(x)}$ derivando l'espressione cui è equivalente (senza necessità di imparare a memoria la formula) come derivata di funzione composta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x)^{g(x)} = \frac{d}{dx}e^{g(x)\log f(x)} &= e^{g(x)\log f(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\\ &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).\end{aligned}$$

E. 12.22. Nei punti in cui è definita, calcolare la derivata di f con le regole di derivazione.

1. $f(x) = (\log x)^{\arctan x}$
2. $f(x) = x^{\sqrt{x^2-2}}$
3. $f(x) = \sqrt{(\log x)^{\tan x}}$
4. $f(x) = \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{(\log x)^{\log x}}$
5. $f(x) = \dfrac{(\log(1+x))^{\sqrt{1-x^2}}}{(\arctan x)^{x^2+x+x^{-1}}}$.

12.5 Esercizi proposti

E. 12.23. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{x^2} & x > 0 \\ & \\ x^{4/3} & x \leq 0. \end{cases}$$

1. Verificare che f è continua nell'origine.
2. Studiare la derivata destra e sinistra nell'origine. La funzione f è derivabile in 0?

E. 12.24. Verificare l'invertibilità della funzione $f(x) = x^2 + 2\tan x + 1$ nell'intorno di $x_0 = 0$. Calcolare la derivata dell'inversa di f nell'intorno del punto $f(0)$.

E. 12.25. Dopo aver verificato l'invertibilità disegnare il grafico dell'inversa di $g(x) = \sqrt{x} + \log x + 1$ nell'intorno del punto $g(1)$.

E. 12.26. Data $f(x) = \arctan(2x) + \cos x$, studiare l'invertibiltà locale di f nell'intono dell'origine.

E. 12.27. Trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \log_3 x$ nel punto $x = 1$.

E. 12.28. Trovare i punti a tangente orizzontale della funzione $y = x - x^5$. Verificare se coincidono coi massimi locali della funzione.

E. 12.29. Trovare i punti a tangente orizzontale della funzione $y = x^3 - x^5$. Verificare se coincidono coi massimi locali della funzione.

13

Studi di funzione

Negli esercizi che seguono, si chiede di determinare il domino della funzione, il comportamento asintotico nell'intorno dell'infinito e degli zeri, eventuali asintoti, la presenza di punti di massimo e minimo relativi ed assoluti e di eventuali cambi di concavità.

N.B. Non c'è Tema d'Esame senza studio di funzione!

N.B. Nessun ingegnere disegna un grafico senza indicare la scala sugli assi.

N.P.B.[1] Se controllate il grafico prima di aver risolto trovato la soluzione, l'esercizio non serve a nulla.

13.1 Esercizi risolti

E. 13.1. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

Quindi, sovrapporre il grafico della parabola $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

E. 13.2. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x}.$$

Precisare il suo domino. Studiare inoltre il limite della derivata prima nell'intorno destro dell'origine. La funzione ammette asintoti?

E. 13.3. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}.$$

Determinare il suo domino. Esistono asintoti?

[1] Nota Proprio Bene

E. 13.4. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

seguendo la traccia. La funzione ammette simmetrie particolari? Quale è il suo dominio? Esistono asintoti?

E. 13.5. Tracciare il grafico della funzione

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1-|x|}.$$

Esistono asintoti? Esistono massimi e minimi?

E. 13.6. Determinare il grafico della funzione

$$y = \frac{1+|\log x|}{1+|x|}.$$

Quale è il dominio? Esistono punti angolosi? Esistono asintoti?

E. 13.7. Determinare il grafico della funzione

$$y = \frac{1+|\log x|}{x}.$$

Trovare le differenze salienti rispetto al grafico della funzione proposta nell'esercizio precedente.

E. 13.8. Determinare il grafico della funzione

$$y = \sin x\,(1 - 2\sin x)\,.$$

La funzione ammette simmetrie particolari? Ammette periodicità? Quale è il suo dominio? Esistono asintoti? Esistono massimo e minimi? Assoluti, relativi?

E. 13.9. Studiare il grafico della funzione

$$y = \frac{x}{x^2 - x + 2}.$$

Quale è il dominio della funzione? Esistono asintoti? Esistono massimi e minimi assoluti?

E. 13.10. Studiare il grafico della funzione $y = \tanh x$. In analogia con le funzioni trigonometriche, la Tangente Iperbolica è definita $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$; utilizzando a questo punto la definizione di seno e coseno iperbolici, si trova

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

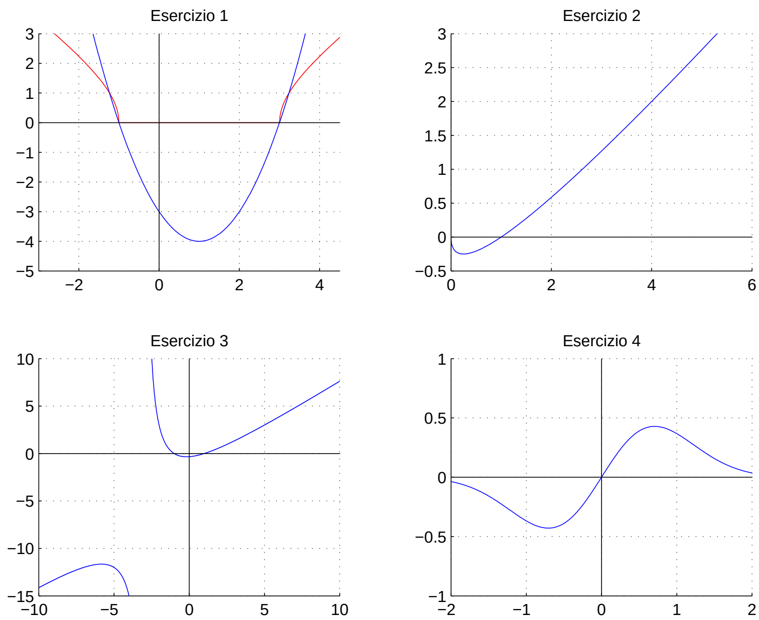

Figura 13.1. Grafici delle funzioni proposte nei primi quattro esercizi

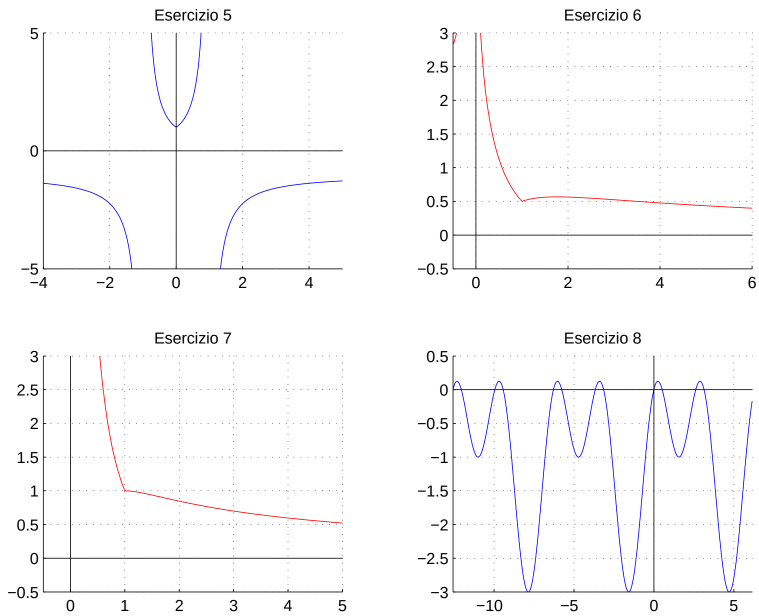

Figura 13.2. Grafici delle funzioni proposte negli esercizi 5-8

E. 13.11. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \log x^2 - 2\log x + 2.$$

E. 13.12. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x+6}{\log(x^2 - 2x + 3)}.$$

Quale è il dominio della funzione? Esistono asintoti? Esistono massimi e minimi? Quali sono gli estremi, superiore ed inferiore, della funzione?

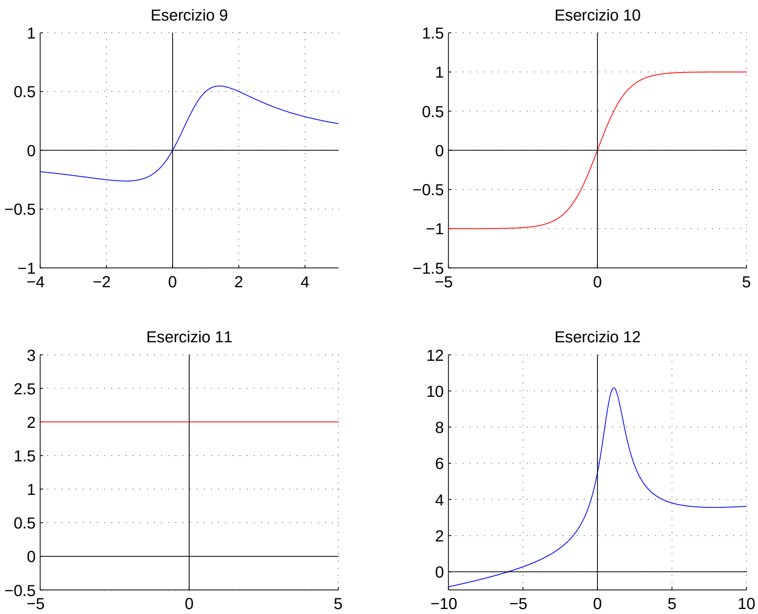

Figura 13.3. Grafici delle funzioni proposte negli esercizi 9-12

E. 13.13. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = (x+6)\log(x^2 - 2x + 3).$$

E. 13.14. Determinare il grafico della funzione

$$y = \log\left|1 - \frac{1}{\log|x|}\right|.$$

Per determinare l'andamento qualitativo del grafico si può procedere come segue. Disegnare il grafico della funzione $y = \log|x|$, e da questo, ricavare quello della funzione

$y = \dfrac{1}{\log|x|}$ e $y = -\dfrac{1}{\log|x|}$. Quindi, con una traslazione, ricavare il grafico di $y = 1 - \dfrac{1}{\log|x|}$ e, di seguito quello di $y = \left|1 - \dfrac{1}{\log|x|}\right|$, infine applicando la funzione logaritmo, ricaviamo il grafico della funzione cercata. Quale è il dominio della funzione? Esistono asintoti? Esistono massimi e minimi relativi?

E. 13.15. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}.$$

E. 13.16. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x+1)^2}.$$

Esistono asintoti? Quali sono gli estremi della funzione?

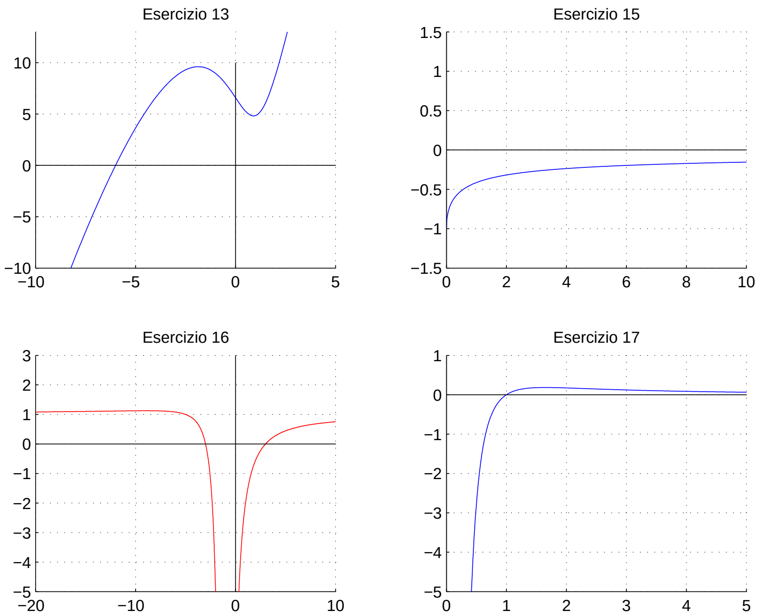

Figura 13.4. Grafici degli esercizi 13, 15-17

E. 13.17. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}.$$

Quale è il dominio della funzione? Trovare il massimo assoluto, precisando se esistono asintoti orizzontali.

E. 13.18. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 - x\sqrt{x^2})x \log |x|.$$

L'esercizio non è risolto: è più facile di quello che sembra! MAI partire decisi con i conti.

E. 13.19. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x+1)^2}.$$

Quale è il dominio della funzione? Quale il sottoindieme del dominio che ha immagine negativa? Esistono asintoti?

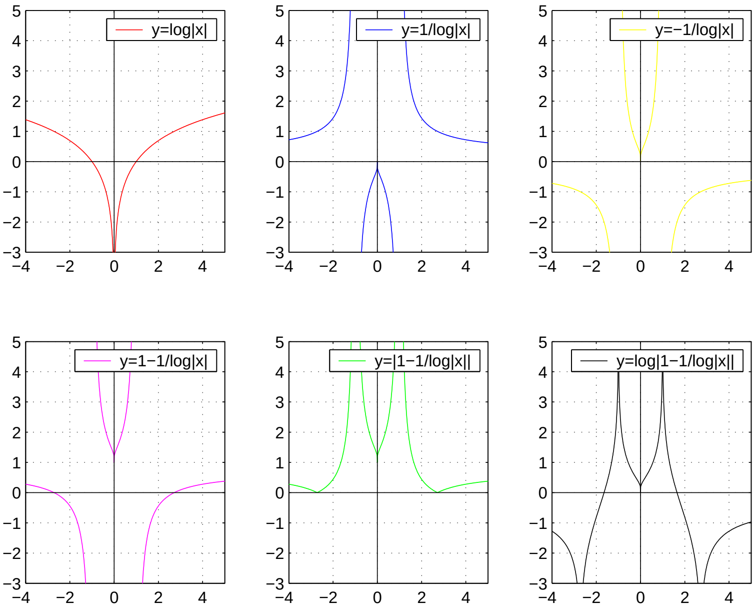

Figura 13.5. Risoluzione, per passi qualitativi, dell'Esercizio 14

E. 13.20. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

precisando nel dettaglio il comportamento nell'intorno dell'origine. Trovare i limiti della derivata per $x \to 0^{\pm}$.

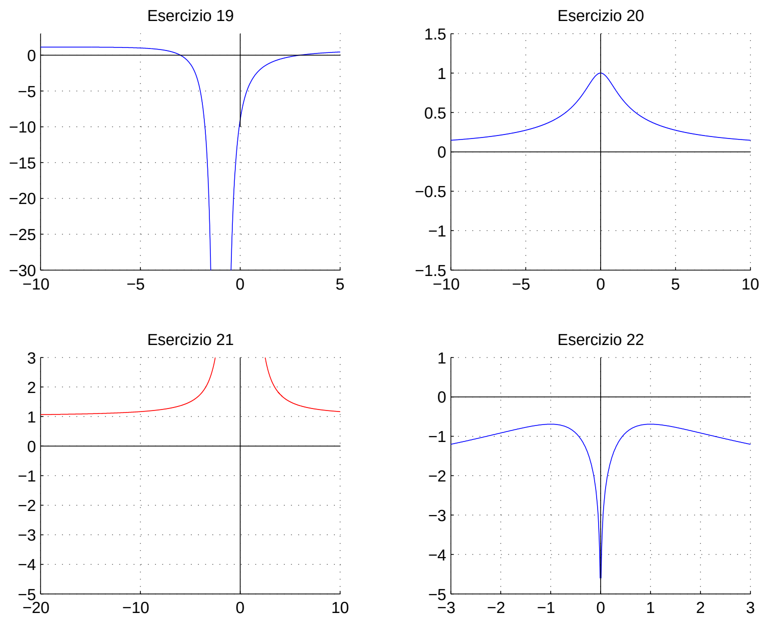

Figura 13.6. Grafici degli esercizi 19-22

E. 13.21. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - |x|}.$$

E. 13.22. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \log \frac{|x|}{x^2 + 1}.$$

Esistono simmetrie? Quale è il dominio della funzione? Quale è il sottoinsieme del dominio che ha immagine positiva?

E. 13.23. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{3}\,\frac{\cos x}{\sin x} + 4 \log \sin x.$$

Esistono simmetrie o periodicità? Dopo avere trovato il dominio della funzione, studiare il limite per $x \to 0^+$ della funzione. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

E. 13.24. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan x}{\sin x}$$

presenta particolari simmetrie o periodicità? Studiarne il grafico nell'intervallo $[-2\pi 2\pi]$, tralasciando lo studio della derivata seconda.

E. 13.25. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = -2x - 3\sqrt[3]{(e^x - 2)^2}$$

senza studiare il segno della derivata seconda e prevedendo il numero minimo di flessi. Studiare, in particolare, l'andamento asintotico della funzione nell'intorno dei punti angolosi.

E. 13.26. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \log \left| \frac{2x+1}{x+1} \right|$$

prestando attenzione al calcolo del limite per $x \to 0$. Lo studio può essere condotto in modo qualitativo cercando prima il grafico della funzione $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$, quindi quello della funzione $y = \left| \dfrac{2x+1}{x+1} \right|$, poi $y = \log \left| \dfrac{2x+1}{x+1} \right|$ ed infine quello della funzione richiesta, come fatto nella Figura 13.7. Quale è il massimo della funzione?

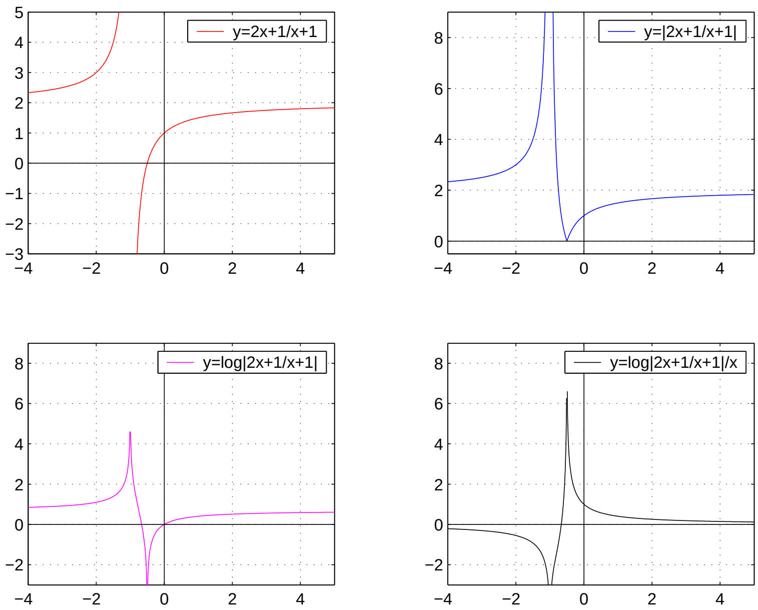

Figura 13.7. Studio qualitativo della funzione proposta nell'Esercizio 26

E. 13.27. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

senza studiare il segno della derivata seconda e prevedendo il numero minimo di flessi.

E. 13.28. Dopo aver studiato il grafico della funzione $y = x \log \left| \frac{x-3}{x} \right|$, disegnare quello della funzione

$$f(x) = \left| \frac{x-3}{x} \right|^x .$$

Studiare in particolare il limite per $x \to 0$ e per $x \to 3$.

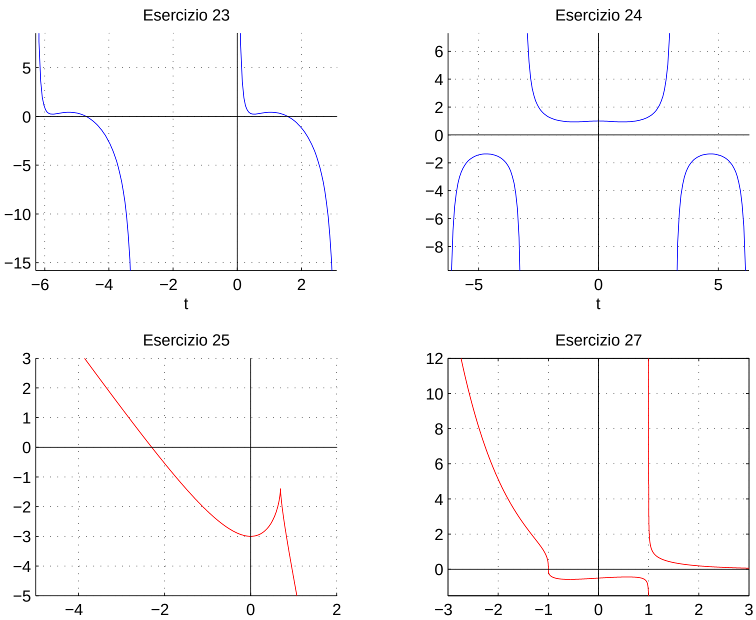

Figura 13.8. Grafici delle soluzione degli esercizi 23-25, 27

13.2 Esercizi proposti

E. 13.29. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x+1)^2}.$$

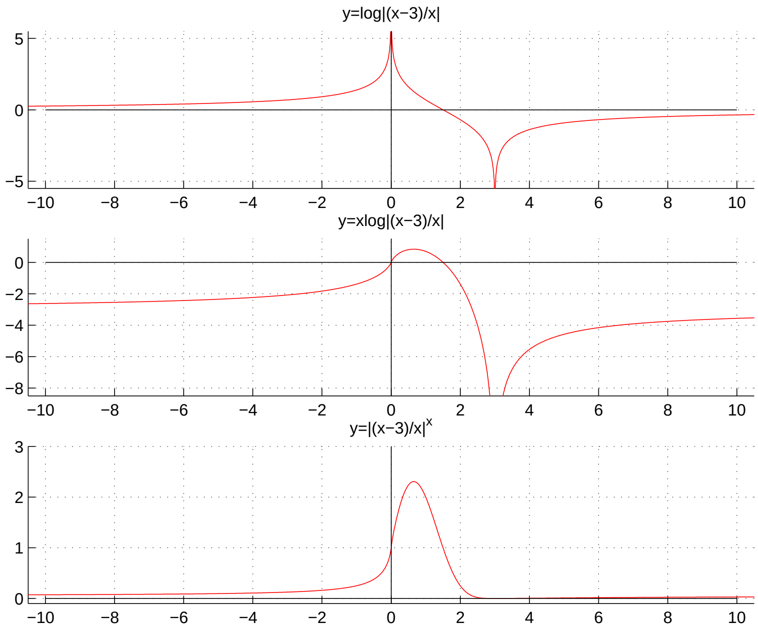

Figura 13.9. Soluzione dell'Esercizio 28

E. 13.30. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = x - 2\arctan x.$$

E. 13.31. Tracciare il grafico della funzione

$$y = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-|x|}}.$$

E. 13.32. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - |2x-1|}.$$

E. 13.33. Determinare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\left(e^{-x/3-1}\right)$$

senza studiare il segno della derivata seconda e prevedendo il numero minimo di flessi.

Parte II

14

Polinomio di Taylor

Sia $x_0 \in (a, b)$, allora

$$f \in C^n(a,b) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

$$f \in C^{n+1}(a,b) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

essendo ξ appartenente al segmento di estremi x_0 e x.

14.1 Polinomi di Taylor delle funzioni elementari nell'intorno dell'origine

$$y = e^x \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$y = \sin x \qquad T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad \sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y = \sinh x \qquad T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad \sinh x \sim x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y = \cos x \qquad T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$y = \cosh x \qquad T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad \cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$y = \arctan x \qquad T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad \arctan x \sim = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y = \tanh x \qquad T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad \tanh x \sim x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y = \log(1+x) \qquad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\text{quindi per } x \to 0 \quad \log(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$y = (1+x)^\alpha \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

14.2 Esercizi proposti

E. 14.1. Trovare il polinomio di Taylor arrestato al V ordine per la funzione $y = \sinh^2 x$ centrato nell'origine e centrato nel punto $x_0 = 1$.

E. 14.2. Trovare lo sviluppo di Taylor arrestato al IV ordine e centrato nell'origine per la funzione $y = \sqrt[3]{(1+6x^2)}$, prima calcolando le derivate, quindi utilizzando opportunamente la formula

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

che vale per $x \to 0$.

E. 14.3. Scrivere il polinomio di Mac-Laurin associato a $y = e^{\tan x}$ arrestato al VII ordine. In quale intervallo è valida l'approssimazione?

E. 14.4. Studiare i seguenti limiti utilizzando opportunamente gli sviluppi di Mac-Laurin.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3) - x^3}{\sin x^3 - x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\log(1-x)+x)}{e^{x^2} - 1 - x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\sinh x - x(6+x^2)}{x^5}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 4x - x^2 + 2\sin x - 2}{x^4}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^2 \sin x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2/3} - 1}{\sqrt[3]{1+2x} - 1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x} + \log(1-x) - 2}{\cos x - \cosh x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin^3 2x}$

E. 14.5. Data la funzione

$$f(x) = (x-1)^{11/3} + \log x$$

quale è il massimo grado del polinomio di Taylor che è possibile associarle nell'intorno del punto $x_0 = 1$?

E. 14.6. Calcolare $\sqrt[5]{e}$ con un errore minore di 10^{-5}, sfruttando lo sviluppo di Mac-Laurin di $y = e^x$.

E. 14.7. Determinare un valore approssimato di $\sqrt[3]{62}$ utilizzando un opportuno polinomio di Taylor di primo grado. È possibile dare una maggiorazione dell'errore commesso? Si tratta di un errore per difetto o per eccesso?

E. 14.8. Scrivere la formula di Taylor arrestata al secondo ordine e centrata nel punto $x_0 = 10$ per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Quanto è accurata l'approssimazione ottenuta, per $x \in [7, 11]$?

E. 14.9. Risolvere

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\exp x - 1) - \log(1 + x) - x^2}{x^3}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x + \cos x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \left(x^2 - \dfrac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}} \right)$
4. $\lim_{x\to +\infty} (\cos\tanh x - \cos 1) \exp 2x$
5. $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\log x}} - e^{\frac{1}{x-1}}$.

E. 14.10. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = (1 + x^2) \exp(-x).$$

Trovare poi le equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso e fornire lo sviluppo di Taylor fino al quarto ordine, nell'intorno del punto $x = 1$.

E. 14.11. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Provare che è prolungabile per continuità su tutta le retta reale, e che il prolungamento ammette con la funzione $g(x) = 0$ un contatto di ordine infinito.

E. 14.12. Ordinare per ordine di infinitesimo crescente, per $x \to 0$, le seguenti funzioni:

1. $y = (\cosh x - 1)(1 - \cos x)$
2. $y = x^3 \log x$
3. $y = \sqrt{|\sinh x - x^2|}$
4. $y = \log(-x + \exp x)$
5. $y = \exp\left[-\left|\dfrac{1}{\log(1 + x)}\right|\right]$

e di ciascuna tracciare il grafico nell'intorno dell'origine.

E. 14.13. Trovare lo sviluppo nell'intorno dell'origine di $y = \exp\sin x$ arrestato al quarto ordine.

E. 14.14. Trovare lo sviluppo di Mac Laurin di $y = \sin\sinh x$ arrestato al quinto ordine.

E. 14.15. Trovare lo sviluppo di Mac Laurin di $y = \tanh \sin x$ arrestato al sesto ordine.

E. 14.16. Trovare un valore approssimato del numero e con un errore inferiore a 10^{-4}. È possibile dire se l'errore commesso è per difetto o per eccesso?

E. 14.17. Provare che

$$\sqrt{1+x^3} + (1+x^3)^{-\frac{1}{3}} - 2\exp x^4 + \sin x - x \ \sim -2x^4.$$

E. 14.18. Trovare un'approssimazione per difetto, con errore inferiore a 10^{-3} del valore π.

E. 14.19. Sia $x \in \mathbb{R}$, provare che un polinomio $P(x)$ ha in x_0 una radice di molteplicità superiore a 1 se e solo se $P'(x_0) = 0$. Provare poi che $P(x)$ ha in x_0 una radice di molteplicità pari a m se e solo se $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = ... = P^{(m-1)}(x_0) = 0$ e $P^{(m)}(x_0) \neq 0$.

E. 14.20. Trovare il più alto valore di n tale che $f(x) = (\sin x - \sinh x)^{\frac{11}{5}} \in C^n(\mathbb{R})$.

14.3 Esercizi risolti

E. 14.21. Calcolare, al variare di β in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\beta \left[\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \tanh\left(\exp\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\right].$$

E. 14.22. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ e tale che $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$ per $x \longrightarrow 0$, calcolare

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\exp f(x) - (\sin x + \cos x)}{(\sin x + f(x))^2}$$

E. 14.23. Studiare al variare dei parametri in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log^2(1+x) - \log(1+x^2) + \alpha x^3}{|x|^\beta}$$

14.4 Soluzioni

S. 14.21. $\begin{cases} -\infty & \beta > 3/2 \\ -1/2 & \beta = 3/2 \\ 0^- & \beta < 3/2 \end{cases}$

S. 14.22. $\dfrac{3}{4}$

S. 14.23. $= \begin{cases} 17/4 & \text{se } \alpha = 1 \text{ e } \beta = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 4 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \text{ e } \beta < 4 \\ \nexists & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \beta \geq 3 \\ 0 & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \beta < 3 \end{cases}$

15

Esercizi riassuntivi su limiti, funzioni, grafici e sviluppi

15.1 Esercizi a risposta multipla parte 1

E. 15.1. $\lim_{x\to+\infty} x^3 \sin x =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ $\nexists$ $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

E. 15.2. $\lim_{x\to0^-} \dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{c}}$ 0 $\boxed{\mathbf{d}}$ $\frac{1}{2}$

E. 15.3. $\lim_{x\to1} \dfrac{\log x}{(x-1)^9} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ $-\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

E. 15.4. $\lim_{x\to+\infty} (x+5)^3 e^{-5x} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 1 $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $-\infty$

E. 15.5. $\lim_{x\to+\infty} (5^x+1)^{\frac{1}{x}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\log 5$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{c}}$ 1 $\boxed{\mathbf{d}}$ 5

E. 15.6. $\lim_{x\to0} (1+\pi x)^{\frac{1}{x}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ ∞ $\boxed{\mathbf{b}}$ e^{π} $\boxed{\mathbf{c}}$ 0 $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

E. 15.7. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+3^{-x}\right)^{3^{x+1}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 0 $\boxed{\mathbf{b}}$ e^3 $\boxed{\mathbf{c}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ e^2

E. 15.8. $\lim_{x\to0} \dfrac{\log\left(1+3x^2\right)}{1-\cos 2x} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 6 $\boxed{\mathbf{c}}$ 0 $\boxed{\mathbf{d}}$ ∞

E. 15.9. $\lim_{x\to0^+} 2x\,(\log x)^2 =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 2 $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ $-\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $+\infty$

E. 15.10. Sia $f(x) = 3x + \log(1-3x)$. Per $x \to 0$: $f(x) \sim$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $6x$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $-\dfrac{3x^2}{2}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\dfrac{9x^2}{2}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $-\dfrac{9x^2}{2}$

E. 15.11. Sia $y = f(x)$ monotona crescente in $[a,+\infty)$, sia $x_0 \in (a,+\infty)$. Allora $\lim_{x\to x_0^+} f(x) =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $-\infty$ $\boxed{\mathbf{c}}$ l finito $\boxed{\mathbf{d}}$ $\nexists$

E. 15.12. Sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$ e che $f(x) < g(x)$ per $x \neq 0$, si può dedurre che **a** $\lim_{x\to 0} g(x) \geq 4$ **b** se esiste $\lim_{x\to 0} g(x) = l$ allora $l \geq 4$ **c** $\lim_{x\to 0} g(x) = 4$ **d** $\lim_{x\to 0} g(x) > 4$

E. 15.13. Se una successione $\{a_n\}$ di numeri reali è monotona decrescente e limitata allora **a** non ha punti di accumulazione **b** $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf a_n$ **c** ha due punti di accumulazione **d** $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n$

E. 15.14. Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente non limitata superiormente. Allora tale successione **a** è divergente a $+\infty$ **b** è convergente **c** non converge né diverge **d** qualunque carattere è possibile

E. 15.15. Sia $f \in C^\infty$: $f(x) = o(x^k)$ per $x \to 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, allora necessariamente **a** $\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon \in (-\epsilon, 0) \cap (0, \epsilon) : f(x_\epsilon) = 0$ **b** $f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ **c** $f \equiv 0$ in un intorno di $x = 0$ **d** f ha un flesso in $x = 0$

E. 15.16. Sia $[x]$ la parte intera di x, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$ **a** 0 **b** $= 1$ **c** $= +\infty$ **d** $\nexists$

E. 15.17. Sia $a_n = \cos n\pi + \sin \frac{\pi}{2} n$ $n \in \mathbb{N}$, allora $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ **a** $= \sqrt{2}$ **b** $= 1$ **c** $= 2$ **d** $\nexists$

E. 15.18. Per $x \to 1$ $\sin \log x^2 \sim$ **a** $2(x-1)^2$ **b** $2(x-1)$ **c** $(x-1)$ **d** $(x-1)^2$

E. 15.19. $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \cosh n =$ **a** $\frac{1}{2}$ **b** 1 **c** 0 **d** $+\infty$

E. 15.20. Sia $f(x) = o(x^2)$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$ allora necessariamente $f(x) - g(x)$ **a** è illimitata **b** $= o(x^2)$ **c** $= o(x^4)$ **d** $= 0$

E. 15.21. Dire che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non ha limite per $x \to 0$ equivale a dire che **a** $\forall l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta : \exists x_\delta \neq 0 : |x_\delta| < \delta \quad |f(x_\delta) - l| > \epsilon$ **b** $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta, \quad |f(x) - l| > \epsilon$ **c** $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \forall x : |x| < \delta \quad |f(x) - l| > \epsilon$ **d** $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta \neq 0 : |x_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - l| > \epsilon$

E. 15.22. $\liminf_{x\to+\infty} x \sin x =$ **a** $-\infty$ **b** $\nexists$ **c** 0 **d** -1

E. 15.23. $\lim_{n\to+\infty} |1 + (\pi i)^n| =$ **a** $\nexists$ **b** 1 **c** $+\infty$ **d** 0

E. 15.24. La proposizione $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - 4| < \delta \Longrightarrow |h(x) - 5| < \epsilon$ significa **a** $\sup_{x\in(4-\delta,4+\delta)} h(x) = 5$ **b** $h(4) = 5$ **c** $\lim_{x\to 5} h(x) = 4$ **d** $\lim_{x\to 4} h(x) = 5$

E. 15.25. Lo sviluppo di Mac Laurin fino al secondo ordine di $f(t) = e^{2t-t^2}$ è **a** $1 + 2t + \frac{5}{2}t^2 + o(t^2)$ **b** $1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)$ **c** $1 + 2t + t^2 + o(t^2)$ **d** $1 + 2t + 3t^2 + o(t^2)$

E. 15.26. $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^6}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $-\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ $\nexists$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $+\infty$

E. 15.27. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e tale che $\lim_{x\to\pi} f(x) = 0$ allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x-\pi| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\forall\epsilon > 0, \forall\delta > 0 : 0 < |x-\pi| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\forall\epsilon > 0, \delta : 0 < |x-\pi| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0 : 0 < |x-\pi| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon$

E. 15.28. $a_n = 3 + \tan\dfrac{n\pi}{2n+2}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{n\to} a_n =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $-\infty$ $\boxed{\mathbf{c}}$ 0 $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

E. 15.29. $\lim_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{1}{x}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 1 $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\nexists$

E. 15.30. $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 1 $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ $\dfrac{1}{e}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ e

E. 15.31. $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ significa $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : x \in (0,\delta) \Longrightarrow |f(x)-1| \geq \epsilon$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\exists\epsilon_0 > 0 : \exists\delta > 0, \exists x : x \in (0,\delta) \Longrightarrow |f(x)-1| \geq \epsilon_0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists\epsilon_0 > 0 : \forall\delta > 0 \exists x \in (0,\delta) \Longrightarrow |f(x)-1| \geq \epsilon_0$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\exists\epsilon_0 > 0 : \forall\delta > 0 \exists x \in (-\delta,\delta) \Longrightarrow |f(x)-1| \geq \epsilon_0$

E. 15.32. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3}{x^3}\left(\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right) =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ 1 $\boxed{\mathbf{d}}$ $\nexists$

E. 15.33. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x^x-1)}{\sqrt{x}}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\nexists$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $=0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $=-\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $=-1$

E. 15.34. $\limsup_{n\to+\infty} \cos n$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\nexists$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $=1$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $=0$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $=-1$

E. 15.35. $\lim_{x\to+\infty}(1+\pi x)^{\frac{1}{x}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ ∞ $\boxed{\mathbf{b}}$ e^π $\boxed{\mathbf{c}}$ 0 $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

15.2 Soluzioni

S.11.1 $\boxed{\mathbf{c}}$ **S.11.2** $\boxed{\mathbf{d}}$ **S.11.3** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.4** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.5** $\boxed{\mathbf{d}}$ **S.11.6** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.7** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.8** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.9** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.10** $\boxed{\mathbf{d}}$ **S.11.11** $\boxed{\mathbf{c}}$ **S.11.12** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.13** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.14** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.16** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.16** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.17** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.18** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.19** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.20** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.21** $\boxed{\mathbf{d}}$ **S.11.22** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.23** $\boxed{\mathbf{c}}$ **S.11.24** $\boxed{\mathbf{d}}$ **S.11.25** $\boxed{\mathbf{c}}$ **S.11.26** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.27** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.28** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.29** $\boxed{\mathbf{a}}$ **S.11.30** $\boxed{\mathbf{c}}$ **S.11.31** $\boxed{\mathbf{c}}$ **S.11.32** $\boxed{\mathbf{c}}$ **S.11.33** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.34** $\boxed{\mathbf{b}}$ **S.11.35** $\boxed{\mathbf{d}}$

15.3 Esercizi a risposta multipla parte 2

E. 15.36. $y = \tan x^3$ $\boxed{\mathbf{a}}$ non è periodica $\boxed{\mathbf{b}}$ è periodica di periodo π $\boxed{\mathbf{c}}$ è periodica di periodo π^3 $\boxed{\mathbf{d}}$ è periodica di periodo $\pi^{\frac{1}{3}}$

E. 15.37. $f \in C^2(\mathbb{R}) : f'(x_0) = f''(x_0) = 5$. Se $g(x) = 5x - f(x)$ allora:
$\boxed{\mathbf{a}}$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ g è monotona $\boxed{\mathbf{c}}$ g ha minimo locale in x_0 $\boxed{\mathbf{d}}$ g ha massimo locale in x_0

E. 15.38. $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile 4 volte in $x = 0$, allora necessariamente $\boxed{\mathbf{a}}$ esiste un intorno di x_0 in cui f è tre volte derivabile $\boxed{\mathbf{b}}$ f è integrabile in $(-10^{-4}, 10^4)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $f \in C^3\left(\left[10^{-3}, 10^3\right]\right)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ esiste $f^{(4)}$ in un intorno di 0
Giustificare la risposta fornendo dei controesempi.

E. 15.39. Data la funzione $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita

$$H = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ \frac{1}{2} \text{ se } x = 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{a}}$ è monotona su $\mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ è invertibile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ è integrabile su $\mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ è integrabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

E. 15.40. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente crescente, allora necessariamente $\boxed{\mathbf{a}}$ f è continua $\boxed{\mathbf{b}}$ $\exists f'$ e $f' > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists f'$ e $f' \geq 0\, \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ f è invertibile.
Giustificare la risposta fornendo dei controesempi.

E. 15.41. L'equazione $e^{\frac{x}{1000}} = 1000x$ ha $\boxed{\mathbf{a}}$ ∞ radici reali $\boxed{\mathbf{b}}$ una radice reale $\boxed{\mathbf{c}}$ due radici reali $\boxed{\mathbf{d}}$ nessuna radice reale

E. 15.42. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \longrightarrow 0$. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ f non è derivabile in $x = 0$ $\boxed{\mathbf{b}}$ f è continua in un intorno di $x = 0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ f è pari $\boxed{\mathbf{d}}$ f ha minmo locale in $x = 0$

E. 15.43. $f = \sin\left(\sqrt{2}x + 3\right)$ $\boxed{\mathbf{a}}$ è periodica di periodo $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ è periodica di periodo $\sqrt{2}\pi$ $\boxed{\mathbf{c}}$ è periodica di periodo 2π $\boxed{\mathbf{d}}$ è periodica di periodo $2\pi + 3$

E. 15.44. $f = \sin\left(e^{-2x}\right)$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ non limitata $\boxed{\mathbf{b}}$ periodica di periodo 2π $\boxed{\mathbf{c}}$ integrabile su $(0, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ monotona

E. 15.45. $f = e^{-\sin\sqrt{3}x}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ periodica di periodo 2π $\boxed{\mathbf{b}}$ suriettiva su $(0, e)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ periodica di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ suriettiva su $(0, +\infty)$

E. 15.46. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = e^{x^2}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ monotona decrescente $\boxed{\mathbf{b}}$ convessa $\boxed{\mathbf{c}}$ concava $\boxed{\mathbf{d}}$ monotona crescente

E. 15.47. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x \sin x$ $\boxed{\mathbf{a}}$ è iniettiva ma non suriettiva $\boxed{\mathbf{b}}$ è biiettiva $\boxed{\mathbf{c}}$ è suriettiva ma non iniettiva $\boxed{\mathbf{d}}$ nessuna delle altre risposte è corretta

E. 15.48. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è monotona decrescente, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ se $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ se $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ se $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

E. 15.49. $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ed f monotona crescente; allora necessariamente $\boxed{\mathbf{a}}$ $f \circ g$ ha derivata negativa $\boxed{\mathbf{b}}$ $g \circ f$ non è definita $\boxed{\mathbf{c}}$ se g è monotona, allora $f \circ g$ è monotona $\boxed{\mathbf{d}}$ se g è monotona decrescente allora $g \circ f$ è monotona crescente

E. 15.50. Data la funzione $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita

$$H = \begin{cases} |x| \text{ se } x \neq 0 \\ -1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{a}}$ è limitata $\mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ è concava $\boxed{\mathbf{c}}$ è derivabile da destra $\boxed{\mathbf{d}}$ è convessa

E. 15.51. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$, $x > 0$. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $g(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}$, $x \longrightarrow +\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $g(x) \sim x^{-2}$, $x \longrightarrow 0^+$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $g(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}$, $x \longrightarrow 0^+$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $g(x) \sim x^2$, $x \longrightarrow +\infty$

E. 15.52. $f \sim g$ per $x \longrightarrow x_0$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ se f è derivabile in x_0 anche g lo è $\boxed{\mathbf{b}}$ se f è continua allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = f(x_0)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ f è derivabile in un intorno di x_0 $\boxed{\mathbf{d}}$ f e g sono continue in x_0

E. 15.53. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in 0 e tale che $f(x) \sim 6x$ per $x \longrightarrow 0$. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ f è limitata in $\left(-10^{-10}, 10^{10}\right)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ f è dispari $\boxed{\mathbf{c}}$ esiste un intorno di 0 in cui f è monotona $\boxed{\mathbf{d}}$ $f'(0) = 6$

Giustificare la risposta fornendo dei controesempi.

E. 15.54. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che $f(x) \sim 6x$ per $x \longrightarrow 0$. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $f(0) = 0$ $\boxed{\mathbf{b}}$ f è dispari $\boxed{\mathbf{c}}$ esiste $\epsilon > 0$ tale che in $(-\epsilon, \epsilon)$ f è monotona $\boxed{\mathbf{d}}$ se f é derivabile in 0, allora $f'(0) = 6$

E. 15.55. $f(x) = 1 + \sin(x^2) - e^{x^2}$; il Polinomio di Mac Laurin di grado ≤ 3 associato ad f è $\boxed{\mathbf{a}}$ $2x^2$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\frac{x^3}{3!} - x^2$ $\boxed{\mathbf{c}}$ 0 $\boxed{\mathbf{d}}$ $1 - x^3$

E. 15.56. $g \in C(\mathbb{R})$, $f(x) = g(|x|)$. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $f \in C(\mathbb{R})$ $\boxed{\mathbf{b}}$ f non puó essere derivabile in $x = 0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ se g è derivabile in $\mathbb{R}$ allora anche f è derivabile in $\mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ se g è monotona su $\mathbb{R}$ allora f è monotona su $\mathbb{R}$

E. 15.57. $f \in C(\mathbb{R})$ e tale che $f(x) = o\left(|x-3|\right)$ per $x \longrightarrow 3$, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $f'(3) = 1$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $f'(3) = -1$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $f'(3) = 0$ $\boxed{\mathbf{d}}$ f può non essere derivabile in $x = 3$

Dare una dimostrazione del risultato con la definizione di o piccolo.

E. 15.58. $f = 12\sin x^7 \cos x^5$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f^{(31)}(0) =$ $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 31! $\boxed{\text{c}}$ 12 $\boxed{\text{d}}$ 31!/12

E. 15.59. $f(x) = x^7 \sin x^4$. Allora $f^{(18)}(0) =$ $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ $-21!/3!$ $\boxed{\text{c}}$ $-1/3!$ $\boxed{\text{d}}$ $-21!$

E. 15.60. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(0) = 0$ e $g(x) = o(x^3)$ per $x \longrightarrow 0$, allora $\boxed{\text{a}}$ esiste $g''(0) = 0$ $\boxed{\text{b}}$ esiste $g'(0) = 0$ $\boxed{\text{c}}$ g è continua in un intorno di $x = 0$ $\boxed{\text{d}}$ g è dispari

Studiare la funzione $y = x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ in un intorno dell'origine.

E. 15.61. La funzione $y = \log_a x$ per qualunque a assegnato, purché > 0 e $\neq 1$ è $\boxed{\text{a}}$ definita in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{b}}$ monotona crescente $\boxed{\text{c}}$ monotona decrescente $\boxed{\text{d}}$ invertibile

E. 15.62. La funzione $y = 2^{-x^2}$, $x \geq 0$ ha come funzione inversa $y = g(x)$ $\boxed{\text{a}}$ $y = -\sqrt{-\log_2 x}$ $\boxed{\text{b}}$ $y = \sqrt{-\log_2 x}$ $\boxed{\text{c}}$ $y = \sqrt{\log_2 x}$ $\boxed{\text{d}}$ $y = -\sqrt{\log_2 x}$

E. 15.63. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-kx^2}, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{a}}$ f è strettamente crescente $\forall k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{b}}$ per qualche $k \in \mathbb{R}$ f è strettamente crescente $\boxed{\text{c}}$ $\forall k \in \mathbb{R}$ f non è invertibile $\boxed{\text{d}}$ $\forall k \neq 0$ f ha come immagine $\mathbb{R}$

15.4 Soluzioni

S. 15.36. $\boxed{\text{d}}$

S. 15.37. $\boxed{\text{d}}$

S. 15.38. $\boxed{\text{a}}$

S. 15.39. $\boxed{\text{a}}$

S. 15.40. $\boxed{\text{d}}$

S. 15.41. $\boxed{\text{c}}$

S. 15.42. $\boxed{\text{d}}$

S. 15.43. $\boxed{\text{b}}$

S. 15.44. $\boxed{\text{c}}$

S. 15.45. $\boxed{\text{c}}$

S. 15.46. $\boxed{\text{b}}$

S. 15.47. $\boxed{\text{c}}$

S. 15.48. $\boxed{\text{a}}$

S. 15.49. $\boxed{\text{c}}$

S. 15.50. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 15.51. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 15.52. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 15.53. $\boxed{\mathbf{d}}$

S. 15.54. $\boxed{\mathbf{d}}$

S. 15.55. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 15.56. $\boxed{\mathbf{a}}$

S. 15.57. $\boxed{\mathbf{c}}$

S. 15.58. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 15.59. $\boxed{\mathbf{a}}$

S. 15.60. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 15.61. $\boxed{\mathbf{d}}$

S. 15.62. $\boxed{\mathbf{b}}$

S. 15.63. $\boxed{\mathbf{c}}$

16

Integrali

16.1 Esercizi proposti

S. 16.1. Risolvere i seguenti integrali indefiniti (immediati, oppure con tecniche di integrazione per parti e tramite sostituzione):

1. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2-10x+10}{x^2-4x+4}\, dx$
3. $\displaystyle\int x^3 \cos(x^2)\, dx$
4. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2x}{x^2+x+2}\, dx$
5. $\displaystyle\int e^{-5x^3} x^5\, dx$
6. $\displaystyle\int e^{-4x} \cos 2x\, dx$
7. $\displaystyle\int (1+\sin^2 x)^2\, dx$
8. $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x+\tan x}{\tan^2 x+2\tan x+1}\, dx$
9. $\displaystyle\int \cosh^3 x(\sin x+2\cos x)\, dx$
10. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\sin^2 x+1}\, dx$

11. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x + 1}\, dx$

12. $\displaystyle\int \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})\, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 + 7x + 12}\, dx$

14. $\displaystyle\int (1 + x^2 - 2x^3) \sinh^2 x\, dx$

15. $\displaystyle\int \frac{1 - 6x}{\sqrt{x} - 2}\, dx$

16. $\displaystyle\int \log(1 + x + x^2)\, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

S. 16.2. Risolvere i seguenti integrali indefiniti (immediati, oppure con tecniche di integrazione per parti e tramite sostituzione):

1. $\displaystyle\int \log x\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt[4]{x}}\, dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\, dx$

6. $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx$

7. $\displaystyle\int \log^2 x\, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + 2x^8}\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x}{1 + x + 2x^2}\, dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx$

11. $\displaystyle\int \frac{\arctan^5 x}{1+x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int \log(1-2x)\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+2e^{2x}+3e^x}{e^x-1}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\,dx$

15. $\displaystyle\int x\log(1-2x-x^2)\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{6\sin x-\cos 2x+5}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

S. 16.3. Risolvere i seguenti integrali definiti:

1. $\displaystyle\int_0^1 (1+x)\frac{e^x\,dx}{(1+e^x)^2}$
2. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x-2\cos^2 x}$
3. $\displaystyle\int_{\log_3\sqrt{2}}^{\log_3 6} \frac{9^x+3^x}{3^x+3^{-x}2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+x+4}{(x^2+1)(x+2)}\,dx$

S. 16.4. Calcolare l'area compresa tra un lobo della funzione seno e l'asse x.

S. 16.5. Calcolare la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=(1+x^2)e^{-|x+1|}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=3.$$

S. 16.6. Calcolare l'area della circonferenza di raggio r, utilizzando la primitiva dell'integrale indefinito $\displaystyle\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

S. 16.7. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra le curve di equazione

$$f_1(x)=\sqrt[3]{x} \qquad f_2(x)=\frac{x}{2-x}$$

e $x\in\big[-\frac{1}{2},1\big]$.

S. 16.8. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione

$$y = \log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$

e le rette $x = 0$ e $x = 3$.

S. 16.9. Calcolare l'area della parte di piano (x, y) definita da

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, |\log(x - \sqrt{2})| < y < 2\Big\}.$$

S. 16.10. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione

$$y = (x^2 - 1)e^{-|x+2|}$$

e le rette $x = 0$ e $x = 2$.