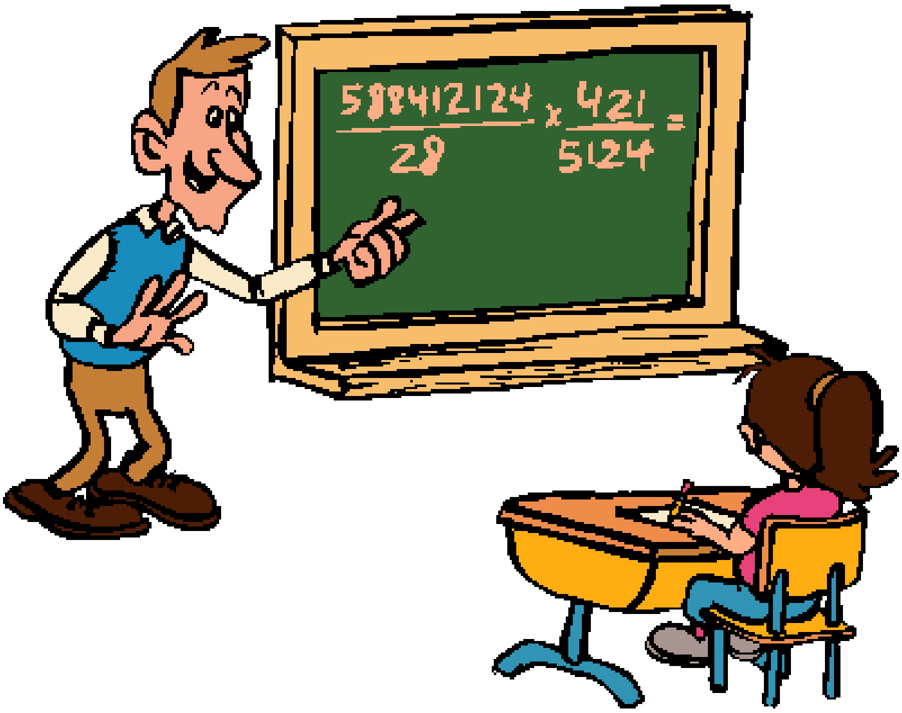

Algèbre bilinéaire

Mohamed HOUIMDI

Université Cadi Ayyad
Faculté des Scieces-Semlalia
Département de Mathématiques

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

FORMES LINÉAIRES – DUALITÉ

1.1 Formes linéaires et hyperplans

Définition 1.2.

Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers K.

Remarque 1.2.1
Rappelons que si E est un K-espace vectoriel, on dit que H est un hyperplan de E, si $\dim(E/H)=1$. *Donc si E est de dimension finie, alors*

$$H \text{ est un hyperplan de } E \Longleftrightarrow \dim(H)=\dim(E)-1$$

Proposition 1.3.

Soit E un K-espace vectoriel quelconque. Alors

i) Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E.

ii) Tout hyperplan de E est le noyau d'au moins une forme linéaire non nulle de E.

iii) Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E. Alors

$$\boxed{\ker(\varphi)=\ker(\psi) \Longleftrightarrow \exists\lambda\in K\ :\ \psi=\lambda\varphi}$$

Preuve

i) *Soit φ une forme linéaire non nul sur E, alors on sait que $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à $Im(\varphi)$. Puisque $\varphi\neq 0$, alors $Im(\varphi)\neq\{0_K\}$, donc $Im(\varphi)=K$. Par suite, $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à K, donc $\dim(E/\ker(\varphi))=1$. Ainsi, $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.*

ii) **($\Longrightarrow$)** *Supposons que $\ker(\varphi)=\ker(\psi)$ et soit $x_0\in E$, tel que $x_0\notin\ker(\varphi)$, donc on aura*

$$E=\ker(\varphi)\oplus Vect(x_0)$$

Soit $x\in E$ avec $x=y_0+\alpha x_0$, alors $\varphi(x)=\alpha\varphi(x_0)$ et $\psi(x)=\alpha\psi(x_0)$. Puisque $\varphi(x_0)\neq 0$, donc on voit que $\psi(x)=\frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x)$ et ceci pour tout $x\in E$, donc on aura

$$\psi=\frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi$$

$(\Longleftarrow)$ *Trivial.*

Remarque 1.3.1
Le résultat ii) de la proposition précédente se généralise de la manière suivante :

Proposition 1.4.

Soient E un K-espace vectoriel quelconque, φ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur E. Alors

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi) \Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n \ : \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i}$$

Preuve
$(\Longrightarrow)$ *Supposons que* $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$ *et montrons que* $\varphi \in Vect(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$.

Pour cela, on procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$*, le résultat est vrai d'après la proposition précédente.*
Supposons que $n > 1$ *et la propriété vraie pour tout entier* $m < n$.

Première méthode : *Pour chaque* $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$*, soit* ψ_i *la réstriction de* φ_i *à* $\ker(\varphi_n)$ *et soit* ψ *la restriction de* φ *à* $\ker(\varphi_n)$*, alors* $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ *et* ψ *sont des formes linéaires de* $\ker(\varphi_n)$ *et on a*

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\psi_i) \subseteq \ker(\psi)$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) \in K^{n-1}$*, tel que*

$$\psi = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \psi_i$$

Soit β *la forme linéaire de* E *définie par*

$$\beta = \varphi - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i$$

Alors pour $x \in \ker(\varphi_n)$*, on a*

$$\beta(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i(x) = \psi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \psi_i(x) = 0$$

Donc $\ker(\varphi_n) \subseteq \ker(\beta)$*, donc d'après la proposition précédente, il existe* $\lambda_n \in K$*, tel que* $\beta = \lambda_n \varphi_n$*, par suite, on aura*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

Deuxième méthode : *On peut supposer que* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ *sont linéairement indépendants, car sinon, il existe* $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\varphi_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \varphi i_0}}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

Donc quitte à réordonner les éléments, on peut supposer que $i_0 = n$*, donc on aura*

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i$$

Ainsi, on aura $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi_n)$ *donc* $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$*, par suite d'après l'hypothèse de récurrence, il existe* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in K^{n-1}$*, tel que*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i$$

Donc on aura le résultat.
Supposons, donc, que $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *est libre, donc, d'après l'hypothèse,*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \ker(\varphi_j) \not\subseteq \ker(\varphi_i)$$

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, il existe* $y_i \in E$*, tel que* $y_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \ker(\varphi_j)$ *et* $y_i \notin \ker(\varphi_i)$

Si on pose $x_i = \dfrac{y_i}{\varphi_i(y_i)}$*, alors* $\varphi_i(x_i) = 1$ *et* $\forall j, \; j \neq i \Longrightarrow \varphi_j(x_i) = 0$.
Donc pour tout $x \in E$*, on a*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \varphi_i(x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j) = \varphi_i(x) - \varphi_i(x) = 0$$

Donc

$$x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$$

Par suite,

$$\forall x \in E, \; x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j \in \ker(\varphi)$$

Donc

$$\forall x \in E, \; \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \varphi_j(x)$$

Donc, si on pose pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*,* $\lambda_j = \varphi(x_j)$*, on aura*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j$$

($\Longleftarrow$) *Trivial.*

1.5 Espace vectoriel dual

Définition 1.6.

Soit E un K-espace vectoriel. On appelle **espace vectoriel dual** de E, qu'on note E^*, l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E.

$$\boxed{E^* = L(E, K)}$$

Notations

Pour $x \in E$ et pour $\varphi \in E^*$, on pose

$$\varphi(x) = < x, \varphi >$$

Remarque 1.6.1

Si E est de dimension finie, alors on sait que $L(E,K)$ est aussi de dimension finie et on a

$$\dim(L(E,K)) = \dim(E) \times \dim(K) = \dim(E)$$

Donc si E est de dimension finie, alors E^* est aussi de dimension finie et on a

$$\boxed{\dim(E^*) = \dim(E)}$$

Donc, en particulier, si E est de dimension finie, alors E et E^* sont isomorphes.
Cependant, si E n'est pas de dimension finie, E^* peut ne pas être isomorphe à E. (Voir exemple ci-dessous).

Exemples

1. *Soit K un corps commutatif, pour tout $a \in K^n$ avec $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, soit φ_a l'application définie par,*

$$\forall x \in K^n,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Longrightarrow \varphi_a(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

   Alors φ_a est une forme linéaire sur K^n.
   Réciproquement, soit φ une forme linéaire sur K^n, alors il existe un unique $a \in K^n$, tel que $\varphi = \varphi_a$.
   En effet, soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n et pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $a_i = \varphi(e_i)$, alors pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \varphi_a(x)$$

2. *Soit K un corps commutatif, pour chaque $x = (x_n)_{n\geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, soit φ_x l'application définie sur $K[X]$ par,*

$$\forall P \in K[X],\ \ P = \sum_{i=1}^{p} a_i X^i \Longrightarrow \varphi_x(P) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$$

   Alors pour tout $x \in K^{\mathbb{N}}$, φ_x définit une forme linéaire sur $K[X]$.
   Réciproquement, soit φ une forme linéaire sur $K[X]$, alors il existe un unique $x = (x_n)_{n\geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, tel que $\varphi = \varphi_x$.
   En effet, soit $(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$ la base canonique de $K[X]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n = \varphi(X^n)$, alors pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, on a

$$\varphi(P) = \varphi(\sum_{i=1}^{p} a_i X^i) = \sum_{i=1}^{p} a_i \varphi(X^i) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i = \varphi_x(P)$$

   Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} f : K^{\mathbb{N}} &\longrightarrow (K[X])^* \\ x &\longmapsto \varphi_x \end{aligned}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. *Soient K un corps commutatif et $E = M_n(K)$, le K-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. Pour $M \in M_n(K)$, avec $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on sait que la trace de M, notée $tr(M)$, est définie par $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$. Alors*

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(K) &\longrightarrow K \\ M &\longmapsto tr(M) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $M_n(K)$.
Réciproquent, soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$, alors il existe un unique $A \in M_n(K)$, tel que

$$\forall M \in M_n(K),\ \varphi(M) = tr(AM)$$

En effet, pour chaque $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, soit E_{ij} la mtrice de $M_n(K)$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne qui est égal à 1.
Alors pour chaque $M \in M_n(K)$, avec $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} E_{ij}$$

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$.
Pour $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, soit $a_{ij} = \varphi(E_{ji})$, alors on a

$$\begin{aligned} \forall M \in M_n(K),\ \varphi(M) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} E_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \varphi(E_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} a_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} a_{ji}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \quad \text{où } MA = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \\ &= tr(MA) = tr(AM) \end{aligned}$$

Remarque 1.6.2
Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[X]$ n'est pas isomorphe à son dual $(\mathbb{Q}[X])^*$.
En effet, pour chaque entier $n \geq 0$, soit $E_n = \{P \in \mathbb{Q}[X] \ : \ \deg(P) \leq n\}$, alors on sait que E_n est un $\mathbb{Q}$-espace espace vectoriel de dimension finie $= n+1$, donc E_n est isomorphe à $\mathbb{Q}^{n+1}$. Or on sait que pour tout entier $m \geq 1$, $\mathbb{Q}^m$ est dénombrable, donc pour tout $n \geq 0$, E_n est dénombrable.
Puisque $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ et puisque une réunion dénombrables d'ensembles dénombrables est dénombrable, alors $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
D'après l'exemple précédent, on sait que $(\mathbb{Q}[X])^*$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, donc si on suppose que $\mathbb{Q}[X]$ est isomorphe à son dual, alors $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ serait dénombrable. Ce qui est absurde, car on sait que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. (Pour les questions de dénombrabilité, voir annexe).

1.7 Base duale

Proposition 1.8.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on définit $e_i^* \in E^*$, par

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ < e_j, e_i^* >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Alors $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de E.

Preuve

Puisque $\dim(E^*) = n$*, alors il suffit de montrer que* $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ *est libre. Pour cela, soit* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$*, tel que* $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \cdots + \alpha_n e_n^* = 0$*. A-t-on* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ *?*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0 &\Longrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ < e_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* >= 0 \\ &\Longrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < e_j, e_i^* >= 0 \\ &\Longrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \alpha_j = 0 \quad (car \ < e_j, e_i^* >= \delta_{ij}) \end{aligned}$$

Proposition 1.9.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, alors

i)

$$\boxed{\forall x \in E, \ x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i^* > e_i}$$

ii)

$$\boxed{\forall \varphi \in E^*, \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} < e_i, \varphi > e_i^*}$$

Preuve

i) *Soit* $x \in E$ *avec* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$*, alors pour tout* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$*, on a*

$$< x, e_j^* >= \sum_{i=1}^{n} x_i < e_i, e_j^* >= x_j \quad (car \ < e_i, e_j^* >= \delta_{ij})$$

ii) *Soit* $\varphi \in E^*$ *avec* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*$*, alors pour tout* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$*, on a*

$$< e_j, \varphi >= \sum_{i=1}^{n} y_i < e_j, e_i^* >= y_j \quad (car \ < e_i, e_j^* >= \delta_{ij})$$

Exemples

1. *Soient K un corps commutatif et $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n. Alors la base duale $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ est définie par*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall x \in K^n, \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow e_i^*(x) = x_i$$

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e_i^* est la $i^{ième}$ projection de K^n sur K.

2. *Soit $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $e_i^* = dx_i$, donc dx_i est la $i^{ième}$ projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$:*

$$\forall x \in K^n, \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow dx_i(x) = x_i$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $x_0 \in \Omega$. Alors on sait que la différentielle $f'(x_0)$ au point x_0 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et on a

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \ f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)(h) + o(\|h\|)$$

D'après la proposition précédente, on a

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, f'(x_0) > dx_i$$

Or, on sait que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(x_0 + te_i) - f(x_0) = t < e_i, f'(x_0) > + to(1)$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = < e_i, f'(x_0) > + o(1)$$

Ainsi, on aura

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = < e_i, f'(x_0) >$$

On sait que la $i^{ième}$ dérivée partielle au point x_0 est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

Ainsi, on retrouve l'écriture canonique de $f'(x_0)$,

$$\boxed{f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i}$$

3. *Soient K un corps commutatif et $\beta = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $K_n[X]$. Alors la base duale $\beta^* = (e_0^*, e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est définie par,*

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \forall P \in K_n[X], \ P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \Longrightarrow e_i^*(P) = a_i$$

Pour chaque $a \in K$, soit φ_a la forme linéaire définie sur $K_n[X]$ par,

$$\forall P \in K_n[X], \ \varphi_a(P) = P(a)$$

Alors, d'après la proposition précédente, on a

$$\varphi_a = \sum_{i=0}^{n} < X^i, \varphi_a > e_i^* = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i^*$$

Proposition 1.10.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit u un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors

$$\boxed{\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2, \;\; a_{ij} = < u(e_j), e_i^* >}$$

Preuve
D'après la proposition précédente, on a

$$\forall j \in \{1,2,\dots,n\}, \;\; u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} < u(e_j), e_i^* > e_i$$

Donc, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice de* u *par rapport à la base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$*, alors*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2, \;\; a_{ij} = < u(e_j), e_i^* >$$

Proposition 1.11.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. pour chaque $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, on désigne par $e_i \otimes e_j^*$ l'endomorphisme de E défini par,

$$\forall x \in E, \;\; (e_i \otimes e_j^*)(x) = < x, e_j^* > e_i$$

Alors $\mathcal{A} = \{e_i \otimes e_j^* \; : \; (i,j)) \in \{1,2,\dots,n\}^2\}$ forme une base de $L(E)$ et on a

$$\forall (i,j)) \in \{1,2,\dots,n\}^2, \;\; Mat(e_i \otimes e_j^*, (e_1, e_2, \dots, e_n)) = E_{ij}$$

où les E_{ij} sont les matrices élémentaires de $M_n(K)$.

Preuve
Puisque $\dim(L(E)) = n^2$*, alors il suffit de montrer que* $\mathcal{A}$ *est une partie génératrice de* $L(E)$*. Pour cela, soit* $u \in L(E)$ *et soit* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice de* u *par rapport à la base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$*. Pour* x *élément quelconque de* E*, on sait que*

$$x = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > e_j$$

Donc, on aura

$$\begin{aligned}
x = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > e_j \Longrightarrow u(x) &= \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > u(e_j) \\
\Longrightarrow u(x) &= \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right) \\
\Longrightarrow u(x) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < x, e_j^* > e_i \\
\Longrightarrow u(x) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (e_i \otimes e_j^*)(x) \quad \textit{(ceci pour tout } x \in E\textit{)} \\
\Longrightarrow u &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i \otimes e_j^*
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ est une partie génératrice de $L(E)$.
Soit $M = (m_{kl})_{1\leq k,l\leq n}$ la matrice de $e_i \otimes e_j^*$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors, d'après la proposition préédente, on a

$$\forall (k,l)) \in \{1,2,\ldots,n\}^2, \;\; m_{kl} =< (e_i \otimes e_j^*)(e_l), e_k^* >=< e_l, e_j^* >< e_i, e_k^* >$$

Donc on voit que

$$m_{kl} = \begin{cases} 1 & \textit{si } k = i \textit{ et } l = j \\ 0 & \textit{si } k \neq i \textit{ ou } l \neq j \end{cases}$$

Donc $M = E_{ij}$.

1.12 Base préduale

Lemme 1.13.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\gamma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ deux bases de E, $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ et $\gamma^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$ leurs bases duales.
Soit P la matrice de passage de β à γ et Q celle de β^* à γ^*. Alors

$$\boxed{Q = {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}}$$

Preuve
On pose $P^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n\alpha}$ et $Q = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq n\alpha}$. Alors, d'après la proposition 3.9, on a

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2, \;\; q_{ij} =< e_i, v_j^* >$$

D'autre part, on a

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \;\; e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} v_k$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}\forall (i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2,\ q_{ij} &=< e_i, v_j^* >\\ &=< \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} v_k, v_j^* >\\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} < v_k, v_j^* >\\ &= \alpha_{ji}\end{aligned}$$

Théorème 1.14.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* et Q la matrice de passage de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ à la base duale β^*. Alors

i) Il existe une unique base $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E, appelée base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, telle que $\forall j \in \{1,2,\dots,n\},\ v_j^* = \varphi_j$.

ii) Si P est la matrice de passage de la base β à la base γ, alors $P = ({}^tQ)^{-1} = {}^t(Q^{-1})$.

Preuve
i) $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ *est libre, donc d'après la proposition 3.4, on a*

$$\forall j \in \{1,2,\dots,n\},\ \bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \ker(\varphi_i) \not\subseteq \ker(\varphi_j)$$

Donc, pour tout $j \in \{1,2,\dots,n\}$*, il existe* $x_j \in E$*, tel que* $x_j \in \bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \ker(\varphi_i)$ *et* $x_j \notin \ker(\varphi_j)$.

Pour chaque $j \in \{1,2,\dots,n\}$*, soit* $v_j = \dfrac{x_j}{\varphi_j(x_j)}$*, donc on aura*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 &\Longrightarrow \forall i \in \{1,2,\dots,n\},\ \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\Big) = 0\\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1,2,\dots,n\},\ a_i = 0 \quad \text{car}\ \ \varphi_i(v_j) = \delta_{ij}\end{aligned}$$

Donc $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ *est une base de* E *et on a* $\forall j \in \{1,2,\dots,n\},\ v_j^* = \varphi_j$.

ii) *Conséquence du lemme précédent.*

1.15 Prolongement des formes linéaires

Théorème 1.16.

Soient E un K-espace vectoriel quelconque et F un sous-espace vectoriel de E. Alors toute forme linéaire sur F se prolonge en une forme linéaire de E.

Preuve
Soit ψ une forme linéaire sur F et soit G un supplémentaire de F dans E.
Soit φ la forme linéaire définie sur E, par

$$\begin{aligned} \varphi : E = F \oplus G &\longrightarrow K \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto \varphi(x) = \psi(x_1) \end{aligned}$$

Alors φ est un prolongement de ψ à E

Corollaire 1.17.

Soit E un K-espace vectoriel quelconque. Alors pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, tel que $< x, \varphi >= 1$.

Preuve
Soit $F = Vect(x)$ et soit ψ la forme linéaire définie sur F par,

$$\forall y \in F, \;\; y = \alpha x \Longrightarrow \psi(y) = \alpha$$

D'après le théorème précédent, ψ se prolonge en une forme linéaire φ sur E. Donc on a

$$\varphi(x) = \psi(x) = 1$$

1.18 Orthogonalité

Définition 1.19.

Soit E un K-espace vectoriel.

i) Pour toute partie non vide A de E, l'orthogonal de A, qu'on note $A^\perp$, est la partie de E^* définie par

$$\boxed{\forall \varphi \in E^*, \;\; \varphi \in A^\perp \Longleftrightarrow \forall x \in A, \; < x, \varphi >= 0}$$

ii) Pour toute partie non vide B de E, le pré-orthogonal de B, qu'on note B°, est la partie de E définie par

$$\boxed{\forall x \in E, \;\; x \in B^\circ \Longleftrightarrow \forall \varphi \in B, \; < x, \varphi >= 0}$$

Remarque 1.19.1

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* \;:\; \forall x \in A, \; \varphi(x) = 0\}$$

$$B^\circ = \{x \in E \;:\; \forall \varphi \in B, \; \varphi(x) = 0\}$$

Proposition 1.20.

Soit E un K-espace vectoriel. Alors

a) Pour toute partie A de E et Pour toute partie B de E, on a

$$A \subseteq B \Longrightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$$

b) Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E^*.

c) Pour toute partie A de E, $A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}$.

d) Pour toute partie B de E^*, B° est un sous-espace vectoriel de E.

e) Pour toute partie B de E^*, $B^{\circ} = (Vect(B))^{\circ}$.

f) $E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$ et $E^{*\circ} = \{0_E\}$

Preuve

a) *Supposons que $A \subseteq B$ et soit $\varphi \in E^*$, alors on a*

$$\begin{aligned}\varphi \in B^{\perp} &\Longrightarrow \forall x \in B,\ \varphi(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0 \quad \textit{car } A \subseteq B \\ &\Longrightarrow \varphi \in A^{\perp}\end{aligned}$$

b) *Pour chaque $x \in E$, soit $\widetilde{x} : E^* \longrightarrow K$ l'application définie par*

$$\forall \varphi \in E^*,\ \widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

Alors $\widetilde{x}$ est une forme linéaire sur E^* et on a

$$A^{\perp} = \bigcap_{x \in A} \ker(\widetilde{x})$$

Donc $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

c) *$A \subseteq Vect(A)$, donc d'après a), $Vect(A)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.*

Soit $\varphi \in A^{\perp}$ et soit $x \in Vect(A)$ avec $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, où $x_i \in A$, alors on a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(x_i) = 0$.

Donc $\varphi \in (Vect(A)^{\perp}$.

d) *On remarque que si B est une partie de E^*, alors*

$$B^{\circ} = \bigcap_{\varphi \in B} \ker(\varphi)$$

Donc B° est un sous-espace vectoriel de E.

e) *Se démontre de la même manière que c).*

f) *Si $\varphi \in E^{\perp}$, alors $\forall x \in E$, $\varphi(x) = 0$, donc $\varphi = 0$.*

Supposons, par absurde que $E^{*\circ} \neq \{0_E\}$, donc il existe $x \neq 0$, tel que

$$\forall \varphi \in E^*,\ \varphi(x) = 0$$

ce qui est absurde, car on sait que si $x \neq 0$, alors il existe $\varphi \in E^*$, telle que $\varphi(x) = 1$.

Proposition 1.21.

Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

i) F^* est canoniquement isomorphe à $E^*/F^\perp$.

ii) $(E/F)^*$ est canoniquement isomorphe à $F^\perp$.

Preuve

i) *Soit* $\Phi : E^* \longrightarrow F^*$ *l'application qui à chaque* $\varphi \in E^*$ *fait correspondre sa réstriction à* F.
Alors Φ *est linéaire et d'après le théorème de prolongement,* Φ *est surjective.*

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker(\Phi) &\Longleftrightarrow \forall x \in F,\ \varphi(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \varphi \in F^\perp \end{aligned}$$

Donc, $\ker(\Phi) = F^\perp$. *On sait que* $E^*/\ker(\Phi)$ *est isomorphe à* $Im(\Phi)$, *d'où le résultat.*

ii) *Soit* $s : E \longrightarrow E/F$ *la surjection canonique et soit* $\Psi : (E/F)^* \longrightarrow E^*$ *l'application définie par*

$$\forall \varphi \in (E/F)^*,\ \ \Psi(\varphi) = \varphi \circ s$$

Alors, il est clair que Ψ *est linéaire et que* Ψ *est injective.*
Pour conclure, montrons que $Im(\Psi) = F^\perp$.

$$\begin{aligned} \psi \in Im(\Psi) &\Longrightarrow \exists \varphi \in (E/F)^*\ :\ \psi = \varphi \circ s \\ &\Longrightarrow \forall x \in F,\ \ \psi(x) = \varphi(s(x)) = 0 \quad \textit{car}\ \forall x \in F,\ s(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \psi \in F^\perp \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\psi \in F^\perp$ *et soit* $\varphi : (E/F) \longrightarrow K$ *définie par*

$$\forall x \in E,\ \ \varphi(s(x)) = \psi(x)$$

Alors φ *est bien définie, car si* $s(x) = s(y)$, *alors* $x - y \in F$, *donc* $\psi(x-y) = 0$ *et par suite,* $\psi(x) = \psi(y)$, *donc* $\varphi(s(x)) = \varphi(s(y))$.
Ainsi, $\varphi \in (E/F)^*$ *et on a* $\psi = \varphi \circ s$.
Donc $\psi \in Im(\Psi)$ *et par suite,* $(E/F)^*$ *est isomorphe à* $F^\perp$.

Corollaire 1.22.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

$$\boxed{\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)}$$

Preuve

Conséquence directe du théorème précédent.

Lemme 1.23.

Soient E un K-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$ avec $x \notin F$. Aloes, il existe une forme linéaire φ sur E, telle que

$$< x, \varphi >= 1 \ \text{ et } \ \forall y \in F,\ < y, \varphi >= 0$$

Preuve
Soit G un supplémentaire de $Vect(x)+F$ dans E et soit $H=F+G$, alors $E=Vect(x)\oplus H$ et $F\subseteq H$.
Soit φ la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned}\varphi: E=Vect(x)\oplus H &\longrightarrow K\\ z=\alpha x+y &\longmapsto \varphi(x)=\alpha\end{aligned}$$

Alors $\varphi(x)=1$ et $\forall y\in F,\ \varphi(y)=0$.

Théorème 1.24.

Soient E un K-espace vectoriel. Alors,

i) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

$$\boxed{(F^{\perp})^{\circ}=F}$$

ii) Si E est de **dimension finie**, alors pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a

$$\boxed{(G^{\circ})^{\perp}=G}$$

Preuve

i) *Il est clair, par définition que $F\subseteq (F^{\perp})^{\circ}$, donc il suffit de montrer que $(F^{\perp})^{\circ}\subseteq F$.*
Pour cela, supposons, par absurde, qu'il existe $x\in E$, tel que $x\in (F^{\perp})^{\circ}$ et $x\notin F$. Donc d'après le lemme précédent, il existe $\varphi\in E^*$, telle que $\varphi(x)=1$ et $\forall y\in F,\ \varphi(y)=0$.
Ainsi, $\varphi\in F^{\perp}$ et puisque $x\in (F^{\perp})^{\circ}$, alors, par définition de l'orthogonal, on a $\varphi(x)=0$, ce qui est absurde, car $\varphi(x)=1$.

ii) *On voit facilement que $G\subseteq (G^{\circ})^{\perp}$, donc il suffit de montrer que $(G^{\circ})^{\perp}\subseteq G$.*
Pour cela, nous allons utiliser le fait que G est de dimension finie, donc il existe $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m$, tels que $G=Vect(\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m\})$.
Soit, maintenant, $\varphi\in (G^{\circ})^{\perp}$ et soit $x\in E$, tel que

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\cdots=\varphi_m(x)=0$$

Puisque $G=Vect(\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m\})$, alors $\forall\psi\in G,\ \ \psi(x)=0$, par suite $x\in G^{\circ}$ et puisque $\varphi\in (G^{\circ})^{\perp}$, alors $\varphi(x)=0$. Ainsi, nous avons montré que $\bigcap\limits_{i=1}^{m}\ker(\varphi_i)\subseteq\ker(\varphi)$, donc d'après la proposition 3.4, $\varphi\in Vect(\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m\})$.

Corollaire 1.25.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de codimension p, $p=\dim(E)-\dim(F)$, alors il existe p formes linéaires, $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_p$, linéairement indépendantes, telles que

$$\boxed{F=\bigcap_{i=1}^{p}\ker(\varphi_i)}$$

Preuve
F est de codimension p, donc $\dim(F^{\perp}) = p$. *Soit* $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ *une base de* $F^{\perp}$, *alors on aura,*

$$(F^{\perp})^{\circ} = Vect(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\})^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$$

D'aute part, d'après le théorème précédent, on a $(F^{\perp})^{\circ} = F$. *D'où le résultat.*

Remarque 1.25.1
Soient E un K-espace vectorie de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, F un sous-espace vectoriel de E de codimension p et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ les formes linéaires linéairement indépendantes, telles que $F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$.
Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $a_{ij} = \varphi_i(e_j)$, alors

$$\forall x \in E, \;\; x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Longrightarrow \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Donc $x \in F$, si et seulement si, les composantes, $x_1, x_2, \dots, x_n$, de x dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, vérifient le système (S) suivant, de p équations à n inconnues,

$$(S) \; : \; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système qui est de rang p, car $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est de rang p, s'appelle une représentation cartésienne du sous-espace vectoriel F.

Exemples
E un K-espace vectorie de dimension finie $= n$.

1. *Une droite vectorielle de E possède une représentation cartésienne sous forme d'un système de rang $n-1$ et de $n-1$ équations.*
2. *Un hyperplan de E possède une représentation cartésienne sous-forme d'une seule équation :*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \;\; avec \;\; (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

1.26 Bidual

Définition 1.27.

Soit E un K-espace vectoriel, on appelle **bidual** de E, qu'on note E^{**}, le dual de E^*.

$$\boxed{E^{**} = (E^*)^* = L(E^*, K)}$$

Remarque 1.27.1
Considèrons l'application $j : E \longrightarrow E^{**}$ définie par,

$$\forall x \in E, \, \forall \varphi \in E^*, \;\; < \varphi, j(x) > = < x, \varphi >$$

Alors, il est facile de voir que j est linéaire injective. Donc E s'identifie canoniquement à un sous-espace vectoriel de E^{**}.
En particulier, si E est de dimension finie, alors j est un isomorphisme, donc, dans ce cas, E s'identifie canoniquement à E^{**}.

Proposition 1.28.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $j : E \longrightarrow E^{**}$ l'isomorphisme canonique entre E et E^{**}. Alors

i) Pour toute base β de E, on a $j(\beta) = \beta^{**}$, où $\beta^{**} = (\beta^*)^*$ est la base duale de β^* dans E^{**}.

ii) Si γ est une base de E^*, γ^* sa base duale dans E^{**} et β est sa base préduale dans E, alors

$$\beta = j^{-1}(\gamma^*)$$

Preuve

i) *Soit $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, alors on a*

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall l \in \{1,2,\ldots,n\},\ < e_l^*, j(e_k) >=< e_k, e_l^* >= \delta_{kl}$$

Donc $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\},\ j(e_k) = (e_l^*)^*$.

ii) *Puisque $\beta^* = \gamma$, alors, d'après i), $j(\beta) = \gamma^*$, donc $\beta = j^{-1}(\gamma^*)$.*

1.29 Transposée d'une application linéaire

Définition 1.30.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle **application transposée** de f, qu'on note ${}^t f$, l'application linéaire de F^* dans E^* définie par,

$$\forall \varphi \in F^*,\ {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Remarque 1.30.1
Par définition de l'application transposée d'une application linéaire f, on a

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall \varphi \in F^*,\ < x, {}^t f(\varphi) >=< f(x), \varphi >}$$

De plus, ${}^t f$ est l'unique application linéaire de F^* vers E^* vérifiant cette relation.
En effet, soit $g : F^* \longrightarrow E^*$ une application linéaire telle que

$$\forall x \in E,\ \forall \varphi \in F^*,\ < x, g(\varphi) >=< f(x), \varphi >$$

Alors, il est clair que $\forall \varphi \in F^*$, $g(\varphi) = \varphi \circ f$, donc $g = {}^t f$.

Proposition 1.31.

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels. Alors

a) $\forall f \in L(E,F),\ \forall g \in L(E,F),\ \ {}^t(f+g) = {}^t f + {}^t g$.

b) $\forall \lambda \in K,\ \forall f \in L(E,F),\ \ {}^t(\lambda f) = \lambda\, {}^t f$.

c) $\forall f \in L(E,F),\ \forall g \in L(F,G),\ \ {}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

Preuve

a)

$$\forall \varphi \in F^*,\ {}^t(f+g)(\varphi) = \varphi \circ (f+g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g = {}^tf(\varphi) + {}^tg(\varphi)$$

Donc ${}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$.

b)

$$\forall \varphi \in F^*,\ {}^t(\lambda f)(\varphi) = \varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f) = \lambda {}^tf(\varphi)$$

Donc ${}^t(\lambda f) = \lambda {}^tf$.

c)

$$\forall \varphi \in G^*,\ {}^t(g \circ f)(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = {}^tg(\varphi) \circ f = {}^tf({}^tg(\varphi)) = ({}^tf \circ {}^tg)(\varphi)$$

Donc ${}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$.

Théorème 1.32.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,

i) $\ker({}^tf) = (Im(f))^\perp$.

ii) $Im({}^tf) = (\ker(f))^\perp$.

Preuve

i)

$$\begin{aligned}
\varphi \in \ker({}^tf) &\Longleftrightarrow {}^tf(\varphi) = 0\\
&\Longleftrightarrow \varphi \circ f = 0\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ < f(x), \varphi >= 0\\
&\Longleftrightarrow \varphi \in (Im(f))^\perp
\end{aligned}$$

ii) *Soit* $\psi \in Im({}^tf)$, *alors il existe* $\varphi \in F^*$, *telle que* $\psi = {}^tf(\varphi)$, *donc on aura,*

$$\forall x \in \ker(f),\ < x, \psi >=< x, {}^tf(\varphi) >=< f(x), \varphi >= 0$$

donc $\psi \in (\ker(f))^\perp$, *par suite,* $Im({}^tf) \subseteq (\ker(f))^\perp$.
Réciproquement, soit $\psi \in (\ker(f))^\perp$ *et soit* G *un supplémentaire de* $Im(f)$ *dans* F.
Soit $\varphi : F \longrightarrow K$ *la correspondance définie par,*

$$\begin{aligned}
\varphi : F = Im(f) \oplus G &\longrightarrow K\\
y = f(x) + z &\longmapsto \psi(x)
\end{aligned}$$

Alors ψ *définit bien une application, car si* $y = f(x) + z = f(x') + z$, *alors* $x - x' \in \ker(f)$, *donc* $\psi(x - x') = 0$ *et ainsi* $\psi(x) = \psi(x')$, *et on a*

$$\forall x \in E,\ \varphi(f(x)) = \psi(x)$$

Donc $\psi = \varphi \circ f = {}^tf(\varphi)$.

Théorème 1.33.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et β^* sa base duale. Alors pour tout endomorphisme u de E, on a

$$\boxed{Mat({}^tu, \beta^*) = {}^tMat(u, \beta)}$$

Preuve
Soient $A = Mat(u, \beta)$ *et* $B = Mat({}^t u, \beta^*)$ *avec* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *et* $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$*, alors on sait que*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2, \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* >$$

D'autre part, on a

$$\forall j \in \{1,2,\dots,n\}, \ {}^t u(e_j^*) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} e_k^*$$

Donc,

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2, \ a_{ji} =< u(e_i), e_j^* >=< e_i, {}^t u(e_j^*) >= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} < e_i, e_k^* >= b_{ij}$$

Donc $B = {}^t A$.

Proposition 1.34 (Dualité et stabilité).

Soient E un K-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors,

$$\boxed{F \text{ est stable par } u \Longleftrightarrow F^\perp \text{ est stable par } {}^t u}$$

Preuve
$(\Longrightarrow)$ *Supposons que* F *est stable par* u*. Alors pour* $\varphi \in F^\perp$*, on a*

$$\forall x \in F, < x, {}^t u(\varphi) >=< u(x), \varphi >= 0 \quad (car\ u(x) \in F \ et\ \varphi \in F^\perp)$$

Donc ${}^t u(\varphi) \in F^\perp$ *et par suite,* $F^\perp$ *est stable par* ${}^t u$.

$(\Longleftarrow)$ *Supposons que* $F^\perp$ *est stable par* ${}^t u$*. Alors pour* $x \in F$*, on a*

$$\begin{aligned} x \in F &\Longrightarrow \forall \varphi \in F^\perp, < x, {}^t u(\varphi) >= 0 \quad (car\ {}^t u(\varphi) \in F^\perp) \\ &\Longrightarrow \forall \varphi \in F^\perp, < u(x), \varphi >= 0 \\ &\Longrightarrow u(x) \in (F^\perp)^\circ \\ &\Longrightarrow u(x) \in F \quad (car,\ d'après\ le\ théorème\ 3.24,\ (F^\perp)^\circ) \end{aligned}$$

Donc F *est stable par* u.

1.35 Exercices

Exercice 1
Pour chaque entier $n \ge 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coëfficients réels de degré $\le n$. Soit φ l'application définie par,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Pour chaque $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$, soit φ_i l'application définie par,

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(\tfrac{i}{n}) \end{aligned}$$

   Montrer que $\forall i \in \{0,1,2,\dots,n\}$, φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que $(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}[X])^*$.

4. En déduire qu'il existe des réels $a_0,a_1,\dots,a_n$, tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} a_i P(\frac{i}{n})$$

Exercice 2

$E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni de sa base canonique (e_0,e_1,e_2,e_3), où $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$ et $e_3 = X^3$. Soit F la partie de E définie par,

$$P \in F \iff P(1) = 0 \text{ et } P''(0) = 0$$

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F.

b) Quelle est la dimension de F ?

c) Montrer que

$$\forall \varphi \in E^*,\ \varphi \in F^{\perp} \iff \varphi(e_0) = \varphi(e_1) = \varphi(e_3)$$

d) Soient φ_0, φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires définies sur E par,

$$\begin{cases} \varphi_0 = e_2^* \\ \varphi_1 = e_0^* + e_1^* + e_3^* \\ \varphi_2 = e_1^* - e_2^* \\ \varphi_3 = e_2^* - e_3^* \end{cases}$$

Vérifier que $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de E^* et déterminer sa base préduale (v_0,v_1,v_2,v_3).

Exercice 3

On considère les formes linéaires $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ définies sur $\mathbb{R}_3[X]$ par,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi_1(P) = P(0),\ \varphi_2(P) = P(1),\ \varphi_3(P) = P'(0) \text{ et } \varphi_4(P) = P'(1)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

a) Montrer que $\gamma = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ est une base de $(\mathbb{R}_3[X])^*$.

b) Déterminer la base préduale β de γ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi(P) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$$

Déterminer les composantes de φ dans la base γ.

Exercice 4

On désigne par (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$. Rappelons que

$$e_0 = 1,\ e_1 = X \text{ et } e_2 = X^2$$

a) Déterminer (e_0^*,e_1^*,e_2^*) la base duale de (e_0,e_1,e_2).

b) Soient a, b et c trois points deux à deux distincts de $\mathbb{C}$. On pose

$$P_1 = (X-b)(X-c), \;\; P_2 = (X-a)(X-c) \;\text{ et }\; P_3 = (X-a)(X-b)$$

Montrer (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ et trouver les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

c) Déterminer la base duale (P_1^*, P_2^*, P_3^*) de (P_1, P_2, P_3).

d) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ défini par ;

$$\forall P \in \mathbb{C}_2[X], \;\; u(P) = XP' + P$$

Déterminer ${}^t u$.

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Dans chacun des cas suivants, montrer que $\beta = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^* et déterminer sa base préduale :

a)
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \forall P \in E, \; \varphi_i(P) = P(x_i)$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

b)
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \forall P \in E, \; \varphi_i(P) = P^{(i)}(0)$$

c)
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \forall P \in E, \; \varphi_i(P) = P^{(i)}(x_i)$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Exercice 6
$E = \mathbb{K}_n[X]$ et φ une forme linéaire sur E.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$, tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \;\; \varphi((X-a)P) = 0$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $\forall P \in E, \;\; \varphi(P) = \alpha P(a)$.

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$, tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \;\; \varphi((X-a)^2 P) = 0$$

Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, tels que $\forall P \in E, \;\; \varphi(P) = \alpha P(a) + \beta P'(a)$.

Exercice 7
Soient K un corps commutatif et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $n \geq 2$, les formes linéaires de K^n définies par :

$$\forall x \in K^n, \;\; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \; \varphi_i(x) = x_i + x_{i+1} \\ \varphi_n(x) = x_1 + x_n \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de n, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ forme une base de $(K^n)^*$?
2. Dans le cas où $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ forme une base de $(K^n)^*$, déterminer sa base préduale.

Exercice 8
Pour chaque $a\mathbb{R}$, on considère la forme linéaire φ_a définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \;\; \varphi_a(P) = P(a)$$

1. Montrer que $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
2. En déduire qu'il existe des constantes α, β et γ; tels que,

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_{-1}^{1} P(t)dt = \alpha P(-1) + \beta P(0) + \gamma P(1) \quad \text{(Formule des trois niveaux)}$$

3. Déterminer la base préduale de $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$.
4. Calculer les constantes α, β et γ.

Exercice 9
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'il existe $x \in E$, tel que $\varphi(x)\psi(x) \neq 0$.

Exercice 10
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ un système de vecteurs de E, tels que,

$$\forall \varphi \in E^*, \ \varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \cdots = \varphi(e_n) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$$

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 11
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E.
On suppose qu'il existe $x \in E$, tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$.
Montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est liée.

Exercice 12
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. Montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des formes linéaires sur E, alors

i) $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \neq \{0\}$.

ii) $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$ est de codimension finie.

Exercice 13
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et p un entier ≥ 1. On suppose qu'il existe p formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, telles que

$$\forall x \in E, \ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Montrer que E est de dimension finie $\leq p$.

Exercice 14
Soient β_1 et β_2 deux bases d'un K-espace vectoriel E et soit P la matrice de passage de β_1 à β_2. Déterminer la matrice de passage Q de β_1^* à β_2^*.

Exercice 15
Soient E et F deux K-espaces vectoriels, V un sous-espace de E et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que

$$f(V)^\perp = ({}^t f)^{-1}(V^\perp)$$

Exercice 16
Soient E un K-espace vectoriel, F et G deux sous-espace vectoriels de E, tels que $E = F \oplus G$.
Montrer que

$$E^* = F^\perp \oplus G^\perp$$

CHAPITRE 2

FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES - FORMES QUADRATIQUES

2.1 Formes bilinéaires symétriques

2.1.1 Définition et propriètés élémentaires

Définition 2.2.

Soit E un K-espace vectoriel, où K est un corps commutatif quelconque.
a) On dit qu'une application $f : E \times E \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire sur E, si
i) Pour tout $y \in E$, (y fixé), l'application,

$$\begin{aligned} \varphi_y : E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \varphi_y(x) = f(x,y) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E.
ii) Pour tout $x \in E$, (x fixé), l'application,

$$\begin{aligned} \varphi_x : E &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto \varphi_x(y) = f(x,y) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E.
b) Une forme bilinéaire f sur E est dite symétrique, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \ f(y,x) = f(x,y)$$

c) Une forme bilinéaire f sur E est dite antisymétrique, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \ f(y,x) = -f(x,y)$$

Remarque 2.2.1

1. *Si f est une forme bilinéaire quelconque, alors*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \ f(x+y,x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$$

$$\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \ \forall x \in E, \forall y \in E, \ \ f(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta f(x,y)$$

2. *Si f est une forme bilinéaire symétrique, alors*

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ f(x+y,x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y)$$

3. *Si f est antisymétrique, alors*

$$\forall x \in E,\ f(x,x) = 0$$

Notations

On désigne par $\mathcal{L}_2(E)$ l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E, $\mathcal{S}_2(E)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires symétriques sur E et $\mathcal{A}_2(E)$ celui de toutes les formes bilinéaires antisymétriques sur E

Proposition 2.3.

Soit E un K-espace vectoriel quelconque, alors

i) $\mathcal{L}_2(E)$ est un K-espace vectoriel.

ii) Si K est un corps de caractéristique $\neq 2$, alors $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \bigoplus \mathcal{A}_2(E)$

Preuve

i) *Il est facile de vérifier que la somme de deux formes linéaires et la multiplication d'une forme linéaire par un scalaire sont aussi des formes linéaires, donc $\mathcal{L}_2(E)$ est un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel de toutes les applications de $E \times E$ vers K.*

ii) *Remarquons d'abord que si K est un corps de caractéristique $= 2$, alors $1_K = -1_K$, donc dans ce cas $\mathcal{S}_2(E) = \mathcal{A}_2(E)$.*

Supposons, maintenant que K est un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit f une forme bilinéaire qui est à la fois symétrique et antisymétrique, alors on aura

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = f(y,x) \ \text{ et } \ f(x,y) = -f(y,x)$$

Donc $\forall (x,y) \in E \times E,\ 2_K f(x,y) = 0_K$, puisque $2_K \neq 0_K$, alors on a,

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = 0_K$$

Donc $\mathcal{S}_2(E) \bigcap \mathcal{A}_2(E) = \{0\}$.

Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$ et soient g et h les applications de $E \times E$ vers K définies par

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ g(x,y) = \frac{f(x,y) + f(y,x)}{2} \ \text{ et } \ h(x,y) = \frac{f(x,y) - f(y,x)}{2}$$

Alors, il est facile de vérifier que g est bilinéaire symétrique, que h est bilinéaire antisymétrique et que $f = g + h$. Donc $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) + \mathcal{A}_2(E)$.

Dans toute la suite, sauf indication du contraire, on suppose que K est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$.

2.3.1 Matrice d'une forme bilinéaire

Définition 2.4.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de f par rapport à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, si

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2,\ a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

Remarque 2.4.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. *Si f est une forme bilinéaire, alors $A = (f(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de f par rapport à la base β.*
2. *Réciproquement, soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K et soit $f : E\times E \longrightarrow K$, l'application définie par :*
$$\forall (x,y) \in E\times E,\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$
où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_je_j$, alors f définit une forme bilinéaire sur E, dont la matrice par rapport à la base β est égale à A.
Signalons que l'expression, ci-dessus, de $f(x,y)$ peut aussi s'écrire sous la forme :
$$f(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j$$
ou encore sous la forme :
$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2} a_{ij}x_iy_j \qquad (\text{où } \mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\})$$
3. *Si f est une forme bilinéaire sur E et si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de f par rapport à la base β, alors*

   i) *f est symétrique $\Longleftrightarrow {}^tA = A$.*
   (où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A).
   Donc, si f est symétrique, alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $a_{ij} = a_{ji}$, par suite, dans ce cas, l'expression de $f(x,y)$ s'écrit sous la forme :
$$\boxed{f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_iy_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}(x_iy_j + x_jy_i)}$$
   Donc, en particulier, si f est symétrique, alors,
$$\boxed{\forall x\in E,\ f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j}$$
   ii) *f est antisymétrique $\Longleftrightarrow {}^tA = -A$.*

2.4.1 Ecriture matricielle

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, $f : E\times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à la base β.
Pour chaque $x\in E$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$, on pose
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{donc } {}^tX = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
Alors f possède une expression matricielle sous la forme :
$$\boxed{\forall (x,y)\in E\times E,\ f(x,y) = {}^tXAY}$$

2.4.2 Changement de base

Proposition 2.5.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E, f une forme bilinéaire sur E, A et B sont respectivement les matrices de f par rapport aux bases β et β'. Soit P la matrice de passage de la base β à la base β', alors on a

$$\boxed{B = {}^tPAP}$$

Preuve

En utilisant l'écriture matricielle par rapport aux bases β et β', on aura

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = {}^tXAY = {}^tX'BY'$$

avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ *et* $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i e'_i$.
Soit P la matrice de passage de la base β à la base β', alors on sait que $X = PX'$ et $Y = PY'$.
Par suite, on aura

$$\begin{aligned} {}^tXAY &= {}^t(PX')A(PY') \\ &= {}^tX'{}^tPAPY' \\ &= {}^tX'({}^tPAP)Y' \quad \textit{(Rappelons que la multiplication des matrices est associative)} \end{aligned}$$

Donc $\forall X' \in K^n, \forall Y' \in K^n,\ {}^tX'BY' = {}^tX'({}^tPAP)Y'$, *donc* $B = {}^tPAP$.

2.5.1 Rang d'une forme bilinéaire

Rappelons que deux matrices carrées A et B sont dites équivalentes, s'il existe deux matrices inversibles P et Q, telles que $B = QAP$. Rappelons aussi que deux matrices sont équivalentes, si et seulement si, elles ont le même rang.

Définition 2.6.

Soit K un corps commutatif. Deux matrices carrées A et B à coefficients dans K sont dites **congruentes**, s'il existe une matrice inversible P, tel que $B = {}^tPAP$.

Remarque 2.6.1

1. *Deux matrices sont donc congruentes, si elles représentent la même forme bilinéaire par rapport à deux bases de E.*
2. *Deux matrices congruentes sont équivalentes, donc deux matrices congruentes ont même rang. Ainsi, la définition suivante est justifiée :*

Définition 2.7.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $f : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à la base β. On définit le rang de f, noté $rg(f)$, par :

$$\boxed{rg(f) = rg(A)}$$

2.7.1 Formes bilinéaires symétriques non dégénérées

Définition 2.8.

Soient E un K-espace vectoriel quelconque et f une forme bilinéaire symétrique sur E. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ définie par :

$$\forall y \in E,\ \Phi(y) = \varphi_y \ \text{ où } \ \forall x \in E,\ \varphi_y(x) = f(x,y)$$

Si Φ est injective, on dit que f est non **dégénérée**.

Remarque 2.8.1
D'après la définition précédente, f est non dégénérée, si et seulement si, pour tout $y \in E$, on a

$$\boxed{[\forall x \in E,\ f(x,y) = 0] \Longrightarrow y = 0}$$

Cela signifie que si pour un certain $y \in E$, on a $f(x,y) = 0$ pour tout $x \in E$, alors nécessairement, on a $y = 0$.

Proposition 2.9.

Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie**, β une base de E, f une forme bilinéaire symétrique sur E et A la matrice de f par rapport à la base β. Alors,

$$\boxed{[f \text{ est non dégénérée}] \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0}$$

Preuve
On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ qui à chaque y fait correspondre φ_y.
Posons $\beta = (e_1, e_2 \ldots, e_n)$ et $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de β.
Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de Φ par rapport aux bases β et β^*, alors on a

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,n\},\ \Phi(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} e_k^*$$

Donc pour chaque $i \in \{1,2\ldots,n\}$ et pour chaque $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a

$$f(e_i,e_j) = \Phi(e_j)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} e_k^*(e_i) = m_{ij} \quad (car\ e_k^*(e_i) = \delta_{ik})$$

On en déduit donc que $M = A$. Ainsi, on aura,

$$\begin{aligned}
f \textit{ est non dégénérée} &\Longleftrightarrow \Phi \textit{ est injective} \quad \textit{(par définition)}\\
&\Longleftrightarrow \Phi \textit{ est bijective} \quad \textit{(car } E \textit{ et } E^* \textit{ ont même dimension)}\\
&\Longleftrightarrow \det(M) \neq 0\\
&\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \quad \textit{(car } M = A\textit{)}
\end{aligned}$$

2.9.1 Orthogonalité

Définition 2.10.

Soient E un K-espace vectoriel quelconque, f une forme bilinéaire symétrique sur E. Soit A une partie non vide de E, on définit l'orthogonale de A, par rapport à la forme binéaire f, noté $A^{\perp}$, par :

$$\boxed{\forall y \in E,\ y \in A^{\perp} \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ f(x,y) = 0}$$

Remarque 2.10.1

1. *Pour chaque $x \in E$, soit $\varphi_x \in E^*$ définie par :*

$$\forall y \in E,\ \varphi_x(y) = f(x,y)$$

   Soit A une partie non vive de E, alors on voit facilement que

$$\forall y \in E,\ y \in A^{\perp} \Longleftrightarrow y \in \bigcap_{x\in A} \ker(\varphi_x)$$

   On en déduit , donc, que $A^{\perp} = \bigcap\limits_{x\in A} \ker(\varphi_x)$. Donc pour toute partie non vide A de E, même si A n'est pas un sous-espace vectoriel de E, $A^{\perp}$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.

2. *Soient A et B deux parties non vides de E, telles que $A \subseteq B$, alors $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.*
3. *Pour toute partie non vide A de E, on a $A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$.*
   En effet, on a $A \subseteq Vect(A)$, donc, d'après la remarque précédente, on a $Vect(A)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
   Soit $y \in A^{\perp}$, a-t-on $y \in Vect(A)^{\perp}$?
   Soit $x \in Vect(A)$, alors, par définition, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_m$ éléments de A et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans K, tels que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$. Donc on aura,

$$f(x,y) = \alpha_1 f(x_1,y) + \alpha_2 f(x_2,y) + \cdots + \alpha_m f(x_m,y) = 0 \quad (car\ \forall i \in \{1,2,\ldots,m\},\ f(x_i,y) = 0)$$

4. *D'après la remarque précédente, on pose, par covention,*

$$\emptyset^{\perp} = Vect(\emptyset)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$$

Proposition 2.11.

Soient E un K espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique sur E, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

i) $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) \geq \dim(E)$.

ii) Si de plus f **est non dégénérée**, alors on a $\boxed{\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)}$.

Preuve

On considère l'application $\Psi : E \longrightarrow F^*$ définie par :

$$\forall y \in E,\ \forall x \in F,\ \ \Psi(y)(x) = f(x,y)$$

Alors, il est clair que Ψ est linéaire et que $\ker(\Psi) = F^{\perp}$.

i) *D'après le théorème du rang, on a* $\dim(\ker(\Psi)) + \dim(Im(\Psi)) = \dim(E)$.

On a aussi $Im(\Psi) \subseteq F^*$, *donc* $\dim(Im(\Psi)) \leq \dim(F^*)$ *avec* $\dim(F^*) = \dim(F)$, *donc*

$$\dim(F^\perp) + \dim(F) \geq \dim(E)$$

ii) *Supposons maintenant que f est non dégénérée et montrons que $Im(\Psi) = F^*$.*

Soit $\varphi \in F^*$, existe-t-il $y \in E$, tel que $\Psi(y) = \varphi$?

$\varphi \in F^*$, donc, d'après le théorème de prolongement des formes linéaires, il existe $\psi \in E^*$, telle que

$$\forall x \in F,\ \psi(x) = \varphi(x)$$

Or f est non dégénérée et E de dimension finie, donc l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$, où $\forall z \in E,\ \forall x \in E,\ \Phi(z)(x) = f(x,z)$, est bijective.

Donc, il existe $z \in E$, tel que $\Phi(z) = \psi$, donc on aura,

$$\forall x \in F,\ \Psi(z)(x) = f(x,z) = \Phi(z)(x) = \psi(x) = \varphi(x)$$

Donc $\Psi(z) = \varphi$. Par suite Ψ est surjective et ainsi $Im(\Psi) = F^*$.

D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E)$$

Corollaire 2.12.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique **non dégénérée** sur E. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

$$\boxed{F^{\perp\perp} = F}$$

Preuve

Puisque f est non dégénérée, alors on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(F^\perp) + \dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E)$$

Donc, $\dim(F^\perp) = \dim(F^{\perp\perp})$, *et puisque F est toujours un sous-espace vectoriel de $F^{\perp\perp}$, alors*

$$F = F^{\perp\perp}$$

Remarque 2.12.1

1. *En fait, si f est une forme bilinéaire symétrique quelconque sur E, où E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a*

$$\boxed{F^{\perp\perp} = F + N}$$

où $N = E^\perp = \{y \in E : \forall x \in E,\ f(x,y) = 0\}$ s'appelle le noyau de f. (Voir exercices)

2. *Si f est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, où E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a*

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

Par contre, même si f est non dégénérée, on a pas toujours $E = F \oplus F^\perp$.

Par exemle, on prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de la forme bilinéaire f définie par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$$

où $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$.
Soient (e_1,e_2) la base canonique de E et $A=Mat(f,(e_1,e_2))$, alors on a

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Donc $\det(A)=-1\neq 0$, par suite f est non dégénérée.
Soit $F=Vect(e_1+e_2)$ et soit $y\in E$, avec $y=(y_1,y_2)$, alors on a

$$\begin{aligned} y\in F^{\perp} &\iff f(e_1+e_2,y)=0 \quad (car\ Vect(e_1+e_2)^{\perp}=\{e_1+e_2\}^{\perp})\\ &\iff y_1-y_2=0\\ &\iff y\in F\end{aligned}$$

Donc $F^{\perp}=F$.

Définition 2.13.

Soient E un K-espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E.

i) On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, si $f(x,y)=0$.

ii) On dit qu'un vecteur $x\in E$ est **isotrope**, si $f(x,x)=0$.

iii) Un sous-espace vetoriel F de E est dit **isotrope**, si $F\cap F^{\perp}\neq\{0\}$.

iv) Un sous-espace vetoriel F de E est dit **totalement isotrope**, si $F\subseteq F^{\perp}$.

Remarque 2.13.1
Soit $I=\{x\in E\ :\ f(x,x)=0\}$ l'ensemble des vecteurs isotropes de E, alors on a

a) $0\in I$.

b) $\forall\lambda\in K,\forall x\in I,\ \lambda x\in I$.

Par contre I n'est pas stable pour l'addition.
Par exemple, si on prend $E=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$, $x=e_1+e_2$ et $y=e_1-e_2$, alors on aura,

$$f(x,x)=f(y,y)=0\ \ et\ \ f(x+y,x+y)=2$$

Théorème 2.14.

Soient E un K-espace vectoriel quelconque, f une forme bilinéaire symétrique sur E et F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors

$$\boxed{E=F\oplus F^{\perp}\iff F\text{ est non isotrope}}$$

Preuve
$(\Longrightarrow)$ *Trivial.*

$(\Longleftarrow)$ *Supposons que F est non isotrope, donc $F\cap F^{\perp}=\{0\}$. Or on sait que*

$$E=F\oplus F^{\perp}\iff\begin{cases}F\cap F^{\perp}=\{0\}\\ et\\ F+F^{\perp}=E\end{cases}$$

Il suffit donc de montrer que $F + F^{\perp} = E$. Pour cela, on considère l'application $g : F \times F \longrightarrow K$ définie par :

$$\forall (x,y) \in F \times F,\ g(x,y) = f(x,y)$$

Alors g est une forme bilinéaire symétrique sur F.
Soit $y \in F$, tel que $\forall x \in F,\ g(x,y) = 0$, alors $y \in F \cap F^{\perp}$, donc $y = 0$, car F est non isotrope. Par suite, g est non dégénérée.
Soit maintenant $y \in E$, montrons qu'il existe $(y_1, y_2) \in F \times F^{\perp}$, tel que $y = y_1 + y_2$. Pour cela, on considère la forme linéaire φ_y définie sur F par :

$$\forall x \in F,\ \varphi_y(x) = f(x,y)$$

Puisque g est non dégénérée et F de dimension finie, alors l'application $\Psi : F \longrightarrow F^*$ définie par :

$$\forall z \in F,\ \forall x \in F,\ \ \Psi(z)(x) = g(x,z)$$

est bijective. Puisque $\varphi_y \in F^*$, alors il existe $y_1 \in F$, tel que $\Psi(y_1) = \varphi_y$.
Montrons que $y - y_1 \in F^{\perp}$. Pour cela, soit $x \in F$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x, y - y_1) &= f(x,y) - f(x,y_1) \\ &= f(x,y) - g(x,y_1) \quad (\textit{car } (x,y_1) \in F \times F) \\ &= \varphi_y(x) - \Psi(y_1)(x) = 0 \quad (\textit{car } \Psi(y_1) = \varphi_y) \end{aligned}$$

Donc $y - y_1 \in F^{\perp}$. Posons $y_2 = y - y_1$, alors $y = y_1 + y_2$ avec $(y_1, y_2) \in F \times F^{\perp}$.

2.14.1 Bases orthogonales

Définition 2.15.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit qu'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est **orthogonale**, si

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\},\ i \neq j \Longrightarrow f(e_i, e_j) = 0$$

Remarque 2.15.1
Supposons que E possède une base orthogonale $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de f par rapport à β, donc pour $i \neq j$, on a $a_{ij} = f(e_i, e_j) = 0$. Donc A est une matrice diagonale et on a pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i$$

Donc, en particulier, pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

Dans la suite on se propose de montrer que toute forme bilinéaire symétrique possède au moins une base orthogonale.

Lemme 2.16.

Soient E un K-espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors

$$\boxed{f \text{ est identiquement nulle} \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x,x) = 0}$$

Preuve

($\Longrightarrow$) *Trivial.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que pour tout $x \in E$, $f(x,x) = 0$ et montrons que f est identiquement nulle.*
Soient $(x,y) \in E \times E$, alors on a $f(x+y,x+y) = 0$.
On a aussi $f(x+y,x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y) = 2f(x,y)$, donc $f(x,y) = 0$, car K est un corps de caractéristique $\neq 2$.

Théorème 2.17.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors toute forme bilinéaire symétrique f sur E, possède au moins une base orthogonale.

Preuve

Si f est identiquement nulle, alors toute base de E est orthogonale.
On peut donc supposer que $f \neq 0$, donc d'après le lemme précédent, il existe au moins un $x_0 \in E$, tel que $f(x_0,x_0) \neq 0$.
Posons $F = Vect(x_0)$, puisque $f(x_0,x_0) \neq 0$ alors F est non isotrope, donc

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Donc pour montrer l'existence d'une base orthogonale, nous somme amenés à procèder par récurrence sur $n = \dim(E)$, avec $n \geq 2$.
Pour $n = 2$, soient $e_1 = x_0$ et e_2 un vecteur quelcoque de $F^{\perp}$, avec $e_2 \neq 0$, alors (e_1,e_2) est une base orthogonale de E.
H.R "Supposons que $n > 2$ et que toute forme bilinéaire symétrique sur un K-espace vectoriel de dimension $< n$, possède aumoins une base orthogonale".
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et soit g la réstriction de f à $F^{\perp} \times F^{\perp}$, alors g est une forme bilinéaire symétrique sur $F^{\perp}$, avec $\dim(F^{\perp}) = n-1$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $F^{\perp}$ possède au moins une base orthogonale $(e_1,\ldots,e_{n-1})$. On déduit donc que $(e_1,\ldots,e_{n-1},x_0)$ est une base orthogonale de E.

2.18 Formes quadratiques

2.18.1 Définition et propriètés élémentaires

Définition 2.19.

Soit E un K-espace vectoriel. On dit qu'une application $q : E \longrightarrow K$ est une **forme quadratique** sur E, s'il existe une forme bilinéaire f, telle que

$$\forall x \in E,\ q(x) = f(x,x)$$

Exemples
Si f est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors l'application $q : E \longrightarrow K$ définie par :

$$\forall x \in E,\; q(x) = f(x,x)$$

est une forme quadratique sur E, appelée forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique f.
Réciproquement, à toute forme quadratique, on peut associer une forme binéaire symétrique unique, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.20.

Soient E un K-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une forme bilinéaire symétrique unique f sur E, telle que

$$\forall x \in E,\; q(x) = f(x,x)$$

Dans ce cas, f s'appelle la forme polaire associée à la forme quadratique q et on a la relation suivante :

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\; f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))}$$

Preuve
q est une forme quadratique sur E, donc, par définition, il existe une forme bilinéaire g sur E, telle que

$$\forall x \in E,\; q(x) = g(x,x)$$

Soit $f : E \times E \longrightarrow K$ l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in E \times E,\; f(x,y) = \frac{g(x,y) + g(y,x)}{2}$$

Alors f est une forme bilinéaire symétrique sur E et on a

$$\forall x \in E,\; f(x,x) = \frac{g(x,x) + g(x,x)}{2} = g(x,x) = q(x)$$

Puuisque f est symétrique, alors

$$\forall (x,y) \in E \times E,\; q(x+y) = f(x+y,x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y) = q(x) + 2f(x,y) + q(y)$$

donc

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\; f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Cette relation entre q et f assure l'unicité de f.

Remarque 2.20.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E et f la forme polaire associée à q.

1. *Soit β une base de E et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de f par rapport à la base β.*
   Alors A s'appelle aussi la matrice de q par rapport à β et on a

$$\boxed{\forall x \in E,\; q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j}$$

2. *Puisque f est symétrique, alors f possède au moins une base orthogonale β.*
   β s'appelle aussi une base q-orthogonale et q s'écrit, par rapport à cette base, sous la forme réduite suivante :

$$\boxed{\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2}$$

3. *Le rang d'une forme quadratique est défini comme étant le rang de sa forme pôlaire associée.*

Théorème 2.21.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et q une forme quadratique sur E de rang r. Alors il existe des formes linéaires $l_1, l_2, \dots, l_r$, linéairement indépendantes et il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, non nuls, tels que

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i l_i(x)^2$$

Preuve

Fixons une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, alors pour chaque $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

D'après le théorème 1.17, q possède au moins une base q-orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Soit A la matrice de q par rapport à cette base, donc A est une matrice diagonale de rang r, par suite le nombre des coefficients diagonaux non nuls est égal à r. Donc quitte à réordonner les vecteurs de la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, on peut supposer que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, r\},\ a_{ii} \neq 0$$

Donc pour chaque $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i^2 \quad \text{où } \forall i \in \{1, 2, \dots, r\},\ \lambda_i = a_{ii}$$

Soit $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors on sait que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\},\ X_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j$$

Soit $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors, par définition, on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\},\ x_j = e_j^*(x)$$

Donc si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $l_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j^*$, alors $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ est une base de E^*, car $\det_{\beta^*}(l_1, l_2, \dots, l_n) \neq 0$, donc $(l_1, l_2, \dots, l_r)$ est libre et on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, r\},\ X_i = l_i(x)$$

2.21.1 Méthode de Gauss pour la réduction d'une forme quadratique

Cas de deux dimensions

Soient E un K-espace vectoriel de dimension $= 2$, (e_1, e_2) une base de E et q une forme quadratique sur E, alors pour chaque $x \in E$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2$, on a

$$q(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$$

i) Si $(a,b) \neq (0,0)$, alors on peut supposer, par exemple, que $a \neq 0$, puis on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q(x) &= ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 \\ &= a[x_1^2 + \frac{2c}{a}x_1x_2] + bx_2^2 \\ &= a[(x_1 + \frac{c}{a}x_2)^2 - \frac{c^2}{a^2}x_2^2] + bx_2^2 \\ &= a(x_1 + \frac{c}{a}x_2)^2 + (b - \frac{c^2}{a})x_2^2 \end{aligned}$$

Donc, si on pose $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b - \frac{c^2}{a^2}$, $l_1(x) = x_1 + \frac{c}{a}x_2$ et $l_2(x) = x_2$, alors on aura

$$q(x) = \lambda_1 l_1(x)^2 + \lambda_2 l_2(x)^2 = \lambda_1(x_1 + \frac{c}{a}x_2)^2 + \lambda_2 x_2^2$$

Donc, dans ce cas, une base q-orthogonale (v_1, v_2) a pour matrice de passage par rapport à la base (e_1, e_2), la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $v_1 = e_1$ et $v_2 = -\frac{c}{a}e_1 + e_2$.

ii) Si $a = 0$ et $b = 0$, alors q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = 2cx_1x_2 = \frac{c}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{c}{2}(x_1 - x_2)^2$$

(car $\forall a \in K, \forall b \in K,\ ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$)
Donc, si on pose $\lambda_1 = \frac{c}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{c}{2}$, $l_1(x) = x_1 + x_2$ et $l_2(x) = x_1 - x_2$, alors on aura

$$q(x) = \lambda_1 l_1(x)^2 + \lambda_2 l_2(x)^2 = \lambda_1(x_1 + x_2)^2 + \lambda_2(x_1 - x_2)^2$$

Ainsi une base q-orthogonale a pour matrice de passage par rapport à la base (e_1, e_2), la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ et $v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$.

Cas de la dimension 3

Soient E un K-espace vectoriel de dimension 3, $(e_{1,2}, e_3)$ une base de E et $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors pour tout $x \in E$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, on a

$$q(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3$$

i) Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, alors on peut supposer par exemple que $a \neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1, on aura,

$$\begin{aligned}
q(x) &= (ax_1^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3) + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 \\
&= a\left[x_1^2 + 2(\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)x_1\right] + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 \\
&= a\left[(x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)^2 - (\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)^2\right] + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 \\
&= a(x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)^2 + Q(x_2,x_3)
\end{aligned}$$

où Q est une forme quadratique en (x_2,x_3). Donc pour achever la décomposition de q, il suffit de décomposer Q qui peut-être considérée comme une forme quadratique sur un K-espace vectoriel de dimension 2.

ii) Si $a = b = c = 0$, alors q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = \alpha x_1x_2 + \beta x_1x_3 + \gamma x_2x_3 \quad \text{avec } (\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$$

En supposant, par exemple, que $\alpha \neq 0$, on peut procèder de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
q(x) &= \alpha\left(x_1x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_1x_3 + \frac{\gamma}{\alpha}x_2x_3\right) \\
&= \alpha\left[\left(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha}x_3\right)\left(x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_3\right) - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}x_3^2\right] \\
&= \alpha\left[\frac{1}{4}\left(\left(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha}x_3\right) + \left(x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_3\right)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\left(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha}x_3\right) - \left(x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_3\right)\right)^2 - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}x_3^2\right] \\
&= \alpha\left[\frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha}x_3\right)^2 - \frac{1}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{\gamma-\beta}{\alpha}x_3\right)^2 - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}x_3^2\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha}x_3\right)^2 - \frac{\alpha}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{\gamma-\beta}{\alpha}x_3\right)^2 - \frac{\beta\gamma}{\alpha}x_3^2 \\
&= aX_1^2 + bX_2^2 + cX_3^2
\end{aligned}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} a = \frac{\alpha}{4} \\ b = -\frac{\alpha}{4} \\ c = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha}x_3 \\ X_2 = x_1 - x_2 + \frac{\gamma-\beta}{\alpha}x_3 \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{\beta+\gamma}{\alpha} \\ 1 & -1 & \frac{\beta-\gamma}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, une une base q-orthogonale (v_1,v_2,v_3) est définie par sa matrice de passage Q de la base (e_1,e_2,e_3) à la base (v_1,v_2,v_3), où $\boxed{Q = P^{-1}}$.

Le cas général

Soient E un K-espace vectoriel de dimension fine $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique non nulle. Alors on sait q s'écrit sous la forme :

$$\forall x \in E,\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Longrightarrow q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

Nous allons procéder par récurrence sur n, en distinguant deux cas :

i) Il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $a_{i_0} \neq 0$, alors quitte à réordonner les a_i, on peut supposer que $a_1 \neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1, (si à la place de a_1 on prend a_{i_0}, on doit regrouper tous les termes contenant x_{i_0}), on aura,

$$\begin{aligned}
q(x) &= a_1 x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_1 x_j + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \\
&= a_1 \left[x_1^2 + 2 \left(\sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j \right) x_1 \right] + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{où } \forall j \in \{2, \dots, n\},\; \alpha_j = \frac{a_{1j}}{a_1} \\
&= a_1 \left[\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j \right)^2 \right] + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \\
&= a_1 \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j \right)^2 + Q(x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

où

$$Q(x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j - \left(\sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j \right)^2$$

est une forme quadratque en $x_2, x_3, \dots, x_n$, donc on peut considérer Q comme une forme quadratique sur un K-espace vectoriel de dmension $n-1$ et on applique, alors, l'hypothèse de récurrence à Q.

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i = 0$, alors, dans ce cas, q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

$q \neq 0$, donc l'un au moins des coefficients α_{ij} est non nul, donc pour simplifier on peut supposer que $\alpha_{12} \neq 0$, puis on regroupe tous les termes contenant x_1 et tous les termes contenant x_2. Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
q(x) &= \left[\alpha_{12} x_1 x_2 + \left(\sum_{j=3}^{n} \alpha_{1j} x_j \right) x_1 + \left(\sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j} x_j \right) x_2 \right] + \sum_{3 \le i < j \le n} \alpha_{ij} x_i x_j \\
&= \alpha_{12} \left[x_1 x_2 + \left(\sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right) x_1 + \left(\sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}} x_j \right) x_2 \right] + \sum_{3 \le i < j \le n} \alpha_{ij} x_i x_j \\
&= \alpha_{12} \left[\left(x_1 + \sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}} x_j \right) \left(x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right) - \left(\sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right) \left(\sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}} x_j \right) \right] + \sum_{3 \le i < j \le n} \alpha_{ij} x_i x_j \\
&= \alpha_{12} \left(x_1 + \sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}} x_j \right) \left(x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right) + Q(x_3, \dots, x_n) \\
&= \frac{\alpha_{12}}{4} \left(x_1 + x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{2j} + \alpha_{1j}}{\alpha_{12}} xj \right)^2 - \frac{\alpha_{12}}{4} \left(x_1 - x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{\alpha_{2j} - \alpha_{1j}}{\alpha_{12}} xj \right)^2 + Q(x_3, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

On achève la décompositon en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q.

Exemples

1. *Soit q la forme quadratique définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz$$

Déterminons une base q-orthogonale. Pour cela, décomposons q sous forme de carrés.

$$\begin{aligned}
q(x) &= x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz \\
&= (x^2 - 4xy + 6xz) + 6y^2 + 16z^2 - 16yz \\
&= [x^2 - 2x(2y - 3z)] + 6y^2 + 16z^2 - 16yz \\
&= [(x - (2y - 3z))^2 - (2y - 3z)^2] + 6y^2 + 16z^2 - 16yz \\
&= (x - 2y + 3z)^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2 + 6y^2 + 16z^2 - 16yz \\
&= (x - 2y + 3z)^2 + 2y^2 + 7z^2 - 4yz \\
&= (x - 2y + 3z)^2 + 2(y^2 - 2yz) + 7z^2 \\
&= (x - 2y + 3z)^2 + 2[(y - z)^2 - z^2] + 7z^2 \\
&= (x - 2y + 3z)^2 + 2(y - z)^2 + 5z^2
\end{aligned}$$

Donc pour déterminer une base q-orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X = x - 2y + 3z \\ Y = y - z \\ Z = z \end{cases} \quad \textit{donc} \quad \begin{cases} x = X + 2Y - Z \\ y = Y + Z \\ z = Z \end{cases}$$

Donc une base q-orthogonale (v_1, v_2, v_3) *est déterminée par sa matrice de passage P de la base* (e_1, e_2, e_3) *à la base* (v_1, v_2, v_3) *:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = 2e_1 + e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

2. *Mettre sous forme de carrés la forme quadratique de* $\mathbb{R}^4$ *définie par :*

$$q(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx$$

puis déterminer une base q-orthogonale.

$$\begin{aligned}
q(x,y,z,t) &= xy + yz + zt + tx \\
&= (x + z)(y + t) \\
&= \frac{1}{4}(x + y + z + t)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z - t)^2 \\
&= \frac{1}{4}(x + y + z + t)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z - t)^2 + 0z^2 + 0t^2
\end{aligned}$$

Donc, pour obtenir une base q-orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X = x+y+z+t \\ Y = x-y+z-t \\ Z = z \\ T = t \end{cases}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - Z \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - T \\ z = Z \\ t = T \end{cases}$$

Une base q-orthogonale est détermnée par la matrice de passage P, défine par :

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, si on pose

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ v_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_3 \\ v_4 = -e_2 + e_4 \end{cases}$$

Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) *est une base q-orthogonale.*

3. *Mettre sous forme de carrés la forme quadratique sur* $\mathbb{R}^4$ *définie par :*

$$q(x,y,z,t) = xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$$

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= xy + xz + xt - yz + yt + 2zt \\ &= q(x,y,z,t) = (xy + xz + xt - yz + yt) + 2zt \quad \textit{(regroupement des termes en x et ceux en y)} \\ &= [xy + x(z+t) + y(t-z)] + 2zt \\ &= [(x+(t-z))(y+(z+t)) - (t-z)(t+z)] + 2zt \\ &= \frac{1}{4}\left[(x+y+2t)^2 - (x-y-2z)^2\right] - (t-z)(t+z) + 2zt \\ &= \frac{1}{4}(x+y+2t)^2 - \frac{1}{4}(x-y-2z)^2 + (z^2 + 2zt) - t^2 \\ &= \frac{1}{4}(x+y+2t)^2 - \frac{1}{4}(x-y-2z)^2 + (z+t)^2 - 2t^2 \end{aligned}$$

Donc, pour obtenir une base q-orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X = x+y+2t \\ Y = x-t-2z \\ Z = z+t \\ T = t \end{cases}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y + Z - 2T \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - Z \\ z = Z - T \\ t = T \end{cases}$$

Donc une base q-orthogonale est détermnée par la matrice de passage P, défine par :

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, si on pose

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ v_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ v_3 = e_1 - e_2 + e_3 \\ v_4 = -2e_1 - e_3 + e_4 \end{cases}$$

alors, (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base q-orthogonale.

2.22 Signature d'une forme bilinéaire symétrique

2.22.1 bases orthonormales

Définition 2.23.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forme bilinéaire stmétrque sur E. Une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E, si

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2,\ f(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarque 2.23.1

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forma bilnéaire symétrique sur E. On suppoose que f possède une base orthonormale β, alors la matrice de f par rapport à β est égale à la matrice identité, donc f est non dégénérée. La condition f non dégénérée est donc une condition nécessaire pour l'existence d'une base orthonormale.
Nous allons voir par la suite que cette conditon n'est pas toujours suffisante.

Proposition 2.24.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$. Alors toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, possède au moins une base orthonormale.

Preuve

On sait que toute forme bilinéaire symétrique sur un K-espace vectoriel de dimension finie , possède au moins une base orthogonale.

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E et soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthogonale de f. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $\alpha_i = f(v_i, v_i)$, puisque $\mathbb{C}$ est algèbrequement clos, alors le polynôme $X^2 - \alpha_i$ possède au moins une racine $a_i \in \mathbb{C}$, donc $a_i^2 = \alpha_i$.
Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons $e_i = \frac{1}{a_i} v_i$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et on a

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\},\ f(e_i, e_j) = \frac{1}{a_i a_j} f(v_i, v_j) = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{a_i^2} = 1 & si\ \ i = j \\ 0 & si\ \ i \neq j \end{cases}$$

Donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormale.

Proposition 2.25.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E. Alors f possède une base orthonormale, si, et seulement si,

$$\forall x \in E,\ x \neq 0 \Longrightarrow f(x, x) > 0$$

Preuve

($\Longrightarrow$) *Supposons que f possède une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, donc pour chaque $x \in E$, avec $x \neq 0$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a*

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$

($\Longleftarrow$) *Supposons que $\forall x \in E,\ x \neq 0 \Longrightarrow f(x, x) > 0$ et soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthogonale de f, donc $\forall \in \{1, 2, \dots, n\},\ f(v_i, v_i) > 0$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $a_i = \sqrt{f(v_i, v_i)}$ et soit $e_i = \dfrac{1}{a_i} v_i$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de f.*

2.25.1 Théorème d'inertie de Sylvestre

Théorème 2.26.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme bilinéaire symétrique sur E de rang r et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E.
Soit p le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(e_i, e_i) > 0$ et soit q le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(e_i, e_i) < 0$. Alors le couple (p, q) ne dépend pas de la base orthogonale choisie et on a $p + q = r$.
Dans ce cas, (p, q) s'appelle la signature de f.

Preuve

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une autre base orthogonale de E et soient p' le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(v_i, v_i) > 0$ et q' le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(v_i, v_i) < 0$. Pour simplfier, quitte à réordonner les éléments des deux bases, on peut supposer que $f(e_i, e_i) > 0$ pour $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et $f(v_i, v_i) > 0$ pour $i \in \{1, 2, \dots, p'\}$. Puisque f est de rang r et puisque la matrice M de f par rapport à une base orthogonale est une matrice diagonale, alors le nombre des éléments diagonaux non nuls de M est égal à r, car $rg(A) = rg(f) = r$, on en déduit donc que $p + q = p' + q' = r$.
Montrons maintenant que $p = p'$ et $q = q'$, pour cela, considèrons le système $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_p, v_{p'+1}, \dots, v_n)$

et montrons que ce système est libre.
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{n-p'}$ *des nombres réels, tels que*

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 v_{p'+1} + \cdots + \beta_{n-p'} v_n = 0$$

Posons $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p = -(\beta_1 v_{p'+1} + \cdots + \beta_{n-p'} v_n)$*, alors, d'une part, on a*

$$f(x,x) = \alpha_1^2 f(e_1,e_1) + \cdots + \alpha_p^2 f(e_p,e_p) \geq 0$$

et d'autre part, on a

$$f(x,x) = \beta_1^2 f(v_{p'+1}, v_{p'+1}) + \cdots + \beta_{n-p'}^2 f(v_n,v_n) \leq 0$$

Donc on en déduit que $f(x,x) = 0$ *et puisque* $f(e_i,e_i) > 0$*, pour* $i \in \{1,2,\dots,p\}$*, alors*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

Donc $\beta_1 = \cdots = \beta_{n-p'} = 0$*, car* $(v_{p'+1}, \dots, v_n)$ *est libre.*
Le système $\mathcal{S}$ *est donc libre, donc le nombre d'éléments de* $\mathcal{S}$ *est* $\leq \dim(E)$*.*
Ainsi, $p + (n-p') \leq n$*, donc* $p \leq p'$*. Pusque* p *et* p' *jouent un rôle symétrique, alors de la même manière, on montre que* $p' \leq p$*.*

2.27 Exercices

Exercice 17
Soit f la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ par,

$$f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2)$$

1. Ecrire la matrice de f par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3).
2. Soit (e'_1, e'_2, e'_3) le système de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$e'_1 = e_1,\ e'_2 = 2e_1 + e_2 \text{ et } e'_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$$

   Vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 18
Soient $\varphi_1 : \mathcal{C}^1([0,1]) \times \mathcal{C}^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$\varphi_1(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \text{ et } \varphi_2(P,Q) = P(0)Q(1)$$

1. Motrer que φ_1 et φ_2 sont des formes bilinéaires. Sont-t-elles symétriques ?
2. Ecrire la matrice de φ_2 par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. φ_2 est-t-elle non dégénérée ?

Exercice 19
Soit f la forme bilinéare définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 13x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2$$

1. Ecrire la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Présiser le rang et le noyau de f.
3. Donner la forme quadratique q associée à f.

Exercice 20
Soient E un K-espace vectoriel, f et g deux formes bilinéaires symétriques. On suppose que g est non dégénérée et qu'il existe $u \in L(E)$, tel que

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \ f(x,y) = g(u(x),y)$$

1. Soient β une base de E, $M = Mat(f,\beta)$, $N = Mat(g,\beta)$ et $A = Mat(u,\beta)$. Déterminer A en fonction de M et N.
2. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, alors $f(x,y) = g(x,y) = 0$.

Exercice 21
Soit $f : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (A,B) \in M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}),\ \ f(A,B) = \det(A+B) - \det(A-B)$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice de u par rapport à la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\left(\text{Rappelons que } \ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 22
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique f. On note N le noyau de f et on rappelle que $N = E^{\perp}$:

$$\forall y \in E,\ y \in N \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x,y) = 0$$

1. Montrer que f est non dégénérée, si et seulement si, $N = \{0_E\}$.
2. Soit F un autre espace vectoriel sur K et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
   a) Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E, alors $u^{-1}(u(G)) = G + \ker(u)$.
   b) Montrer que u est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a $u^{-1}(u(G)) = G$.
   c) Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de F, alors $u(u^{-1}(H)) = H \cap Im(u)$.
   d) Montrer que u est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel H de F, on a $u(u^{-1}(H)) = H$.
   e) On suppose que u est surjective et que $\ker(u) \subseteq N$. Pour $x' \in F$ et $y' \in F$ avec $x' = u(x)$ et $y' = u(y)$, on pose $g(x',y') = f(x,y)$.
      i) Montrer que g définit bien une application sur $F \times F$ et que g est bilinéaire symétrique.
      ii) Montrer que g est non dégénérée, si et seulement si, $\ker(u) = N$.
      iii) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E, alors $u(G^{\perp}) = u(G)^{\perp}$.
      iv) Montrer que si $\ker(u) = N$, alors pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a $u(G^{\perp\perp}) = u(G)$.
3. Déduire de ce qui précède que si G est un sous-espace vectoriel de E, alors $G^{\perp\perp} = G + N$. (On pourra considérer le K-espace vectoriel quotient $F = E/N$.)
4. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall f \in E, \forall g \in E,\ \ < f,g >= int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

   Soit $F = \{f \in E \ :\ f(0) = 0\}$

   a) Vérifier que F est un hyperplan de E.

b) Soit $g \in F^{\perp}$ et soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall t \in [0,1], \;\; h(t) = \begin{cases} 2tg(t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(t) & t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Montrer $h \in F$ et en déduire que $g = 0$.

c) En déduire que $F^{\perp\perp} = E$.

Exercice 23

Soient un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E, N_q le noyau de q et C_q le cône des vecteurs isotropes de q.
Montrer que $C_q = N_q$, si, et seulement si, q garde un signe constant.

Exercice 24

Donner la matrice des formes quadratiques suivantes, puis les réduire sous forme de carrés et déterminer la signature et une base q-orthogonale pour chacune d'entre elles.

1. $q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2yz + 2xz$.
2. $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2xz - 4xy$.
3. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + myz$
4. $q(x,y,z,t) = xy + 2xt + yz + 4yt + 2zt$.
5. $q(x,y,z,t) = xy + yt - zt - 2xt - 2yz - xz$.

Exercice 25

Soit q la forme quadratique défine sur $\mathbb{R}^3$, par

$$q(x,y,z) = x^2 - z^2 + 2xy + 2yz$$

1. Déterminer la forme polaire f associée à q.
2. Appliquer la méthode de Gauss à q.
3. En déduire le rang et la signature de q.
4. Donner une base de $\ker(f)$.

Exercice 26

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, \;\; q(x) = 16x_1^2 - 16x_2^2 + 5x_3^3 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 + 2x_3x_4$$

1. Trouver la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et déterminer la forme polaire associée à q.
2. Déterminer le rang, la signature de q et détermner une base q-orthogonale.
3. Déterminer le cône des vecteurs q-isotropes.
4. Trouver le q-orthogonale de $F = Vect(e_1, e_2 + 2e_3)$.

Exercice 27

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, a un vecteur non nul de E, q une forme quadratique sur E et φ la forme polaire associée. Soit $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in E, \;\; Q(x) = q(a)q(x) - (\varphi(a,x))^2$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique et déterminer la forme polaire associée.

2. Déterminer le noyau et le rang de Q.

Exercice 28
Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application $q : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définit une forme quadratique dont on déterminera le rang et la signature :

a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \ q(A) = \mathrm{tr}(A^2),$

b) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \ q(A) = \mathrm{tr}(A)^2,$

c) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \ q(A) = \mathrm{tr}({}^tAA).$

Exercice 29
Soient a un nombre réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par,

$$q(x,y,z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2yz$$

1. Décomposer q sous forme de carrés.
2. Donner, suivant les valeurs de a, le rang et la signature de q.
3. Pour quelles valeurs de a, q définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 30
Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \ q(P) = P'(0)P(1)$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau de q et en déduire le rang de q.
3. Déterminer le cône des vecteurs isotropes C_q.
4. Déterminer une base de E formée de vecteurs isotropes.
5. C_p est-t-il un sous-espace vectoriel de E ?
6. Déterminer une base q-orthogonale. Quelle est la signature de q ?

Exercice 31
Soient E un K-espace vectoriel, $a \in E$, f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. Soit $\varphi : E \longrightarrow K$ l'application définie par

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = q(a)q(x) - f(a,x)^2$$

1. Montrer que φ est une forme quadratique sur E.
2. Si E est de dimension finie, comparer les rangs de φ et q.
3. Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f.

Exercice 32
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E de signature $(n-1,1)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On suppose qu'il existe $x_0 \in F$, tel que $q(x_0) < 0$ et on pose $D = Vect(x_0)$.

1. Montrer que $E = D \oplus D^{\perp}$.
2. Montrer que la réstriction de q à $D^{\perp}$ est définie positive.
3. Montrer que $F \cap D^{\perp}$ est de dimension $n-1$.
4. Quelle est la signature de la réstriction de q à F ?
5. Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exercice 33
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et f la forme pôlaire associée à q. On note $C(q)$ le cône des vecteurs isotropes pour q et N le noyau de f. Rappelons qu'on a

$$C(q) = \{x \in E \ : \ q(x) = 0\} \ \text{ et } \ N = E^{\perp} = \{y \in E \ : \ \forall x \in E, \ f(x,y) = 0\}$$

1. On suppose que q garde un signe constant, c'està dire,
$$\forall x \in E, \ q(x) \geq 0 \ \text{ ou } \ \forall x \in E, \ q(x) \leq 0$$
Montrer que $C(q) = N$, en déduire, que dans ce cas, $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de E. (On pourra étudier le signe de $q(x+\lambda y)$, pour $x \in C(q)$, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).
2. On ne suppose plus que q garde un signe constant. Soient x_0 et y_0 deux vecteurs de E, tels que $q(x_0) > 0$ et $q(y_0) < 0$.
a) Montrer que (x_0, y_0) est libre.
b) Montrer qu'il existe deux réels distincts λ_1 et λ_2, tels que,
$$q(x_0 + \lambda_1 y_0) = q(x_0 + \lambda_2 y_0) = 0$$
c) En déduire que $C(q)$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Déduire, de ce qui précède, que les propriètés suivantes sont équivalentes :
i) q garde un signe constant.
ii) $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de E.
iii) $C(q) = N$.
4. On suppose que E est de dimension finie $= n$, q de signature (s,t) et G un sous-espace vectoriel de E totalement isotrope pour q.
a) Montrer que
$$\dim(G) \leq n - s \ \text{ et } \ \dim(G) \leq n - t$$
b) Montrer que si H est un sous-espace totalement isotrope de E, alors $G + H$ est totalement isotrope, si et seulement si, $H \subseteq G^{\perp}$.
c) Monter qu'il existe un sous-espace totalement isotrope F de E, tel que $\dim(F) = n - \max(s,t)$.
d) i) Soient M et N deux sous-espaces vectoriels, tels que $F = (F \cap G) \oplus M$ et $G = (F \cap G) \oplus N$. Montrer que $M \cap N^{\perp} \subseteq G^{\perp}$
ii) Montrer que $M \cap N^{\perp} \cap G = \{0\}$.
iii) Montrer que $G \oplus (M \cap N^{\perp})$ est un sous-espace isotrope et déteminer sa dimension.
e) En déduire que tout sous-espace totalement isotrope est inclus dans un espace totalement isotrope maximal de dimension $n - \max(s,t)$.

Exercice 34
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E de signature $(n-1, 1)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.
On suppose qu'il existe $x_0 \in F$, tel que $q(x_0) < 0$.

1. Montrer que $E = Vect(x_0) \oplus Vect(x_0)^{\perp}$.
2. Montrer que la réstriction à $Vect(x_0)^{\perp}$ est définie positive.
3. Montrer que $F \cap Vect(x_0)^{\perp}$ est de dimension $p - 1$.
4. Quelle est la signature de la réstriction de q à F ?
5. Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exercice 35

Soient K un corps commutatif quelconque, σ un automorphisme de K et E un K-espace vectoriel de dimension n sur K.

On dit qu'une application $f : E \times E \longrightarrow K$ est une forme σ-sesquilinéaire sur E, si

i) $\forall (x_1, x_2) \in E \times E,\ \forall y \in E,\ \ f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),$

ii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \ f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y),$

iii) $\forall x \in E,\ \forall (y_1, y_2) \in E \times E,\ \ f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),$

iv) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \ f(x, \lambda y) = \sigma(\lambda) f(x, y).$

1. Montrer que le seul automorphisme de $\mathbb{R}$ est l'identité. Conclure.
2. Une forme σ-sesquilinéaire f est dite alternée si
$$\forall x \in E,\ \ f(x, x) = 0$$
Montrer que si f est alternée non identiquement nulle, alors $\sigma = Id_K$ et f antisymétrique.
3. Une forme σ-sesquilinéaire f est dite hermitienne si
$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \ f(y, x) = \sigma(f(x, y))$$
Montrer que si f est hermitien, alors $\sigma^2 = Id_K$.
4. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E. On suppose qu'il existe $\lambda \in K$, tel que
$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \ f(y, x) = \lambda f(x, y)$$
Montrer que $\lambda = \pm 1$.

Exercice 36

Soient a un nombre réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = x_1^2 + (a+5)x_2^2 + (a^2 + a + 2)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2(a+3)x_2x_3$$

1. Déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En appliquant l'algorithme de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
3. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre a, le rang et la signature de q.
4. Pour quelles valeurs de a, la forme quadratique q définit-t-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
5. On suppose $q = 3$, déterminer une base q-orthogonale.
6. On suppose $q = 0$, déterminer le cône C_q des vecteurs isotropes de q.

CHAPITRE 3

ESPACES EUCLDIENS

3.1 Produit scalaire

3.1.1 Définition et propriètés élémentaires

Définition 3.2.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E.

i) On dit que f est **positif**, si

$$\forall x \in E, \ f(x,x) \geq 0$$

ii) On dit que f est **définie positive**, si

$$\forall x \in E, \ x \neq 0 \Longrightarrow f(x,x) > 0$$

iii) On appelle **produit scalaire** sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

iv) Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien réel.

v) Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle un **espace euclidien**.

Remarque 3.2.1

1. *Tout produit scalaire est non dégénéré.*
   En effet, soit f un produit scalaire et soit $y \in E$, tel que,

$$\forall x \in E, \ f(x,y) = 0$$

   Donc, en particulier, pour $x = y$, on a $f(y,y) = 0$, donc $y = 0$.

2. *Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite positive (resp. définie positive), si la forme polaire associée à q est positive (resp. définie positive). Donc, on aura*

$$q \text{ est posive} \Longleftrightarrow \forall x \in E, \ \ q(x) \geq 0$$

$$(q \text{ est définie posive}) \Longleftrightarrow (\forall x \in E, \ \ x \neq 0 \Longrightarrow q(x) > 0)$$

3. *Une matrice symétrique réelle A est dite positive (resp. définie positive), si la forme quadratique définie par la matrice A est positive (resp. définie positive). Donc, pour une matrice **symétrique** $A \in M_n(\mathbb{R})$ on aura,*

$$A \text{ est posive} \Longleftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \ \ {}^tXAX \geq 0$$

$$(A \text{ est définie posive}) \Longleftrightarrow (\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0 \Longrightarrow {}^tXAX > 0)$$

Exemples

1. *Le produit scalaire usuelle sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n,\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
   Donc $\mathbb{R}^n$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien.

2. *Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :*

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}),\ f(A,B) = tr({}^tAB)$$

   Alors, f définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
   En effet, il est facile de vérifier que f est une forme bilinéaire.
   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $A \neq 0$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors on a

$$f(A,A) = tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$$

   On en déduit donc que $f(A,A) > 0$.

3. *$l_2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ :\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire défini par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n y_n$$

   avec $x = (x_n)_{n \geq 0}$ et $y = (y_n)_{n \geq 0}$.
   Ici, f est bien définie, car $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$.

4. *$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire suivant :*

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

   Il est clair que φ définit une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
   Reste à vérifier que f est définie positive, pour cela, soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, tel que $f \neq 0$.
   $f > 0$ et f continue donc il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$. f est continue, donc $|f|$ est aussi continue, donc pour $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$, il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, on a

$$\frac{1}{2}|f(x_0) \leq |f(x)| \leq \frac{3}{2}|f(x_0)|$$

   Donc, on aura

$$\varphi(f,f) = \int_a^b f(t)^2 dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)^2 dt \geq \frac{1}{2} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x_0)^2 dt = \alpha f(x_0)^2 > 0$$

5. *Soit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $x_0 \in \Omega$, la matrice hessienne $H(x_0)$ au point x_0, par :*

$$H(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

On sait, d'après le théorème de Schwartz, que $H(x_0)$ est une matrice symétrique et que si $H(x_0)$ est définie positive, alors x_0 est un minimum local de f.
Rappelons que la forme quadratique q déterminée par la matrice $H(x_0)$ est définie par :

$$\forall (h_1,h_2,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ q(h_1,h_2,\dots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_ih_j$$

Proposition 3.3.

Soit E un espace euclidien. Alors,

i) E possède au moins une base orthonormale.

ii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$.

iii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F^{\perp\perp} = F$.

Preuve

i) *Soit f un produit scalaire sur E, puisque f est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors E possède au moins une base orthogonale $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ et puisque f est définie positive, alors $\forall i \in \{1,2,\dots,n\},\ f(e_i,e_i) > 0$. Soit $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ le système défini par :*

$$\forall i \in \{1,2,\dots,n\},\ v_i = \frac{1}{\sqrt{f(e_i,e_i)}}e_i$$

alors $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est une base orthonormale de E.

ii) *Il suffit de vérifier que F est non isotrope.*
Soit $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $f(x,x) = 0$, donc $x = 0$, car f est définie positive.

iii) *Un produit scalaire est non dégénéré, donc $F^{\perp\perp} = F$.*

3.3.1 Notations et règles de calcul

Notations

Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'un produit hermitien h. Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ \ \text{on pose}\ \ f(x,y) =< x,y > \ \ \text{et}\ \ f(x,x) = \|x\|^2$$

Règles de calcul

i)

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x,y > + \|y\|^2}$$

ii)

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x,y > + \|y\|^2}$$

iii)

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \quad \text{(Identité du prallèlogramme)}$$

iv) Identité de polarisation :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \; < x, y > = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Remarque 3.3.1
Notez que si $< x, y >= 0$, alors on aura

$$\|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

3.3.2 Utilisation des bases orthonormales

Soit E un espace euclidien de dimension n, muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Alors on a

1. $$\boxed{\forall x \in E, \; x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i}$$

2. $$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E, \; < x, y >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< y, e_i >}$$

3. $$\boxed{\forall x \in E, \; \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (< x, e_i >)^2}$$

4. Si u est un endomorphisme de E et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors on a

$$\boxed{\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; a_{ij} =< u(e_j), e_i >}$$

Preuve

1. *Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, alors on aura*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; < x, e_i >= \sum_{k=1}^{n} x_k < e_k, e_i >= x_i \quad ((car < e_k, e_i >= \delta_{ki})$$

2. *Exercice.*
3. *Exercice.*
4. *$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = Mat(u, (e_1, e_2, \ldots, e_n))$, donc on a*

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$$

Donc,

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; < u(e_j, e_i >= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} < e_k, e_i >= a_{ij} \quad (car < e_k, e_i >= \delta_{ki})$$

3.4 Inégalité de cauchy-Schwartz

Théorème 3.5.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme blinéaire symétrique **positive**, alors on a

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ |f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)}}$$

Preuve
Soit $(x,y) \in E^2$, puisque f est positif, alors on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x+y, \lambda x+y) = f(x,x)\lambda^2 + 2f(x,y)\lambda + f(y,y) \geq 0$$

il s'agit donc d'un polynÃť me de second degrÃľ en λ qui garde un signe constant, donc son discriminant est nÃľgatif. Donc on a

$$f(x,y)^2 - f(x,x)f(y,y) \leq 0$$

D'où le résultat.

Corollaire 3.6.

Soit E un espace préhilbertien réel, alors on a

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ | < x,y > | \leq \|x\|\|y\|}$$

Preuve
On sait que tout produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive, donc, en particulier, tout produit scalaire est positive, donc, d'après le théorème précédent, on a le résultat.

Proposition 3.7.

Soit E un espace préhilbertien réel, alors on a

$$\boxed{| < x,y > | = \|x\|\|y\| \Longleftrightarrow (x,y) \text{ est lié}}$$

Preuve
$(\Longrightarrow)$ *Supposons que $| < x,y > | = \|x\|\|y\|$, alors le discriminant du polynôme en λ :*

$$P(\lambda) = \|x\|^2\lambda^2 - 2 < x,y > \lambda + \|y\|^2$$

est nul, donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(\lambda_0) = 0$, donc on aura

$$\|\lambda_0 x - y\|^2 = P(\lambda_0) = 0$$

Donc $\lambda_0 x - y = 0$, donc (x,y) est lié.

$(\Longleftarrow)$ *Supposons que (x,y) est lié, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $y = \alpha x$, donc on aura*

$$| < x,y > | = | < x, \alpha x > | = |\alpha|\|x\|^2 = \|x\|\|y\|$$

Exemples

1. *On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz se traduit par :*

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. *on considère $l_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz se traduit par :*

$$\forall (x_n)_{n\geq 0} \in l_2(\mathbb{R}), \forall (y_n)_{n\geq 0} \in l_2(\mathbb{R}), \left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. *On considère $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz se traduit par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 3.8.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E, toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriètés suivantes :

i) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$

iii) $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. (Inégalité triangulaire).

Dans ce cas, on dit que le couple (E,N) est un espace normé.

Notations

Soit (E,N) un espace normé, alors pour tout $x \in E$, on pose $\|x\| = N(x)$ et on lit "norme de x".
Si plusieurs normes sont définies sur E, on les désigne par $\|.\|_1, \|.\|_2, \dots\dots$.

Exemples

Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

En utilisant les propriètés de la valeur absolue, il est facile de vérifier que les applications $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$, par contre, pour établir l'inégalité triangulaire concernant l'application $\|.\|_2$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, comme le montre le corollaire suivant :

Corollaire 3.9.

Soit E un espace préhilbertien réel, alors l'application dédinie par :

$$\forall x \in E, \;\; \|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

est une norme sur E, appelée norme euclidienne sur E.

Preuve
Vérifions les trois propriètés de la définition d'une norme.

i) *Un produit scalaire est défini positif, donc on a*

$$\forall x \in E, \;\; <x,x>> 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$$

Donc, par contraposée, on aura

$$\forall x \in E, \;\; x = 0 \Longleftrightarrow \|x\| = 0$$

ii) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $x \in E$, alors on a*

$$\|\lambda x\| = \sqrt{<\lambda x, \lambda x>} = \sqrt{\lambda^2 <x,x>} = |\lambda|\sqrt{<x,x>} = |\lambda|\|x\|$$

iii) *Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a*

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2<x,y> \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad (\textit{inégalité de Cauchy-Schwartz}) \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3.10 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 3.11.

Soient E un espace euclidien de dimension n et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base quelconque de E. Alors il existe une base orthonormale unique $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ de E, telle que :

i) Pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $Vect(e_1, e_2, \ldots, e_j) = Vect(v_1, v_2, \ldots, v_j)$.

ii) Pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $<v_j, e_j>> 0$.

Preuve
On construit les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ par récurrence de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\
e_2' &= v_2 - < v_2, e_1 > e_1 \;\; et \;\; e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} \\
&\vdots \\
e_{j+1}' &= v_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} < v_{j+1}, e_k > e_k \;\; et \;\; e_{j+1} = \frac{e_{j+1}'}{\|e_{j+1}'\|} \\
&\vdots \\
e_n' &= v_n - \sum_{k=1}^{j} < v_n, e_k > e_k \;\; et \;\; e_n = \frac{e_n'}{\|e_n'\|}
\end{aligned}
$$

Puisque $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $< v_j, e_j > = < e_j', e_j > = \|e_j'\|$, *alors on aura*

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \; < v_j, e_j > > 0$$

Remarque 3.11.1
Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base orthonormale de E, obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt au système $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \;\; v_j = \sum_{i=1}^{j} < v_j, e_i > e_i$$

Donc, si P est la matrice de passage de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors P est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont définis par :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \;\; p_{ii} = < v_i, e_i >$$

Proposition 3.12 (Inégalité d'Hadamard)**.**

Soient E un espace euclidien orienté de dimension n et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E, alors

$$\boxed{|\det(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_n\|}$$

Preuve
Si $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$, *alors l'inégalité est trivial.*
Si $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, *alors $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E.*
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base orthonormale de E, obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt au système $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors d'après la remarque précédente, on a

$$
\begin{aligned}
|\det(v_1, v_2, \dots, v_n)| &= |< v_1, e_1 > < v_2, e_2 > \cdots < v_n, e_n >| \\
&\leq \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_n\| \quad (\textit{d'après Cauchy-Schwartz})
\end{aligned}
$$

3.13 Changement de bases orthonormales - Orientation

Lemme 3.14.

Soit E un espace euclidien de dimension n, muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ un système quelconque de vecteurs de E, tels que

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, p\},\ v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Soit A la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$, alors on a

$$\boxed{{}^tAA = (< v_i, v_j >)_{1 \le i,j \le p}}$$

Preuve

Puisque $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *est une base orthonormale, alors pour tout* $x \in E$, *on a*

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$$

Donc, en particulier, on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},\ \ a_{ij} =< v_j, e_i >$$

Posons, maitenant, ${}^tAA = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le p}$, *alors pour tout* $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, *on a*

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} < v_i, e_k >< v_j, e_k > \\
&=< v_i, v_j > \quad (car\ \forall x \in E, \forall y \in E,\ < x, y >= \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >< y, e_k >)
\end{aligned}$$

Théorème 3.15.

Soient E un espace euclidien de dimension n, β et γ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de β à γ, alors on a

$$\boxed{{}^tPP = P{}^tP = I}$$

Preuve

Soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ *et* $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, *alors on a*

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2,\ \ v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

Donc, d'après le lemme précédent, on a

$${}^tPP = (< v_i, v_j >)_{1 \le i,j \le n} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Donc ${}^tPP = I$, *par suite on a aussi* $P{}^tP = I$.

Définition 3.16.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale , si ${}^tAA = I$.

Remarque 3.16.1

1. *Si A est une matrice orthogonale, alors A est inversible et on a*
$$A^{-1} = {}^tA$$
2. *Si A est une matrice orthogonale, alors*
$$\det(A) = \pm 1$$
En fait, on a ${}^tAA = I$, *donc* $\det({}^tAA) = \det(I) = 1$, *donc* $\det(A)^2 = 1$.
3. *Fixons une base orthonormale* β *de* E *et soit* γ *une autre base orthonormale de* E.
Soit P *la matrice de passage de* β *à* γ, *alors d'après le lemme précédent,* P *est une matrice orthogonale, donc on aura* $\det_\beta(\gamma) = \det(P) = \pm 1$

Proposition 3.17.

Fixons une base orthonormale β de E et considèrons la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{B}$ de toutes les bases orthonormales de E, par :
$$\beta_1 \mathcal{R} \beta_2 \Longleftrightarrow \det_\beta(\beta_1) = \det_\beta(\beta_2)$$
Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ayant deux classes d'équivalence $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ définies par :
$$\mathcal{C}_1 = \{\gamma \in \mathcal{B} : \det_\beta(\gamma) = 1\} \text{ et } \mathcal{C}_2 = \{\gamma \in \mathcal{B} : \det_\beta(\gamma) = -1\}$$

Preuve
Exercice

Définition 3.18.

i) Un espace euclidien orienté est un couple (E, β), où E est un espace euclidien et β une base orthnormale de E fixée.

ii) Si (E, β) est un espace euclien orienté et si γ est une base orthonormale de E, tel que $\det_\beta(\gamma) = 1$, on dit que γ est une base orthonormale directe.
Dans le cas contraire, on dit que γ est une base orthonormale indirecte.

Remarque 3.18.1

1. *En pratique, pour simlifier, on dit soit E un espace euclidien orienté, donc, sous-entendu, E est menu d'une base orthonormale* β.
2. *Soit* E *un espace euclidien orienté de dimension* n *et soit* $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *un système de* n *vecteurs de* E. *Alors le déterminant de* S *ne dépend pas de la base orthormale directe choisie.*
En effet, soit γ *une base orthonormale directe, alors on a*
$$\det_\beta(S) = \det_\beta(\gamma)\det_\gamma\beta(S) = \det_\gamma(S) \quad (car \det_\beta(\gamma) = 1)$$
Donc, dans un espace euclidien orienté, $\det(S)$ *désigne le déterminant de* S *par rapport à n'importe quelle base orthonormale directe.*

3.19 Produit vectoriel

3.19.1 Formes linéaires d'un espace euclidien

Proposition 3.20.

Soit E un espace euclidien, alors pour toute forme linéaire φ de E, il existe un unique $y \in E$, tel que

$$\boxed{\forall x \in E, \;\; \varphi(x) = < x, y >}$$

Preuve

On sait que le produit scalaire sur E est, en particulier, une forme bilinéaire symétrique non dégénéré, donc l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ définie par :

$$\forall y \in E, \forall x \in E, \;\; \Phi(y)(x) = < x, y >$$

est bijective.
Donc pour chaque $\varphi \in E^*$, il existe un unique $y \in E$, tel que $\Phi(y) = \varphi$ et ainsi, on aura

$$\forall x \in E, \;\; \varphi(x) = \Phi(y)(x) = < x, y >$$

3.20.1 Définition et propriètés du produit vectoriel

Théorème 3.21.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors pour tout couple de vecteurs (u, v) de E, il existe un unique vecteur w de E, tel que

$$\boxed{\forall x \in E, \;\; \det(u, v, x) = < x, w >}$$

Dans ce cas, w s'appelle le produit vectoriel de u et v et se note $u \wedge v$.

Preuve

Considèrons l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \;\; \varphi(x) = \det(u, v, x)$$

Puisque le determinant est une forme multilinéaire, alors φ est une forme linéaire sur E, donc d'après le théorème précédent, il existe un unique $w \in E$, tel que

$$\forall x \in E, \;\; \varphi(x) = \det(u, v, x) = < x, w >$$

Remarque 3.21.1

1. *Le produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs u et v est caractériser par*

$$\boxed{\forall x \in E, \;\; \det(u, v, x) = < x, u \wedge v >}$$

2. *Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de E, alors on sait que*

$$\forall x \in E, \;\; x = < x, e_1 > e_1 + < x, e_2 > e_2 + < x, e_3 > e_3$$

Donc, en particulier, on a

$$\begin{aligned} u\wedge v &= <u\wedge v, e_1> e_1 + <u\wedge v, e_2> e_2 + <u\wedge v, e_3> e_3 \\ &= \det(u,v,e_1)e_1 + \det(u,v,e_2)e_2 + \det(u,v,e_3)e_3 \end{aligned}$$

Donc si $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ *et* $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$*, alors* $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$*, où* w_1, w_2, w_3 *sont déterminés par*

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad et \quad w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

3. *Si* (e_1, e_2, e_3) *est une base orthonormale direecte de* E*, alors on a*

$$\boxed{e_1\wedge e_2 = e_3, \quad e_2\wedge e_3 = e_1 \quad et \quad e_3\wedge e_1 = e_2}$$

En effet, on a

$$e_1\wedge e_2 = \det(e_1,e_2,e_1)e_1 + \det(e_1,e_2,e_2)e_2 + \det(e_1,e_2,e_3)e_3 = \det(e_1,e_2,e_3)e_3 = e_3$$

De la même manière on vérifie que $e_2\wedge e_3 = e_1$ *et* $e_3\wedge e_1 = e_2$.

Proposition 3.22.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors on a

i) $\forall u\in E, \forall v\in E, \forall w\in E,\ u\wedge(v+w) = (u\wedge v)+(u\wedge w)$ et $(u+v)\wedge w = (u\wedge w)+(v\wedge w)$.

ii) $\forall \lambda\in\mathbb{R}, \forall u\in E, \forall v\in E,\ (\lambda u)\wedge v = u\wedge(\lambda v) = \lambda(u\wedge v)$.

iii) $\forall u\in E, \forall v\in E,\ u\wedge v = -v\wedge u$.

iv) $\forall u\in E, \forall v\in E,\ <u, u\wedge v> = <v, u\wedge v> = 0$.

v) $u\wedge v = 0 \Longleftrightarrow (u,v)$ est lié.

Preuve

i) *Pour tout* $x\in E$*, on a*

$$\begin{aligned} <u\wedge(v+w), x> &= \det(u, v+w, x) \\ &= \det(u,v,x) + \det(u,w,x) \\ &= <u\wedge v, x> + <u\wedge w, x> \\ &= <(u\wedge v + u\wedge w), x> \end{aligned}$$

Donc, $\forall x\in E,\ <u\wedge(v+w), x> = <(u\wedge v+u\wedge w), x>$*, par suite,* $u\wedge(v+w) = u\wedge v + u\wedge w$.

ii) *Pour tout* $x\in E$*, on a*

$$\begin{aligned} <(\lambda u)\wedge v, x> &= \det(\lambda u, v, x) \\ &= \lambda\det(u,v,x) = \lambda <u\wedge v, x> \\ &= \det(u, \lambda v, x) = <u\wedge(\lambda v), x> \end{aligned}$$

Donc, $(\lambda u)\wedge v = u\wedge(\lambda v) = \lambda(u\wedge v)$.

iii) *Pour tout* $x\in E$*, on a*

$$\begin{aligned} <u\wedge v, x> &= \det(u,v,x) \\ &= -\lambda\det(v,u,x) \\ &= <-(v\wedge u), x> \end{aligned}$$

Donc $u\wedge v = -v\wedge u$.

iv) *Pour $u \in E$ et $v \in E$, on a*

$$< u \wedge v, u >= \det(u,v,u) = 0 \ \ et \ \ < v \wedge u, v >= \det(v,u,v) = 0$$

v) $(\Longrightarrow)$ *Supposons que $u \wedge v = 0$, puis supposons, par absurde, que (u,v) est libre.*
Soit $x_0 \in E$, tel que $x_0 \notin Vect(u,v)$, alors (u,v,x_0) est libre, donc $\det(u,v,x_0) \neq 0$.
Ce qui est absurde, car $\forall x \in E$, $\det(u,v,x) = 0$.

$(\Longleftarrow)$ *Supposons que (u,v) est lié.*
Si $u = 0$ ou $v = 0$, alors $u \wedge v = 0$.
Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $v = \alpha u$, donc on aura

$$u \wedge v = u \wedge (\alpha u) = \alpha (u \wedge u) = 0 \quad (car\ \forall u \in E,\ u \wedge u = 0)$$

Remarque 3.22.1
Si (u,v) est libre, alors $(u,v,u\wedge v)$ est une base de E.
En effet, on a

$$\det(u,v,u\wedge v) =< u\wedge v, u\wedge v >= \|u\wedge v\|^2$$

Puisque (u,v) est libre, alors, d'après la proposition précédente, $u\wedge v \neq 0$, donc $\det(u,v,u\wedge v) \neq 0$ et par suite $(u,v,u\wedge v)$ est une base de E.

Proposition 3.23.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors

$$\boxed{\forall (u,v) \in E^2,\ \ \|u\wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (< u,v >)^2}$$

Preuve
Si (u,v) est lié, alors on sait que $< u,v >= \|u\|\|v\|$ et $u\wedge v = 0$, d'où le résultat.
Si (u,v) est libre, alors $(u,v,u\wedge v)$ est une base de E. Soit P la matrice de passage de la base $(u,v,u\wedge v)$ à une base orthonormale de E, alors d'après le lemme précédent, on a

$$^tPP = \begin{pmatrix} < u,u > & < u,v > & < u,u\wedge v > \\ < v,u > & < v,v > & < v,u\wedge v > \\ < u\wedge v,u > & < u\wedge v,v > & < u\wedge v,u\wedge v > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|u\|^2 & < u,v > & 0 \\ < u,v > & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|u\wedge v\|^2 \end{pmatrix}$$

Donc, d'une part, on aura

$$\det(^tPP) = \det(P)^2 = \det(u,v,u\wedge v)^2 = (< u\wedge v,u\wedge v >)^2 = \|u\wedge v\|^4$$

D'aure part, on a

$$\det(^tPP) = \|u\wedge v\|^2 \left(\|u\|^2\|v\|^2 - (< u,v >)^2\right)$$

Par suite, on aura

$$\|u\wedge v\|^4 = \|u\wedge v\|^2 \left(\|u\|^2\|v\|^2 - (< u,v >)^2\right)$$

Donc $\|u\wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (< u,v >)^2$.

Remarque 3.23.1

1. *Si $\|u\| = \|v\| = 1$ et $< u,v >= 0$, alors $(u,v,u\wedge v)$ est une base orthonormale directe de E.*
   En effet, on a

$$\det(u,v,u\wedge v) = \|u\wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (< u,v >)^2 = 1$$

2. *Soient u et v deux vecteurs non nuls, alors d'après la proposition précédente, on a*

$$\frac{\|u \wedge v\|^2}{\|u\|^2\|v\|^2} + \frac{<u,v>^2}{\|u\|^2\|v\|^2} = 1$$

Donc, il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$*, tel que*

$$\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} \quad et \quad \sin\theta = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\|\|v\|}$$

Dans ce cas, θ *s'appelle l'angle non orienté formé par les vecteurs u et v.*

Proposition 3.24 (Formule du double produit vectoriel)**.**

Soient E un espace euclidien, u, v et w trois vecteurs de E, alors on a

$$\boxed{u \wedge (v \wedge w) = <u,w> v - <u,v> w}$$

Preuve

i) *Si l'un des trois vecteurs est nul, alors il est clair que la proposition est vérifiée. Donc dans la suite, on peut supposer que les trois vecteurs sont non nuls.*

ii) *Si* (v,w) *est lié, alors* $v \wedge w = 0$*, donc* $u \wedge (v \wedge w) = 0$*.*
D'autre part, puisque v et w sont non nuls, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$*, tel que* $w = \alpha v$*, donc on aura*

$$<u,w> v - <u,v> w = <u,\alpha v> v - <u,v> \alpha v = \alpha <u,v> v - \alpha <u,v> v = 0$$

Donc, dans ce cas, la proposition est vérifiée.

iii) *Si* (v,w) *est libre, alors* $F = Vect(v,w)$ *est un espace euclidien de dimension 2. Soit* (e_1,e_2) *une base orthonormale de F, avec* $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$ *et soit* e_3 *un vecteur de E, tel que* (e_1,e_2,e_3) *soit une base orthonormale directe de E. Alors on aura*

$$w = \alpha e_1 + \beta e_2 \quad et \quad v = ae_1 + be_2 + ce_3$$

Donc, d'une part, on a

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge w) &= u \wedge (v \wedge (\alpha e_1 + \beta e_2)) \\ &= u \wedge (\beta \|v\| e_1 \wedge e_2) \\ &= \beta \|v\| u \wedge e_3 \\ &= \beta \|v\| (ae_1 \wedge e_3 + be_2 \wedge e_3) \\ &= \beta \|v\| (be_1 - ae_2) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} <u,w> v - <u,v> w &= <ae_1+be_2+ce_3, \alpha e_1 + \beta e_2> v - <ae_1+be_2+ce_3, v> (\alpha e_1 + \beta e_2) \\ &= (a\alpha + b\beta)\|v\| e_1 - a\|v\|(\alpha e_1 + \beta e_2) \\ &= \beta \|v\| (be_1 - ae_2) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque 3.24.1
On a aussi

$$(u \wedge v) \wedge w = <u,w> v - <v,w> u$$

Donc le produit vectoriel n'est pas associatif. En fait, on montrer, voir exercices, que

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w \iff (v, u \wedge w) \text{ est lié}$$

3.25 Exercices

Exercice 37
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles la forme quadratique q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

a) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + (a+12)x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

b) $q(x) = x_1^2 + (a+5)x_2^2 + (a^2+a+2)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2(a+3)x_2x_3$.

Exercice 38
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque et $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$$

On considère l'application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$$

1. **a)** Montrer que $q(0) = 0$.
   b) Montrer que $\forall x \in E,\ q(-x) = q(x)$.
   c) En déduire que $\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = f(y,x)$.
   d) Montrer que $\forall y \in E,\ f(0,y) = 0$.
2. Montrer que
$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ f(x+y,z) + f(x-y,z) = 2f(x,z)$$
3. Montrer que
   a)
$$\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall (x,z) \in E^2,\ f(px,z) = pf(x,z)$$
   b)
$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,z) \in E^2,\ f(\frac{p}{q}x,z) = \frac{p}{q}f(x,z)$$
4. On suppose que l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = q(tx+y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bilinéaire symétrique.
5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé dont la norme vérifie l'identité du parallèlogramme :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
   Montrer que la norme $\|\cdot\|$ est défini par un produit scalaire.

Exercice 39
Soient E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \ \text{ et } \ (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

Exercice 40
Soit E un espace préhilbertien réel x et y deux vecteurs de E. Montrer que

$$< x,y >= 0 \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x+\lambda y\| \geq \|x\|$$

Exercice 41
Soient E un espace préhilbertien, x et y deux vecteurs non nuls de E. Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$$

Exercice 42 (Egalité de la médiane)
Soient E un espace préhilbertien réel, x, a et b trois vecteurs quelconques de E. Montrer que

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \frac{\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|a-b\|^2$$

Exercice 43
Soient E un espace euclidien, x et y deux vecteurs de E, avec $x \neq y$. Montrer que pour tout $z \in E$, on a

$$\|x-z\| + \|y-z\| = \|x-y\| \Longleftrightarrow \exists \alpha \in [0,1] \ : \ z = (1-\alpha)x + \alpha y$$

Exercice 44
Soient E un espace euclidien, $a \in E$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre, dans E, l'équation

$$\alpha < x, x > + \beta < x, a > + \gamma = 0$$

Exercice 45
Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applcation définie par :

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=1}^{n} P(k)Q(k)$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 46
Soient a, b deux nombres réels et f la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \ \ f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + x_2y_2$$

1. A quelle condition sur (a,b), f définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?
2. On suppose $a = 2$ et $b = 5$.
   a) Préciser la norme définie par f.
   b) Ecrire l'inégalité de Cauchy-schwartz pour cette norme.

Exercice 47
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E, $N(q)$ le noyau de q et $C(q)$ le cône des vecteurs isotropes de q.
Montrer que q garde un signe constant si, et seulement si, $C(q) = N(q)$.

Exercice 48
$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel et (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. Soient $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_2$ et $v_3 = e_1$.

a) Vérifier que (v_1, v_2, v_3) définit une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base (v_1, v_2, v_3) pour obtenir une base orthonormale (u, v, w).

Exercice 49 (Quelques applications de l'inégalité de Cauchy-Schwartz)
1. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs, tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$$

Etudier le cas d'égalité.

2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels quelconques. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Etudier le cas d'égalité.

3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Etudier le cas d'égalité.

4. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

Etudier le cas d'égalité.

5. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_k\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_k^2 \sqrt{k}$$

Etudier le cas d'égalité.

6. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tel que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$$

Etudier le cas d'égalité.

7. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tel que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$$

Etudier le cas d'égalité.

8. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients ≥ 0. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \;\; P(\sqrt{xy})^2 \leq P(x)P(y)$$

9. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \;\; x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} < x^2 + y^2 + 1$$

10. Montrer que pour toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b - a)\int_a^b f(t)^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

11. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right) \geq (b - a)^2$$

Etudier le cas d'égalité.

12. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour chaque entier $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_a^b t^n f(t)dt$$

Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$. Etudier le cas d'égalité.

13. Soient E un espace euclidien, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $n \geq 1$, des vecteurs de E. Montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$$

Exercice 50

$M_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ < A,B >= \operatorname{tr}({}^t AB)$$

1. Montrer que la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base orthonormale de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}({}^t AA)}$$

Etudier le cas dégalité

Exercice 51

Soient E un espace euclidien, $\alpha \in \mathbb{R}$, u, v et w trois vecteurs de E, tels que

$$< u,v >=< u,w >=< v,w >= \alpha$$

a) Montrer que $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

b) Montrer que (u,v,w) est libre, si, et seulement si, $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 52

Soient E un espace euclidien, n un entier ≥ 2 et $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un système de vecteurs de E, tels que

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2,\ i \neq j \Longrightarrow < v_i, v_j >< 0$$

Montrer que $rg(S) \geq n-1$.

Exercice 53

Soient E un espace euclidien et S une partie de E, telle que

$$\forall (x,y) \in S^2,\ < x,y >= -1$$

1. Etablir que S est finie.
2. Montrer que

$$\sum_{x \in S} \frac{1}{1+\|x\|^2} \leq 1$$

Exercice 54

Soit E un espace préhilbertien. On suppose qu'il existe un système de vectreurs $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, tels que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (< x, e_i >)^2$$

1. Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}$, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$.
2. Soit $F = Vect(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ et soit $x \in E$.
   On pose $y = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$, calculer $\|x - y\|$ et en déduire que $E = F$.

Exercice 55
Soient E un espace euclidien et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système lié de vecteurs unitaires, tels que

$$\exists \alpha \neq 1 \ : \ \forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}, \ i \neq j \Longrightarrow < v_i, v_j >= \alpha$$

Montrer que

a) $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$,

b) $\alpha = -\frac{1}{n-1}$,

c) $rg(v_1, v_2, \dots, v_n) = n - 1$.

Exercice 56
Soit φ la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(x,y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
3. A l'aide de Gram-Schmidt, orthogonaliser la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire φ.

Exercice 57 (Formule du double produit vectoriel)
Soient u, v et w trois vecteurs d'un espace euclidien de dimension de dimension 3

1. Montrer que
$$u \wedge (v \wedge w) =< u, w > v - < u, v > w$$
2. Montrer que
$$\det(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) = \det(u, v, w)^2$$
3. Montrer que
$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w \Longleftrightarrow (v, u \wedge w) \text{ est lié}$$
4. Montrer que
$$u \wedge (v \wedge w) + w \wedge (u \wedge v) + v \wedge (w \wedge u) = 0 \quad \text{(Identité de Jacobi)}$$

Exercice 58
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, a, b, c et d quatres vecteurs de E.
Montrer que

a) $< a \wedge b, c \wedge d >=< a, c >< b, d > - < a, d >< b, c >$.

b) $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \det(a, b, d)c - \det(a, b, c)d$.

Exercice 59
Soient a et b deux vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3, avec $a \neq 0$.

1. Etudier l'équation $a \wedge x = b$.
   (Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x = a \wedge y$).
2. Soient u, v et w trois vecteurs de E. Trouver trois vecteurs x, y et z de E, tels que
$$\begin{cases} u = x \wedge y \\ v = y \wedge z \\ w = z \wedge x \end{cases}$$
   (Indication : on pourra caculer $u \wedge v$).

CHAPITRE 4

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIENS

4.1 Endomorphisme adjoint

Proposition 4.2.

Soit E un espace euclidien. Alors pour tout endomorphisme u de E, il existe un unique endomorphisme v de E, tel que

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \ < u(x), y > = < x, v(y) >}$$

Dans ce cas, v s'appelle l'adjoint de u et se note u^*.

Fixons $y \in E$ et considèrons l'application $\varphi_y : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \ \varphi_y(x) = < u(x), y >$$

Alors φ_y est une forme linéaire, donc il existe un unique $z_y \in E$, tel que

$$\forall x \in E,\ \ \varphi_y(x) = < x, z_y >$$

Considèrons l'application $v : E \longrightarrow E$ qui à chaque y fait correspondre $v(y) = z_y$.
Alors v est linéaire, en effet, soient $y_1 \in E$, $y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in E,\ \ < x, v(\lambda v_1 + v_2) > &= < u(x), \lambda v_1 + v_2 > \\
&= \lambda < u(x), y_1 > + < u(x), y_2 > \\
&= \lambda < x, v(y_1) > + < x, v(y_2) > \\
&= < x, \lambda v(y_1) + v(y_2) >
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in E,\ \ < x, v(\lambda y_1 + y_2) - \lambda v(y_1) - v(y_2) > = 0$, par suite

$$v(\lambda y_1 + y_2) - \lambda v(y_1) - v(y_2) = 0$$

Donc v est linéaire.
Soit w un autre endomorphisme de E, tel que

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \ < u(x), y > = < x, w(y) >$$

Alors, on aura

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \ < x, v(y) > = < x, w(y) >$$

Ainsi, on en déduit que $\forall y \in E,\ \ w(y) = v(y)$.

Proposition 4.3.

Soit E un espace euclidien. Alors on a

i) $\forall u \in L(E),\ \ u^{**} = u$.

ii) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E),\ \ (u+v)^* = u^* + v^*$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in L(E),\ \ (\lambda u)^* = \lambda u^*$.

iv) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E),\ \ (v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

v) Si β est une **base orthonormale** de E et si $A = Mat(u, \beta)$, alors on a

$$Mat(u^*, \beta) = {}^t Mat(u, \beta)$$

Preuve

i) *Soit $w = u^{**} = (u^*)^*$, alors w est l'unique endomorphisme de E vérifiant*

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ \ < u^*(x), y > = < x, w(y) >$$

Or, par définition de l'adjoint, on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ \ < u^*(x), y > = < x, u(y) >$$

Donc $u^{**} = u$.

ii)

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, \forall y \in E,\ \ < (u+v)^*(x), y > &= < x, (u+v)(y) > \\
&= < x, u(y) > + < x, v(y) > \\
&= < u^*(x), y > + < v^*(x), y > \\
&= < (u^* + v^*)(x), y >
\end{aligned}$$

Donc $(u+v)^* = u^* + v^*$.

iii) *Se démontre de la même manière que ii).*

iv) *Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, on a*

$$< (v \circ u)^*(x), y > = < x, (v \circ u)(y) > = < x, v(u(x)) > = < v^*(x), u(y) > = < u^*(v^*(x)), y > = < (u^* \circ v^*)(x), y >$$

Donc $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

v) *Soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, A la matrice de u et B la matrice de u^* par rapport à β, alors on sait que*

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2,\ \ b_{ij} = < u^*(e_j), e_i > = < e_j, u(e_i) > = < u(e_i), e_j > = a_{ji}$$

Donc $B = {}^t A$.

Proposition 4.4.

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E, alors

i) $\ker(u^*) = Im(u)^\perp$.

ii) $Im(u^*) = \ker(u)^\perp$.

iii) Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Preuve

i) *Soit $y \in E$, alors on a*

$$\begin{aligned} y \in \ker(u^*) &\Longleftrightarrow u^*(y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E, \ < u^*(y), x >= 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E, \ < y, u(x) >= 0 \\ &\Longleftrightarrow y \in Im(u)^\perp \end{aligned}$$

Donc $\ker(u^*) = Im(u)^\perp$.

ii) *D'après i), on a*

$$\ker(u) = \ker(u^{**}) = Im(u^*)^\perp$$

Donc, on aura

$$\ker(u)^\perp = \Im(u^*)^{\perp\perp} = Im(u^*)$$

iii) *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Vérifions que $F^\perp$ est stable par u^*, pour cela soit $y \in F^\perp$ et soit $x \in F$, alors on a*

$$< u^*(y), x >=< y, u(x) >= 0 \quad (car\ u(x) \in F\ et\ y \in F^\perp)$$

Donc $F^\perp$ est stable par u^*.

4.5 Projection orthogonale

4.5.1 Projection suivant une direction

Définition 4.6.

Soient E un K-espace vectoriel quelconque, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E. On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application p définie par :

$$\begin{aligned} p : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p(x) = x_1 \end{aligned}$$

Remarque 4.6.1

Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors on a

i) $p^2 = p$, *c'est à dire p est un projecteur de E.*

ii) $Im(p) = \{x \in E \ : \ p(x) = x\} = F$;

iii) $\ker(p) = G$.

Proposition 4.7.

Soient E un K-espace vectoriel et u un projecteur de E, alors on a

i) $\forall x \in E,\ \ u(x) - x \in \ker(u)$.

ii) $Im(u) = \{x \in E\ :\ u(x) = x\}$.

iii) $E = Im(u) \oplus \ker(u)$.

iv) u est la projection sur $Im(u)$ parallèlement à $\ker(u)$.

Preuve

i) *Pour $x \in E$, on a $u(u(x) - x) = u^2(x) - u(x) = 0$, (car $u^2 = u$).*

ii) *Si $u(x) = x$, alors $x \in Im(u)$.*

Réciproquement, si $x \in Im(u)$, alors il existe $y \in E$, tel que $x = u(y)$, donc

$$u(x) = u(u(y)) = u^2(y) = u(y) = x \quad (car\ u^2 = u)$$

iii) *Soit $x \in \ker(u) \cap Im(u)$, alors $\ u(x) = 0\ \ et\ \ u(x) = x$, donc $x = 0$.*

Pour $x \in E$, on a $x = (x - u(x)) + u(x)$, avec $x - u(x) \in \ker(u)$ et $u(x) \in Im(u)$.

iv) *$E = Im(u) \oplus \ker(u)$, donc pour $x = x_1 + x_2$, alors $u(x) = u(x_1) = x_1$.*

Donc u est la projection sur $Im(u)$ parallèlement à $\ker(u)$.

4.7.1 Définition et propriètés d'une projection orthogonale

Rappelons que si E est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F, on a $E = F \oplus F^{\perp}$. Dans ce cas, $F^{\perp}$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F.

Définition 4.8.

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projection orthogonale sur F, qu'on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$:

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^{\perp} &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p_F(x) = x_1 \end{aligned}$$

Remarque 4.8.1

1. *Pour tout sous-espace vectoriel de E, on a*

$$\boxed{p_{F^{\perp}} = Id_E - p_F}$$

2. *Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a*

$$\begin{aligned} y = p_F(x) &\Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ et \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ et \\ \forall z \in F,\ < x - y, z >= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. *Soient E un espace euclidien et u un projecteur de E, alors on sait que u est la projection sur $Im(u)$ parallélement à $\ker(u)$, donc*

$$(u \textit{ est une projection orthogonale}) \Longleftrightarrow \ker(u) = Im(u)^{\perp}$$

Proposition 4.9.

Soient E un espace euclidien et u un projecteur de E, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est projection orthogonale,

ii) $u^* = u$,

iii) $\forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq \|x\|$.

Preuve

i) $\Longrightarrow$ ii) *Supposons que u est une projection orthogonale et montrons que $u^* = u$.*
Puisque u est une projection orthogonale, alors $\ker(u) = Im(u)^{\perp}$, donc

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \ < u(x), y - u(y) >= 0$$

Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned}
< u(x), y > &=< u(x), (y - u(y)) + u(y) > \\
&=< u(x), y - u(y) > + < u(x), u(y) > \\
&=< u(x), u(y) > \quad (car < u(x), y - u(y) >= 0) \\
&=< (u(x) - x) + x, u(y) > \\
&=< u(x) - x, u(y) > + < x, u(y) > \\
&=< x, u(y) > \quad (car < u(x) - x, u(y) >= 0)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \ < u(x), y >=< x, u(y) >$, donc d'après l'unicité de l'adjoint on a $u^* = u$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) *Supposons que $u^* = u$ et soit $x \in E$, alors on a*

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &=< u(x), u(x) > \\
&=< u^*(u(x)), x > \\
&=< u^2(x), x > \quad (car\ u^* = u) \\
&=< u(x), x > \quad (car\ u^2 = u) \\
&\leq \|u(x)\| \|x\| \quad (\textit{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz})
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq \|x\|$.

iii) $\Longrightarrow$ i) *Supposons que $\forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq \|x\|$ et montrons que u est une projection orthogonale.*
Pour cela, il suffit de montrer que $\ker(u)^{\perp} = Im(u)$.
Soit $y \in \ker(u)^{\perp}$, pour montrer que $y \in Im(u)$, il suffit d'établir que $u(y) = y$.

$$\begin{aligned}
\|u(y) - y\|^2 &=< u(y) - y, u(y) - y > \\
&=< u(y) - y, u(y) > - < u(y) - y, y > \\
&=< u(y) - y, u(y) > \quad (car\ u(y) - y \in \ker(u) \ et\ y \in \ker(u)^{\perp}) \\
&=< u(y), u(y) > - < y, u(y) > \\
&=< u(y), u(y) > - < y, (u(y) - y) + y > \\
&=< u(y), u(y) > - < y, y > \quad (car < y, u(y) - y >= 0) \\
&= \|u(y)\|^2 - \|y\|^2 \\
&\leq 0 \quad (car\ \forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq \|x\|)
\end{aligned}$$

Donc $\|u(y)-y\|=0$*, par suite,* $u(y)=y$*. Ainsi* $\ker(u)^{\perp}\subseteq Im(u)$.
Or, on a

$$\dim(\ker(u))+\dim(Im(u))=\dim(\ker(u))+\dim(\ker(u)^{\perp})=\dim(E)$$

Donc $\dim(\ker(u)^{\perp})=\dim(Im(u))$*, par conséquent,* $\ker(u)^{\perp}=Im(u)$.

Proposition 4.10.

Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $(v_1,v_2,\dots,v_p)$ une base orthonormale de F, alors

$$\boxed{\forall x\in E,\ \ p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}<x,v_i>v_i}$$

Preuve
On sait que pour tout $x\in E$*, on a* $p_F(x)\in F$*. Puisque* $(v_1,v_2,\dots,v_p)$ *est une base orthonormale de* F*, alors on a*

$$p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}<p_F(x),v_i>$$

On sait aussi que $\ker(p_F)=F^{\perp}$ *et* $Im(p_F)=F$*, donc on aura*

$$\forall x\in E,\forall y\in F,\ \ <x-p_F(x),y>=0\quad (car\ x-p_F(x)\in\ker(p_F))$$

Ainsi, on aura

$$\forall x\in E,\forall i\in\{1,2,\dots,p\},\ \ <x,v_i>=<(x-p_F(x))+p_F(x),v_i>=<p_F(x),v_i>$$

D'où le résultat.

Exemples

1. *Soit* F *une droite vectorielle de* E*, donc* $F=Vect(x_0)$ *avec* $x_0\neq 0$.
   $v=\frac{x_0}{\|x_0\|}$ *est une base orthonormale de* E*, donc on aura*

$$\boxed{\forall x\in E,\ \ p_F(x)=\frac{<x,x_0>}{\|x_0\|^2}x_0}$$

2. *Soient* H *un hyperplan de* E *et* x_0 *un vecteur non nul orthogonal à* H*, alors* $H^{\perp}=F$*, où* $F=Vect(x_0)$*, donc on aura*

$$p_H=Id_E-p_F$$

   Ainsi, d'après la remarque précédente, on a

$$\boxed{\forall x\in E,\ \ p_H(x)=x-\frac{<x,x_0>}{\|x_0\|^2}x_0}$$

3. $\mathbb{R}^3$ *est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice, par rapport à la base canonique* (e_1,e_2,e_3) *de* $\mathbb{R}^3$*, de la projection orthogonale sur la droite vectoriel* $F=Vect(e_1-e_3)$.

Posons $x_0 = e_1 - e_3$*, alors* $\|x_0\| = \sqrt{2}$*, donc on aura*

$$\begin{cases} p_F(e_1) = \dfrac{< e_1, x_0 >}{\|x_0\|^2} x_0 = \frac{1}{2} x_0 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \\ \\ p_F(e_2) = \dfrac{< e_2, x_0 >}{\|x_0\|^2} x_0 = 0 \\ \\ p_F(e_3) = \dfrac{< e_3, x_0 >}{\|x_0\|^2} x_0 = -\frac{1}{2} x_0 = -\frac{1}{2}(e_1 - e_2) \end{cases}$$

Donc, on aura

$$Mat(p_F, (e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $\mathbb{R}^4$ *est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice, par rapport à la base canonique* (e_1, e_2, e_3, e_4) *de* $\mathbb{R}^3$*, de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + t = 0\}$.
On remarque que F un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ *et* $x_0 = e_1 + e_2 + e_4$ *est un vecteur orthogonal à F, avec* $\|x_0\| = \sqrt{3}$*, donc on aura*

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, \ \ p_F(x) = x - \frac{< x, x_0 >}{3} x_0$$

Donc on aura

$$\begin{cases} p_F(e_1) = e_1 - \dfrac{< e_1, x_0 >}{3} x_0 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_4) \\ \\ p_F(e_2) = e_2 - \dfrac{< e_2, x_0 >}{3} x_0 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 - e_4) \\ \\ p_F(e_3) = e_3 - \dfrac{< e_3, x_0 >}{3} x_0 = e_3 \\ \\ p_F(e_4) = e_4 - \dfrac{< e_4, x_0 >}{3} x_0 = \frac{1}{3}(-e_1 - e_2 + 2e_4) \end{cases}$$

Donc, on aura

$$Mat(p_F, (e_1, e_2, e_3, e_4)) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $\mathbb{R}^4$ *est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice, par rapport à la base canonique* (e_1, e_2, e_3, e_4) *de* $\mathbb{R}^3$*, de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel* $F = Vect(e_1 + e_2, e_1 + e_4)$.
Dans ce cas, pour déterminer l'expression de p_F*, on doit chercher une base orthonormale de F. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormale* (v_1, v_2) *définie par*

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \ \ et \ \ v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_4)$$

Donc, d'après la proposition précédente, on aura

$$\forall x \in E, \ \ p_F(x) = < x, v_1 > v_1 + < x, v_2 > v_2$$

Ainsi, on aura

$$\begin{cases} p_F(e_1) = < e_1, v_1 > v_1 + < e_1, v_2 > v_2 = \frac{1}{2}(e_1+e_2) + \frac{1}{6}(e_1 - e_2 + 2e_4) = \frac{1}{6}(7e_1 + 2e_2 + 2e_4) \\ \\ p_F(e_2) = < e_2, v_1 > v_1 + < e_2, v_2 > v_2 = \frac{1}{2}(e_1+e_2) - \frac{1}{6}(e_1 - e_2 + 2e_4) = \frac{1}{6}(7e_1 + 7e_2 - 2e_4) \\ \\ p_F(e_3) = < e_3, v_1 > v_1 + < e_3, v_2 > v_2 = 0 \\ \\ p_F(e_4) = < e_4, v_1 > v_1 + < e_4, v_2 > v_2 = \frac{1}{6}(2e_1 - 2e_2 + 4e_4) \end{cases}$$

Donc, on aura

$$Mat(p_F, (e_1, e_2, e_3, e_4)) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.10.1 Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Définition 4.11.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $x \in E$ et A une partie non vide de E. On définit la distance de x à A, qu'on note $d(x,A)$, par

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

Rappelons qu'un espace euclidien E est un espace normé et que la norme est définie à l'aide le produit scalaire par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

Théorème 4.12.

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace de E, alors

$$\boxed{\forall x \in E, \; d(x,F) = \|x - p_F(x)\|}$$

Preuve

Soit $x \in E$, alors pour tout $y \in F$, on a

$$x - y = x - p_F(x) + p_F(x) - y \quad avec \quad x - p_F(x) \in F^{\perp} \;\; et \;\; p_F(x) - y \in F$$

Donc, on aura

$$\forall y \in F, \;\; \|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \leq \|x - p_F(x)\|^2$$

Ainsi, on a

$$\inf_{y \in F} \|x - y\| \leq \|x - p_F(x)\|$$

Or, on sait que $p_F(x) \in F$, donc $\|x - p_F(x)\| \leq \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Donc, on aura

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$$

Exemples (d'application)
Caculons

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt$$

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, muni du produit scalaire défini par

$$\forall P\in\mathbb{R}_2[X], \forall Q\in\mathbb{R}_2[X],\ <P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Soit $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\ :\ \deg(P)\leq 1\}$, alors $\dim(F)=2$, donc F est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $P=X^2$, alors on a

$$d(P,F)^2=\inf_{Q\in F}\|P-Q\|^2=\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt$$

car tout $Q\in F$ s'écrit sous la forme $aX+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
On en déduit donc que

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt=\|P-p_F(P)\|^2$$

Cherchons $F^\perp$. Soit $Q=\alpha X^2+\beta X+\gamma$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$, alors on a

$$\begin{aligned}
Q\in F^\perp &\Longleftrightarrow <Q,1>=0 \ \ et \ \ <Q,X>=0 \quad (car\ F=Vect(1,X))\\
&\Longleftrightarrow \int_0^1 Q(t)dt=0 \ \ et \ \ \int_0^1 tQ(t)dt=0\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\gamma=0\\ \frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{2}\gamma=0\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \alpha=6\gamma \ \ et \ \ \beta=-6\gamma
\end{aligned}$$

Donc $Q=6X^2-6X+1$ est un vecteur orthogonal à F, où F est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$, donc

$$p_F(P)=P-\frac{<P,Q>}{\|Q\|^2}Q$$

Avec

$$<P,Q>=\int_0^1 t^2(6t^2-6t+1)dt=\frac{1}{30} \ \ et \ \ \|Q\|^2=\int_0^1 (6t^2-6t+1)^2dt=\frac{1}{5}$$

Donc, on aura

$$p_F(P)=X-\frac{1}{6}$$

Par suite, on a

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt=\|P-p_F(P)\|^2=\int_0^1 (t^2-t+\frac{1}{6})^2dt=\frac{1}{180}$$

4.13 Symétrie orthogonale

4.13.1 Symétrie suivant une direction

Définition 4.14.

Soient E un K-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E. On appelle symétrie par rapport à F parallélement à G, l'application s définie par :

$$\begin{aligned} s : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Remarque 4.14.1
Soit s la symétrie par rapport à F parallélement à G, alors on vérifie facilement que

i) *s est un endomorphisme de E et $s^2 = Id_E$;*

ii) *$F = \ker(s - Id_E)$ et $G = \ker(s + Id_E)$;*

iii) *$s = 2p - Id_E$ où p est la projection sur F parallélement à G.*

Rappelons qu'un endomorphisme u de E vérifiant $u^2 = Id_E$ s'appelle une symétriede E.

Proposition 4.15.

Soient E un K-espace vectoriel de E et u une symétrie de E, alors on a

i) $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$;

ii) u est la symétrie par rapport à $F = \ker(u - Id_E)$ parallélement à $G = \ker(u + Id_E)$.

Preuve
i) *On a $(u - Id_E)(u + Id_E) = 0$, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux, on aura*

$$E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$$

ii) *Pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(u - Id_E)$ et $x_2 \in \ker(u + Id_E)$, on a*

$$u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 - x_2$$

Donc u est la symétrie par rapport à $F = \ker(u - Id_E)$ parallélement à $G = \ker(u + Id_E)$.

4.15.1 Propriètés des symétries orthogonales

Définition 4.16.

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, qu'on note s_F, la symétrie par rapport à F parallélement à $F^\perp$:

$$\begin{aligned} s_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s_F(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Remarque 4.16.1
Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E, alors on a

1. $s_F^2 = Id_E$;
2. $\ker(s_F - Id_E)^{\perp} = \ker(s_F + Id_E)$;
3. *Si p_F est la projection orthogonale sur F, alors on a* $s_F = 2p_F - Id_E$;
4. $\forall x \in E,\ \|s_F(x)\| = \|x\|$.

Proposition 4.17.

Soient E un espace euclidien et u une symétrie de E, c'est à dire $u^2 = Id_E$.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est une symétrie orthogonale.

ii) $u^* = u$.

iii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

Preuve

i) $\Longrightarrow$ **ii)** *Supposons que u est une symétrie orthogonale.*
Soit p la projection orthogonale sur F, alors on sait que $u = 2p - Id_E$, donc on aura

$$u^* = (2p - Id_E)^* = 2p^* - Id_E = 2p - Id_E = u$$

ii) $\Longrightarrow$ **iii)** *Supposons que $u^* = u$, alors on a*

$$\|u(x)\|^2 = < u(x), u(x) > = < x, u^*(u(x)) > = < x, u^2(x) > = < x, x > = \|x\|^2$$

iii) $\Longrightarrow$ **i)** *Supposons que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$ et montrons que* $\ker(u - Id_E)^{\perp} = \ker(u + Id_E)$.
Soit p la projection sur $\ker(u - Id_E)$ *parallélement à* $\ker(u + Id_E)$, *alors on a*

$$\forall x \in E,\ \ p(x) = \frac{u(x) + x}{2}$$

par suite, on a

$$\|p(x)\| = \frac{1}{2}\|u(x) + x\| \leq \frac{1}{2}(\|u(x)\| + \|x\|) = \|x\| \quad (car\ \|u(x)\| = \|x\|)$$

Donc $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$, donc p est une projection orthogonale, par suite u est une symétrie orthogonale.

Exemples

1. *Cas où F est une droite vectoriel avec $F = Vect(x_0)$, on a*

$$\boxed{s_F(x) = 2p_F(x) - x = 2\frac{< x, x_0 >}{\|x_0\|^2}x_0 - x}$$

2. *Cas où F est un hyperplan de E avec x_0 un vecteur non nul orthogonal à F, on a*

$$\boxed{s_F(x) = 2p_F(x) - x = 2(x - \frac{< x, x_0 >}{\|x_0\|^2}x_0) - x = x - 2\frac{< x, x_0 >}{\|x_0\|^2}x_0}$$

4.18 Endomorphismes symétriques

4.18.1 Définition et propriètés des endomorphismes symétriques

Définition 4.19.

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

i) On dit que u est symétrique, si $u^* = u$.

ii) On dit que u que est antisymétrique, si $u^* = -u$.

Remarque 4.19.1

1. *Soient* β *une base* ***orthonormale*** *de* E, u *un endomorphisme de* E *et* $A = Mat(u, \beta)$, *alors*

$$u \text{ est symétrique} \Longleftrightarrow {}^tA = A$$

$$u \text{ est antisymétrique} \Longleftrightarrow {}^tA = -A$$

2. *Si* u *est symétrique, alors*

$$\ker(u) = \ker(u^*) = Im(u)^\perp$$

Exemples

1. *Toute projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.*
2. *Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique.*
3. *Soit* $a \in E$ *un espace euclidien orienté de dimension* 3 *et soit* u *l'endomorphisme de* E *défini par :*

$$\forall x \in E,\ \ u(x) = a \wedge x$$

Alors u *est un endomorphisme antisymétrique*
En effet, soient $x \in E$ *et* $y \in E$, *alors on a*

$$< u(x), y >=< a \wedge x, y >= \det(a, x, y) = -\det(a, y, x) = - < x, a \wedge y >=< x, (-u)(y) >$$

Donc, d'après l'unicité de l'adjoint, on a $u^* = -u$.

Lemme 4.20.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Preuve

Rappelons d'abord que si $M \in M_n(\mathbb{C})$, *avec* $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, *on définit* $\overline{M}$ *par :*

$$\overline{M} = (\overline{m}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Alors, on voit facilement que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \forall N \in M_n(\mathbb{C}),\ \ \overline{MN} = \overline{M}\,\overline{N}$$

Soit maintenant $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.
Alors il existe $X \in \mathbb{C}^n$, avec $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$, donc on aura

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Longrightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X} \\ &\Longrightarrow A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X} \quad (car\ \overline{A} = A) \\ &\Longrightarrow {}^tX(A\overline{X}) = {}^tX(\overline{\lambda}\,\overline{X}) \\ &\Longrightarrow ({}^tX\,{}^tA)\overline{X} = \overline{\lambda}({}^tX\overline{X}) \quad (car\ {}^tA = A) \\ &\Longrightarrow {}^t(AX)\overline{X} = \overline{\lambda}({}^tX\overline{X}) \\ &\Longrightarrow \lambda({}^tX\overline{X}) = \overline{\lambda}({}^tX\overline{X}) \\ &\Longrightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\,{}^tX\overline{X} = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda - \overline{\lambda} = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lemme 4.21.

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et F un sous-espace vectoriel stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.

Preuve
Soit $y \in F^\perp$, a-t-on $u(y) \in F^\perp$?
Soit $x \in F$, alors on a

$$< x, u(y) >=< u(x), y >= 0 \quad (car\ u(x) \in F)$$

Donc $u(y) \in F^\perp$.

Théorème 4.22.

Soit E un espace euclidien. Alors tout endomorphisme symétrique de E, possède au moins une base ortrhonormale formée de vecteurs propres de u.

Preuve
On procède par récurrence sur n, avec $n = \dim(E)$ et $n \geq 2$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u, donc il existe $x \in E$, avec $x \in 0$, tel que $u(x) = \lambda x$.
Posons $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$, alors $\|e_1\| = 1$ et $u(e_1) = \lambda e_1$.
Soit $F = Vect(e_1)$, alors F est stable par u. Puisque u est symétrique, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.
Déclenchons maintenant la récurrence :
Pour $n = 2$, on a $\dim(F) = 1$, donc $\dim(F^\perp) = 1$. Soit $e_2 \in F^\perp$, avec $\|e_2\| = 1$, alors e_2 est un vecteur propre de u, (car $F = Vext(e_2)$ et $u(e_2) \in F$).
Donc, dans ce cas, (e_1, e_2) est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.
H.R "Supposons que $n > 2$ et que tout endomorphisme symétrique sur un espace euclidien de dimension $< n$, possède au moins une base orthonormale formée de vecteurs propres". Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n,
lambda $\in \mathbb{R}$ une valeur propre de u et $e_1 \in E$, avec $\|e_1\| = 1$ un vecteur propre associé à λ.
Soit $F = Vect(e_1)$, donc, d'après ce qui précède, $F^\perp$ est stable par u.
Soit v la réstriction de u à $F^\perp$, alors v est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$, avec

$$\dim(F^\perp) = n - \dim(F) = n - 1$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, e_3, \ldots, e_n)$ de $F^\perp$ formée de vecteurs propres de v.
Puisque v est la réstriction de u à $F^\perp$, alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs poropres de u.

4.22.1 Formes bilinéaires symétriques d'un espace euclidien

Proposition 4.23.

Soit E un espace euclidien. Alors

i) Pour tout endomorphisme symétrique u de E, l'application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \;\; f(x,y) = < u(x), y >$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

ii) Si $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormale** de E, alors $\mathrm{Mat}(f, \beta) = \mathrm{Mat}(u, \beta)$.

Preuve

i) *Puisque u est linéaire, alors f est bilinéaire et puisque u est symétrique, alors f est symétrique.*

ii) *Soient $M = Mat(f, \beta) = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A = Mat(u, \beta) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.*
Puisque β est une base orthonormale, alors on a

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, \;\; a_{ij} = < u(e_j), e_i > = < e_j, u(e_i) > = f(e_i, e_j) = m_{ij}$$

Définition 4.24.

Soient un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \;\; f(x,y) = < u(x), y >$$

i) On dit que u est positif, si f est positive.

ii) On dit que u est défini positif, si f estdéfinie positive.

Remarque 4.24.1
*Soit u un endomorphisme **symétrique** de E, alors d'après la définition précédente, on a*

$$\boxed{u \text{ positif} \Longleftrightarrow \forall x \in E, \;\; < u(x), x > \geq 0}$$

$$\boxed{u \text{ défini positif} \Longleftrightarrow (\forall x \in E, \;\; x \neq 0 \Longrightarrow < u(x), x >> 0)}$$

Théorème 4.25.

Soit E un espace euclidien. Alors pour toute forme bilinéaire symétrique f sur E, il existe un unique endomorphisme symétrique u, tel que

$$\forall (x,y) \in E \times E, \;\; f(x,y) = < u(x), y >$$

Preuve
Soient f une forme bilinéaire symétrique sur E, A la matrice de f par rapport à une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et u l'endomorphisme de E de matrice A par rapport à β.

Pour $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors d'après l'écriture matricielle, on aura

$$\forall (x,y) \in E \times E, \ < x,y >= {}^tXY = {}^tYX \ \ et \ \ f(x,y) = {}^tXAY = {}^tYAX$$

Ainsi, on aura

$$\forall (x,y) \in E \times E, \ f(x,y) = {}^tYAX = {}^tY(AX) =< u(x), y >$$

Remarque 4.25.1
Pour toute forme quadratique q sur un espace euclidien E, il existe un unique endomorphisme symétrique u de E, tel que

$$\forall x \in E, \ q(x) =< u(x), x >$$

Proposition 4.26.

Soient E un espace euclidien et f une forme bilinéaire symétrique sur E.
Alors il existe une base orthonormale de E qui est orthgonale pour f.

Preuve
D'après la proposition précédente, il existe un unique endomorphisme symétrique u de E, tel que

$$\forall (x,y) \in E \times E, \ f(x,y) =< u(x), y >$$

Puisque u est symétrique, alors on sait qu'il existe une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. Ainsi, on aura

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, \ f(e_i, e_j) =< u(e_i), e_j >=< \lambda_i e_i, e_j >= \lambda_i < e_i, e_j >$$

Donc, pour $i \neq j$, on a $f(e_i, e_j) = 0$.

Remarque 4.26.1
Soient q une forme quadratique sur un espace euclidien E et u l'unique endomorphisme symétrique de E, tel que

$$\forall x \in E, \ q(x) =< u(x), x >$$

Soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres, non necessairement deux à deux distinctes, de u.
Alors pour tout $x \in E$, avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$$\boxed{q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}$$

En effet, d'après la proposition précédente, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base q-orthogonale et on a

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ q(e_i) = \lambda_i$$

4.27 Endomorphismes orthogonaux

4.27.1 Définition et propriètés de base

Définition 4.28.

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On dit que u est un endomorphisme orthogonal, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \;\; < u(x), u(y) >=< x, y >$$

Proposition 4.29.

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est un endomorphisme orthogonal ;

ii) $u^* \circ u = u \circ u^* = Id_E$;

iii) $\forall x \in E, \;\; \|u(x)\| = \|x\|$.

Preuve

i) $\Longrightarrow$ ii) *Supposons que u est orthogonal.*

$$\begin{aligned} u \;\; orthogonal &\Longrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E, \;\; < u(x), u(y) >=< x, y > \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E, \;\; < u^*(u(x)), y >=< x, y > \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E, \;\; < (u^* \circ u)(x) - x, y >= 0 \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \;\; (u^* \circ u)(x) = x \\ &\Longrightarrow u^* \circ u = Id_E \end{aligned}$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) *Supposons que $u^* \circ u = Id_E$.*

$$\begin{aligned} u^* \circ u = Id_E &\Longrightarrow \forall x \in E, \;\; (u^* \circ u)(x) = x \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \;\; < (u^* \circ u)(x), x >=< x, x > \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \;\; < u^*(u(x)), x >=< x, x > \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \;\; < u(x), u(x) >=< x, x > \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \;\; \|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \;\; \|u(x)\| = \|x\| \end{aligned}$$

iii) $\Longrightarrow$ i) *Supposons que $\forall x \in E, \;\; \|u(x)\| = \|x\|$, alors pour $x \in E$ et $y \in E$, on a*

$$\begin{aligned} < u(x), u(y) > &= \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &=< x, y > \end{aligned}$$

Remarque 4.29.1

1. *Tout endomorphisme euclidien u est inversible et on a* $u^{-1} = u^*$.
2. *Soit E un espace euclidien,* β *une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E et* $A = Mat(u,\beta)$. *Alors*
$$\boxed{u \text{ est orthogonal} \Longleftrightarrow {}^tAA = I}$$
Autrement dit, u est orthogonal, si, et seulement si, sa matrice par rapport à une base orthonormale de E est une matrice orthogonale.
3. *Si u est un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien orienté, alors*
$$\boxed{\det(u) = \pm 1}$$
En effet, on $u^*u = Id_E$, *donc* $\det(u^*u) = \det(u^*)\det(u) = \det(u)^2 = \det(Id_E) = 1$.

Notations

a) *On désigne par* $O(E)$ *l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E, alors* $(O(E),\circ)$ *est un groupe, c'est en fait un sous-groupe de* $(GL(E),\circ)$.

b) *On désigne par* $SO(E)$ *l'ensemble des endomorphismes orthogonaux u, tel que* $\det(u) = 1$ *:*
$$SO(E) = \{u \in O(E) \ : \ \det(u) = 1\}$$
Alors $(SO(E),\circ)$ *est un sous-groupe de* $(O(E),\circ)$.

c) *On désigne aussi par* $O_n(\mathbb{R})$, *(resp.* $SO_n(\mathbb{R})$*) l'ensemble des matrices orthogonales, (resp. orthogonales de déterminant* 1*) de* $M_n(\mathbb{R})$. *Alors* $O_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $O_n(\mathbb{R})$.

Définition 4.30.

Un élément de $SO(E)$ s'appelle une rotation de E.

Exemples

1. Id_E *et* $-Id_E$ *sont des endomorphismes orthogonaux de E.*
2. *Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonale de E.*
3. *Soit* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *une base orthonormale de E.*
Pour chaque $\sigma \in S_n$, *on considère l'endomorphisme* u_σ *défini par :*
$$\forall i \in \{1,2,\dots,n\}, \ u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$
Alors pour tout $\sigma \in S_n$, u_σ *est un endomorphisme orthogonal.*
De plus, on vérifie facilement que $\det(u_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Proposition 4.31.

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Alors

i) S'il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, telle que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ soit une base orthonormale de E, alors u est un endomorphisme orthogonal.

ii) Réciproquement, si u est un endomorphisme orthogonal, alors l'image par u de n'importe quelle base orthonormale de E est une base orthonormale de E.

Preuve

i) *Supposons qu'il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, telle que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormale de E.*
Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \|u(\sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i)\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{n} < x, e_i > u(e_i)\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} (< x, e_i >)^2 \quad (\text{car } (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ est orthonormale}) \\
&= \|x\|
\end{aligned}$$

ii) *Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, alors on a*

$$< u(e_i), u(e_j) > = < e_i, e_j > = \delta_{ij}$$

Donc $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Proposition 4.32.

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E. Alors

i) Si λ est une valeur propre de u, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.

ii) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

Preuve

i) *On suppose que u possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, donc il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$, donc on aura*

$$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$x \neq 0$, donc $\|x\| \neq 0$, par suite, $|\lambda| = 1$.

ii) *Supposons que F est stable par u.*
Soit $y \in F^{\perp}$ et soit $x \in F$, puisque F est stable par u, u bijective et E de dimension finie, alors $u(F) = F$, donc il existe $x' \in F$, tel que $x = u(x')$, ainsi, on a

$$< x, u(y) > = < u(x'), u(y) > = < x', y > = 0$$

Donc $u(y) \in F^{\perp}$.

4.32.1 Cas d'un espace euclidien de dimension 2

Théorème 4.33.

Soient E un espace euclidien de dimension 2 et u un endomorphisme orthogonal de E.

i) Si $\det(u) = 1$, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthoniormale directe de E s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, u s'appelle la rotation d'angle θ.

ii) Si $\det(u) = -1$, alors u est une symétrie orthogonale et il existe une base orthonormale de E, dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Preuve

Soit (e_1, e_2) une base orthonormale directe quelconque de E et soit $A = Mat(u, (e_1, e_2))$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

u est un endomorphisme orthogonal et (e_1, e_2) une base orthonormale de E, donc $u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormale de E, donc on aura

$$\begin{cases} \|u(e_1)\|^2 = a^2 + b^2 = 1 \\ \|u(e_2)\|^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

Donc $u(e_2) \in Vect(u(e_1))^{\perp}$ avec $Vect(u(e_1))^{\perp} = Vect(-be_1 + ae_2)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $u(e_2) = ce_1 + de_2 = \alpha(-be_1 + ae_2)$. Donc $c = -\alpha b$ et $d = \alpha a$.
Puisque $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, alors $\alpha^2 = 1$, donc $\alpha = \pm 1$.

i) *Si $\det(u) = 1$, alors $ad - bc = 1$, donc $\alpha(a^2 + b^2) = 1$, par suite $\alpha = 1$.*
Par conséquent, $c = -b$ et $d = a$.
Puisque $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

ii) *Si $\det(u) = -1$, alors $\alpha = -1$, donc A s'écrit sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Donc $A^2 = I$, par suite, u est une symétrie orthogonale. Les valeurs propres de u sont 1 et -1, donc il existe une base orthonormale formée de vecteurs propre de u, car u est symétrique.

4.33.1 Cas d'un espace euclidien de dimension 3

Théorème 4.34.

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomiorphisme orthogonal de E.

i) Si $\det(u) = 1$, alors 1 est une valeur propre de u et si e_1 est un vecteur propre unitaire associé à 1, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale (e_1, e_2, e_3), dont le premier vecteur est égal à e_1, sécrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, u s'appelle la rotation d'angle θ et d'axe $\Delta = \ker(u - Id_E)$.

ii) Si $\det(u) = -1$ et si 1 est une valeur propre de u, alors u est une symétrie orthogonale par rapport à $F = \ker(u - Id_E)$.

iii) Si $\det(u) = -1$ et 1 n'est pas valeur propre de u, alors $u = r \circ s = s \circ r$, où r est une rotation d'axe $\Delta = \ker(u + Id_E)$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta^\perp$.

Preuve
Pour la démonstration, nous avons besoin ddu lemme suivant :

Lemme 4.35.

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomiorphisme orthogonal de E. Alors $\det(u)$ est une valeur propre de u.

Preuve
On sait $\det(u) = \pm 1$.
Si $\det(u) = 1$, *alors on aura*

$$\det(u - Id_E) = \det(u - uu^*) = \det(Id_E - u^*) = (-1)^3 \det(u - Id_E) = -\det(u - Id_E)$$

Donc, $\det(u - Id_E) = 0$, *par suite,* 1 *est une valeur propre de u.*
Si $\det(u) = -1$, *on procède de la même manière :*

$$\det(u + Id_E) = \det(u + uu^*) = -\det(Id_E + u^*) = -\det(u + Id_E)$$

Donc, $\det(u + Id_E) = 0$, *par suite,* -1 *est une valeur propre de u.*

Preuve (du théorème)

i) *Si* $\det(u) = 1$, *alors d'après le lemme précédent,* 1 *est une valeur propre de u.*
Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à 1 *et soit $F = \{e_1\}^\perp$, puisque $Vect(e_1)$ est stable par u, alors F est aussi stable par u.*
Soit v la réstriction de u à F, alors v est un endomorphisme orthogonale de F et on a

$$\det(v) = \det(u) = 1, \quad (car\ u(e_1) = e_1)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale directe, alors (e_2, e_3) est une base orthonormale de F, donc d'après le théorème précédent, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice de v par rapport à la base (e_2, e_3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ii) *Supposons que* $\det(u) = -1$ *et que* 1 *est une valeur propre de u.*

Soit e_1 un vecteur propre unitaire unitaire associé à la valeur propre 1 *etr soit $F = Vect(e_1)^{\perp}$, alors F est stable par u.*

Soit v la réstriction de u à F, alors v est un endomorphisme orthogonal de F et on a

$$\det(v) = \det(u) = 1, \quad (car\ u(e_1) = e_1)$$

Donc, d'après le théorème précédent, il existe une base orthonormale (e_2, e_3) de F dans laquelle la matrice de v est définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit donc que A est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(u - Id_E)$.

iii) *Si* $\det(u) = -1$ *et* 1 *n'est pas valeur propre de u, alors, d'après le lemme précédent,* -1 *est une valeur propre de u.*

Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à -1 *et soit $F = Vect(e_1)^{\perp}$, alors F est stable par u.*

Soit v la réstriction de u à F, alors v est un endomorphisme orthogonal de F et on a

$$\det(v) = -\det(u) = 1, \quad (car\ u(e_1) = -e_1)$$

Donc, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale (e_2, e_3) de F s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice A dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soient M et N les matrices définies par :

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\quad et\ \ N=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Soient r et s les endomorphismes de E dont les matrices respectives, par rapport à la base (e_1,e_2,e_3), sont M et N.
Alors, $u=r\circ s=s\circ r$, où r est la rotation d'angle θ et d'axe $Vect(e_1)$ et s la symétrie orthogonale par rapport $Vect(e_1)^{\perp}$.

Remarque 4.35.1
Soit E un espace euclidien de dimension 3 et u une rotation de E d'angle θ et d'axe $\Delta=Vect(e_1)$, où e_1 est un vecteur unitaire. Alors on a

1. *$tr(u)=1+2\cos\theta$, donc on a*

$$\boxed{\cos\theta=\frac{tr(u)-1}{2}}$$

2. *Soit x un vecteur non nul orthogonal à Δ, alors $<x,e_1>=0$, donc, si on pose*

$$e_2=\frac{x}{\|x\|}\quad et\ \ e_3=e_1\wedge e_2$$

alors (e_1,e_2,e_3) est une base orthonormale directe de E, avec $u(e_1)=1$, donc d'après le théorème précédent, la matrice A de u par rapport à (e_1,e_2,e_3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

Donc, $u(x)=\|x\|u(e_2)=\|x\|(\cos\theta.e_2+\sin\theta.e_1\wedge e_2)$.
Ainsi pour tout x orthogonal à Δ, on a

$$\boxed{u(x)=\cos\theta.x+\sin\theta.e_1\wedge x}$$

3. *Soit $x\in E$, alors $y=x-<x,e_1>e_1$ est un vecteur orthogonal à Δ, donc, d'après la remarque précécente, on a*

$$u(y)=\cos\theta.y+\sin\theta e_1\wedge y$$

Donc, en remplaçant y par sa valeur, on aura

$$\boxed{\forall x\in E,\ \ u(x)=(1-\cos\theta)<x,e_1>e_1+\cos\theta.x+\sin\theta.e_1\wedge x}$$

4. *D'après l'expression précédente de $u(x)$, on obtient*

$$\boxed{\forall x\notin\Delta,\ \ \sin\theta=\frac{\det(e_1,x,u(x))}{\|e_1\wedge x\|^2}}$$

On a aussi,

$$\boxed{\forall x\in\Delta^{\perp},\ \ \cos\theta=\frac{<u(x),x>}{\|x\|^2}\ \ et\ \ \sin\theta=\frac{\det(e_1,x,u(x))}{\|e_1\wedge x\|^2}}$$

4.35.1 Cas général

Théorème 4.36.

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme orthogonal de E. Alors, il existe des entiers ≥ 0, p, q et r, avec $p+q+2r=n$, et il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & \boxed{A_1} & & & \\ & & & \boxed{A_2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

où I_p et I_q sont les matrices identités d'ordres respectives p et q,

$$\text{et où } \forall i \in \{1,\dots,r\},\ \exists \theta_i \in]-\pi,\pi] \ :\ A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Preuve
Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.37.

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E. Alors u possède au moins un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Preuve
Soit $v = u+u^*$, alors v est un endomorphisme symétrique, donc v possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $v(x) = \lambda x$, donc, on aura

$$\begin{aligned} v(x) = \lambda x &\Longrightarrow u(x) + u^*(x) = \lambda x \\ &\Longrightarrow u^2(x) + (uu^*)(x) = \lambda u(x) \\ &\Longrightarrow u^2(x) + x = \lambda u(x) \quad (car\ uu^* = Id_E) \\ &\Longrightarrow u^2(x) = \lambda u(x) - x \\ &\Longrightarrow u^2(x) \in Vect(\{u(x),x\}) \end{aligned}$$

Donc $F = Vect(\{u(x),x\})$ est stable par u, avec $\dim(F) \in \{1,2\}$, car $x \neq 0$.

Preuve (du théorème)
On procède par récurrence sur n, où $n = \dim(E)$.
Pour $n=2$ et $n=3$, le résutat est déjà établi.
H.R "Supposons que $n>2$ et que le théorème vrai pour tout un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien de dimension $<n$".
Soient E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme orthogonal de E, alors d'après le lemme précédent, u possède au moins un sous-espace F stable par u, de dimension 1 ou 2. On

choisit donc F de dimension minimale.
Si $\dim(F) = 1$*, alors* $F = Vect(e_1)$*, avec* $\|e_1\| = 1$*, et puisque F est stable par u, alors il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$*, tel que* $u(e_1) = \lambda e_1$*, donc λ est une valeur propre de u, par suite* $\lambda = \pm 1$.
F étant stable par u, donc $F^\perp$ est aussi stable par u, avec $\dim(F^\perp) = n-1$.
Soit v laréstriction de u à $F^\perp$, alors v est un endomorphisme orthogonal de $F^\perp$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, \dots, e_{n-1})$ *de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de v s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} I_{p-1} & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & A_1 & & & \\ & & & A_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_r \end{pmatrix}$$

Donc, si $\lambda = 1$*, alors la matrice de u dans la base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & A_1 & & & \\ & & & A_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_r \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = -1$*, alors la matrice de u dans la base* $(e_2, \dots, e_p, e_1, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, \dots, e_{n-1})$ *s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} I_{p-1} & & & & & \\ & -I_{q+1} & & & & \\ & & A_1 & & & \\ & & & A_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_r \end{pmatrix}$$

Si, maintenant, $\dim(F) = 2$*, puisque F a été choisi de dimension minimal, alors tout sous-espace stable par u serait de dimension* ≥ 2*. On en déduit donc que u ne possède aucune valeur propre.*
Soient v la réstriction de u à F et w la réstriction de u à $F^\perp$. Alors v et w sont deux endomrphismes orthogonaux de F et $F^\perp$ respectivement.
$\dim(F) = 2$*, donc la matrice A_1 de v par rapport à une base orthonormale* (e_1, e_2) *de F s'écrit sous la forme :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\dim(F^\perp) = n-2$*, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale* $(e_3, \dots, e_n)$ *de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de w s'écrit sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} A_2 & & & \\ & A_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

Donc la matrice A de u dans la base $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & & \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \boxed{A_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

$$\text{et où } \forall i\in\{1,\ldots,r\},\ \exists\theta_i\in]-\pi,\pi]\ :\ A_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}$$

4.38 Exercices

Exercice 60
Soient E un espace préhilbertien, $u:E\longrightarrow E$ et $v:E\longrightarrow E$ deux applications telles que

$$\forall x\in E,\forall y\in E,\ <u(x),y>=<x,v(y)>$$

Montrer que u et v sont linéaires et que $v=u^*$.

Exercice 61
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a\in E$ et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x\in E,\ u(x)=a\wedge(a\wedge x)$$

1. Déterminer u^*, u est-t-il symétrique ?
2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de u.

Exercice 62
Soient E un espace euclidien de dimension n et un endomorphisme de E. Pour toute base orthonormale $\beta=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$, on pose

$$S(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2$$

a) Montrer que $S(\beta)$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

b) Montrer que si $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de E et si $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ est un système de vecteurs de E, tels que

$$\sum_{i=1}^{n}\|v_i-e_i\|^2<1$$

alors $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ est une base de E.

Exercice 63

1. Montrer que si u est un endomorphisme inversible d'un espace euclidien E, alors il existe une base orthonormale $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de E, tel que $(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))$ soit une base orthogonale de E.
2. Montrer que pour toute matrice $A\in GL_n(\mathbb{R})$, il existe deux matrices orthogonales P et Q, telles que PAQ soit diagonale.

Exercice 64
Soient E un espace euclidien et $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue, telle que

$$\forall x\in E,\forall y\in E,\ <x,y>=0\Longrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. On suppose que f est paire. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall x \in E, \;\; f(x) = \alpha \|x\|^2$$

2. On suppose que f est impaire. Montrer que f est linéaire.
3. En général, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et il existe une forme linéaire φ, tels que

$$\forall x \in E, \;\; f(x) = \varphi(x) + \alpha \|x\|^2$$

Exercice 65 (Endomorphismes de trace nulle)
Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E de trace nulle.
On propose de montrer qu'il existe une base orthonormale dans laquelle les coefficients diagonaux de la matrice de u sont tous nuls.

1. Calculer $tr(u)$ à l'aide de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
2. Montrer qu'il existe i et j, avec $i \neq j$, tels que $< u(e_i), e_i >$ et $< u(e_j), e_j >$ sont de signes opposés.
3. Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $e(\theta) = (\cos\theta)e_i + (\sin\theta)e_j$. Vérifier que $\|e(\theta)\| = 1$.
4. Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f(\theta) =< e(\theta), u(e(\theta)) >$. Montrer qu'il existe au moins un $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tel que $f(\theta) = 0$.
5. En déduire le résultat.

Exercice 66
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E, tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\ker(u + u^*) = \ker(u) \cap \ker(u^*)$.
2. Montrer que $u + u^*$ est inversible si, et seulement si, $\ker(u) = Im(u)$.

Exercice 67
Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E, tel que

$$\forall x \in E, \;\; \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Montrer que

a) $\forall x \in E, \;\; \|u^*(x)\| \leq \|x\|$.

b) $\forall x \in E, \;\; u(x) = x \Longleftrightarrow u^*(x) = x$.

c) $E = \ker(u - Id_E) \oplus Im(u - Id_E)$.

Exercice 68
Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) p est une projection orthogonale,

ii) $\forall x \in E, \forall y \in E, \;\; < p(x), y >=< x, p(y) >$,

iii) $\forall x \in E, \;\; \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 69
Soient E un espace euclidien et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit p un projecteur orthogonal de Ł de rang 1. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

2. Soit p un projecteur de E, tel que $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1$. Montrer que p est orthogonal.

Exercice 70
Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est autoadjoint.
2. Montrer que $(Im(p) + \ker(q))^{\perp} = Im(q) \cap \ker(p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 71
Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tels que $u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0$.

1. Montrer que si $\alpha \neq \beta$, alors il existe une projection orthogonale p et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que $u = \lambda p$.
2. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors $\ker(u)$ et $Im(u)$ sont orthogonaux.

Exercice 72
Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E.

1. a) Montrer que $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ et $Im(u^* \circ u) = Im(u^*)$.
   b) En déduire que $\ker(u \circ u^*) = \ker(u^*)$ et $Im(u \circ u^*) = Im(u)$.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) $u \circ u^* \circ u = u$,
   ii) $u^* \circ u$ est un projecteur orthogonal de E,
   iii) $u \circ u^*$ est un projecteur orthogonal de E,
   iv) $\ker(u)^{\perp} = \{x \in E \ : \ \|u(x)\| = \|x\|\}$.

Exercice 73
Soient A et B symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$((\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2)$$

Exercice 74
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique défini positif. Montrer que

$$\forall x \in E, \ \ \|x\|^4 \leq < u(x), x >< u^{-1}(x), x >$$

Donner une condition necessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 75
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E avec u défini positif. On considère l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \ \ f(x) = < u(x), x >< u^{-1}(x), x >$$

1. Déterminer le minimum de f sur la sphère unité S de E.
2. En quels points de S ce minimum est-t-il atteint ?

Exercice 76
Déterminer les minimums suivants

1. $\inf\limits_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left((x + y - 2)^2 + (x - 1)^2 + (2x + y - 1)^2\right)$

2. $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left((x+3y+2z-1)^2+(x+3y-2z+1)^2+(x-3y+2z+1)^2+(x-3y+2z-1)^2\right)$

3. $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-at-b)^2dt.$

4. $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi}(1-a\cos t-b\sin t)^2dt.$

5. $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1}(t^2-3t+1-at-b)^2dt.$

6. $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t\log(t)-at-b)^2dt.$

7. $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{\infty}(t^3+at^2+bt+c)^2e^{-t}dt$

Exercice 77
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera le noyau et l'image.
2. u est-il une projection orthogonale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$?
3. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x)=x_1^2+11x_2^2+6x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

   a) Montrer que q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

   b) Montrer que u est une projection orthogonale par rapport à ce produit scalaire.

   c) Trouver une autre forme quadratique pour laquelle u est une projection orthogonale.

Exercice 78
Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormale $\beta=(e_1,e_2,e_3)$.

1. Déterminer la matrice, par rapport à β, de la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x+y+z=0$.
2. Déterminer la matrice, par rapport à β, de la symétrie orthogonale par rapport au plan déquation $x=z$.

Exercice 79
$E=\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et F le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer $F^\perp$ et en donner une base orthonormale.
3. Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale p sur F.
4. Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale s par rapport à F.

Exercice 80
Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ et soit $B={}^tA+A$.
On suppose qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$, tel que $B^k=0$. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 81
$\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel et F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$$

1. Déterminer une base orthogonormale de $F^{\perp}$.
2. Déterminer, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice de la projection orthogonale sur F.
3. Déterminer, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(x,F)$ où $x = (1,2,3,4)$.

Mêmes questions pour le sous-espace vectoriel $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z+t = x+2y+3z+4t\}$.

Exercice 82
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, non necessairement deux à deux distintes, alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

Exercice 83
A et B deux matrices réelles symétrique positives. Montrer que $0 \leq tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$.

Exercice 84
$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices réelles symétrique positives. Soit $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, telle que

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}, \ \ c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$$

Montrer que C est symétrique positive.

Exercice 85
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que que si A est symétrique positive, alors

$$tr(A) \geq n(\det(A))^{\frac{1}{n}}$$

2. Montrer que

$$tr({}^tAA) \geq n(\det(A))^{\frac{2}{n}}$$

Exercice 86
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que A^m soit symétrique définie positive. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\dim(\ker(A^2) = 1$ et qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que A^m soit symétrique positive. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 87
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

1. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P, telle que $B = PA$.
2. Montrer que ce résultat reste vraie sans l'hypothèse A inversible.

Exercice 88

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors $\exp(A)$ est symétrique définie positive.
2. Montrer que si $B \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $B = \exp(A)$.
3. Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$, telles que $\exp(A) = \exp(B)$, alors $A = B$.

Exercice 89

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $A^tAA = I$. Montrer que A est inversible et A symétrique et déterminer A.

Exercice 90

Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ de matrices respectives, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, A et B. On suppose que q_1 est définie positive.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de R^n, q_1-symétrique, tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \ \varphi_2(x,y) = \varphi_1(u(x),y)$$
où φ_1 et φ_2 sont respectivement les formes polaires associées à q_1 et q_2.
2. Soit M la matrice de u par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer M en fonction de A et B.
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \ f(x) = \frac{q_2(x)}{q_1(x)}$$
Montrer que f possède un minimum et un maximum absolus qu'on déterminera en fonction des valeurs propres de u.
4. Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des fonctions suivantes :
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+xy+y^2}\ \text{ et }\ g(x,y) = \frac{x^2-10xy+4y^2}{x^2-xy+y^2}$$

Exercice 91 (Matrice et déterminant de Gram)

Soient E un espace préhilbertien réel, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E. On définit ce qu'on appelle la matrice de Gram associée à ce système par
$$Gram(v_1,v_2,\dots,v_n) = (< v_i, v_j >)_{1\leq i,j\leq n}$$
Le déterminant de Gram associé au système $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est défini par :
$$G(v_1,v_2,\dots,v_n) = \det(Gram(v_1,v_2,\dots,v_n))$$

1. Montrer que $Gram(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est symétrique positive.
2. Montrer que $Gram(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ont même rang.
On pourra introduire le sous-espace $F = Vect(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et considérer l'application $u : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :
$$\forall x \in F,\ \ u(x) = (< x, v_1 >, < x, v_2 >, \dots, < x, v_n >)$$
3. Montrer que
$$(v_1,v_2,\dots,v_n) \text{ est libre} \Longleftrightarrow G(v_1,v_2,\dots,v_n) \neq 0$$

4. On suppose que $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre. Montrer que

   a) $G(v_1, v_2, \dots, v_n) > 0$.

   b)
$$\forall x \in E, \ \ d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, v_1, v_2, \dots, v_n)}{G(v_1, v_2, \dots, v_n)}}$$

5. On appelle matrice de Hilbert, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définie par :
$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \ a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$$
   Montrer que A est une matrice symétrique définie positive.
   (On pourra remarquer que $a_{ij} = \int_0^1 t^{i+j} dt$)

Exercice 92
Soient A et B deux matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\det(A+B) \ge \det(A) + \det(B)$$

Exercice 93 (Inégalité de Hadamard)
Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est définie positive, alors
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \ a_{ii} > 0$$
2. Montrer que si A est positive, alors
$$\det(A) \le \left(\frac{tr(A)}{n}\right)^n$$
3. On suppose que A est définie positive et on pose $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, avec
$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \ b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii} a_{jj}}}$$
   a) Montrer que B est positive.

   b) En déduire l'inégalité de Hadamard :
$$\det(A) \le \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exercice 94
Soient E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit u un endomorphisme symétrique, tel que $\forall x \in E, \ < u(x), x >= 0$. Montrer que $u = 0$.
2. Soient $u_1, u_2, \dots, u_p$, $p \le n$, des endomorphismes symétriques de E, tels que
$$\begin{cases} rg(u_1) + rg(u_2) + \cdots rg(u_p) = n \\ \text{et} \\ \forall x \in E, \ < x, u_1(x) > + < x, u_2(x) > + \cdots + < x, u_p(x) >=< x, x > \end{cases}$$
   Montrer que :

   a) $u_1 + u_2 + \cdots + u_p = Id_E$,

b) $E = Im(u_1) \oplus Im(u_2) \oplus \cdots \oplus Im(u_p)$,

c) Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.

Exercice 95
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, \; a_{ij} = \min(i,j)$$

Montrer que A est symétrique définie positive.

Exercice 96 (Décomposition pôlaire)
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

1. On suppose que u est symétrique positif.
   a) Montrer qu'il existe $v \in L(E)$, tel que $u = v^* v$.
   b) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w, symétrique positif, tel que $u = w^2$.
   c) Montrer que si u est symétrique défini positif et si v est un endomorphisme symétrique, alors $u^{-1} \circ v$ est diagonalisable.
2. On suppose que u est un automorphisme de E.
   a) Montrer que $u^* \circ u$ est symétrique défini positif.
   b) Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal r et un endomorphisme symétrique défini positif w, tel que $u = r \circ w$.
   c) Montrer que r et w sont uniques.
   d) En déduire que pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $R \in O_n(\mathbb{R})$ et il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, avec R et S uniques, telles que $A = RS$.

Exercice 97
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E. Déterminer la matrice, par rapport à β des endomorphismes suivants :

a) La projection orthogonale sur le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.

b) La symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel d'équation $2x + 3y + z = 0$.

c) Le demi-tour d'axe $Vect(e_1 + e_2 + e_3)$.

d) La rotation d'axe $Vect(e_2 + e_3)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

e) La rotation d'axe $Vect(e_1 + e_2 + e_3)$ qui transforme e_1 en e_2.

Exercice 98
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle et de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit u la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\Delta = Vect(e_1 - e_2 + e_3)$, telle que $u(e_1) = e_3$.

1. Déterminer l'angle de u.
2. Déterminer la matrice M de u par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 99
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u \in L(E)$. Montrer que u est une rotation, si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \; u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$$

Exercice 100

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soient r une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $Vect(x_0)$ et d'angle θ et u un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $u \circ r \circ u^{-1}$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.
2. En déduire le centre de $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 101

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u dont la matrice A par rapport à la base canonique est définie par :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

e) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 102

Soient $a \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & a+1 \\ a+1 & -a & -2 \\ 2 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

a) Pour quelles valeurs de a, l'endomorphisme u est orthogonal.

b) Dans le cas où u est orthogonal, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de u.

Exercice 103

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + ac + bc$, $s = a + b + c$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que
$$A \text{ est une matrice orthogonale} \iff \sigma = 0 \text{ et } s \in \{-1, 1\}$$
2. Montrer que
$$A \text{ est une matrice de rotation} \iff \sigma = 0 \text{ et } s = 1$$
3. Montrer que A est une matrice de rotation, si, et seulement si, il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$, tel que a, b et c soient racines du polynome $X^3 - X^2 + k$.

Exercice 104
Soient $a \in]-1,1[$ et M_a la matrice définie par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a^2 & a\sqrt{1-a^2} & \sqrt{1-a^2} \\ a\sqrt{1-a^2} & 1-a^2 & -a^2 \\ \sqrt{1-a^2} & -a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $a \in]-1,1[$, M_a est une matrice orthogonale. Est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $\mathrm{tr}(M_a)$ etdet(M_a).
3. En déduire les valeurs propres de M_a et la nature géométrique de l'endomorphisme associé canoniquement à M_a.

Exercice 105
Soit a un vecteur unitaire d'un espace euclidien E, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$\forall x \in E,\ \ f_\alpha(x) = x + \alpha < x, a > a$$

1. Montrer que $\{f_\alpha\ :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour la loi de composition.
2. Montrer que
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ \ f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$$
3. Calculer f_α^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que
$$f_\alpha \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \alpha \neq -1$$
Quelle est la nature de f_{-1} ?
5. Montrer que
$$f_\alpha \text{ est orthogonal} \Longleftrightarrow \alpha \in \{0, -2\}$$
Quelle est la nature de f_{-2} ?

Exercice 106
Soit a un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \ f(x) =< x, a > a + a \wedge x$$

Montrer que f est un endomorphisme orthogonal et préciser sa nature.

Exercice 107
Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, e_3)$.
Déterminer la matrice, par rapport à la base β, de la rotation d'axe $Vect(e_1 + e_2 + e_3)$ et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 108
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que

a) $I + A$ est inversible.

b) $(I+A)^{-1}(I-A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

c) $\det(I+A) > 0$.

Exercice 109
Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ < x, y >= 0 \Longrightarrow < u(x), u(y) >= 0$,

ii) $\exists k \geq 0 : \forall x \in E, \ \|u(x)\| = k\|x\|$,

iii) u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 110
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| \leq n^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 111
Soient E un espace euclidien $v \in E$ un vecteur non nul, $\alpha \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \ u(x) = x + \alpha < x, v > v$$

1. Donner une condition necessaire et suffisante sur α et v pour que u soit un endomorphisme orthogonal.
2. On suppose que u est orthogonal et que $\alpha \neq 0$. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 112
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que si u est un endomorphisme antisymétrique, alors $\exp(u)$ est une rotation de E.
2. Réciproquement, montrer que si u est une rotation de E, alors, il existe un endomorphisme antisymétrique v de E, tel que $u = \exp(v)$.

Exercice 113
Pour tout nombre réel a, on considère la forme quadratique q_a définie sur $\mathbb{R}^3$ par,

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ q_a(x,y,z) = a(x^2+y^2) + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$$

1. On suppose que $a = 1$.
   a) En utilisant la méthode de Gauss, écrire q_1 sous forme de carrés.
   b) Montrer que q_1 est positive. q_1 est-elle définie positive ?
   c) Montrer que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ q_1(x,y,z) \geq z^2$.
   d) Déterminer l'ensemble C des vecteurs q_1-isotropes.
2. On suppose que a est quelconque.
   a) Vérifier que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ q_a(x,y,z) = q_1(x,y,z) + (a-1)(x^2+y^2)$ et en déduire que si $a > 1$, alors q_a est définie positive.
   b) Calculer $q_a(v)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, où v est un vecteur q_1-isotrope non nul.
   c) Déduire, de ce qui précède, les valeurs du paramètre a pour lesquelles la forme quadratique q_a est définie positive ?
3. On suppose que $q = 2$ et on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire défini par q_2.
   Ce produit scalaire sera noté $< \cdot, \cdot >$
   a) Déterminer la matrice de q_2 par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
   b) Soient $u = e_2 + e_3$ et $F = \{u\}^{\perp}$.
      i) Quelle est la dimension de F ? Trouver une base de F.
      ii) Déterminer la matrice, par rapport à la base canonique, de la projection orthogonale sur F.

iii) Calculer la distance de e_1 à F.

Exercice 114
Soit E un espace euclidien de dimension n. On dit qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique si $u^* = -u$.

1. Montrer que si u est antisymétrique alors $\forall x \in E,\ < u(x), x >= 0$.
2. Réciproquement, montrer que si $\forall x \in E,\ < u(x), x >= 0$, alors u est antisymétrique.
3. On suppose que u est antisymétrique.
   a) Montrer que $\ker(u)^{\perp} = Im(u)$.
   b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.
   c) Montrer que si u est inversible, alors n est pair.
   d) Montrer que u est de rang pair.
4. On suppose que E est orienté de dimension 3 et que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe de E.
   a) Soit a un vecteur de E, avec $a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, et soit u l'endomorphisme défini par,

$$\forall x \in E,\ u(x) = a \wedge x$$

   i) Montrer que u est antisymétrique.
   ii) Déterminer, en fonction de a, $\ker(u)$ et $Im(u)$.
   iii) Déterminer, en fonction de α, β et γ, la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3).

   b) Réciproquement, soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E. On se propose de montrer qu'il existe un unique $a \in E$, tel que

$$\forall x \in E,\ u(x) = a \wedge x$$

   i) Montrer que $\dim(ker(u)) = 1$.
   ii) On suppose que $\ker(u) = Vect(x_0)$ avec $\|x_0\| = 1$ et soient y_0 et z_0 deux vecteurs de E, tels que (x_0, y_0, z_0) soit une base orthonormale directe de E. Montrer que

$$u(y_0) =< u(y_0), z_0 > x_0 \wedge y_0 \ \text{ et } \ u(z_0) =< u(y_0), z_0 > x_0 \wedge z_0$$

   iii) On pose $a =< u(y_0), z_0 > x_0$. Montrer que a est l'unique vecteur de E, tel que

$$\forall x \in E,\ u(x) = a \wedge x$$

Exercice 115
Soient α et β deux nombres réels et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = x_1^2 + \alpha x_2^2 + (\alpha + \beta + 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2(\alpha + 1)x_2x_3$$

1. Déterminer la matrice M de q par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de M et préciser les valeurs des paramètres α et β pour lesquelles la forme quadratique q est non dégénérée.
3. On suppose $\alpha = \beta = 0$.
   a) En appliquant la méthode de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
   b) Déterminer le cône des vecteurs isotropes C_q.

c) C_q est-t-il un sous-espace vectoriel de E ? Pourquoi ?

4. On suppose $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$.

   a) En appliquant la méthode de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.

   b) Pour quelles valeurs des paramèrtres α et β, la forme quadratique q définit-t-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

   c) Dans le cas où q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, déterminer une base q-orthogonale (v_1, v_2, v_3).
   Pour quelles valeurs de α et β, (v_1, v_2, v_3) définit une base q-orthonormale ?

5. Dans toute la suite, on suppose $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

   a) Justifier que q définit un produit scalaie sur $\mathbb{R}^3$.

   b) Déterminer le q-orthogonal de F, où $F = Vect(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$.

   c) Déterminer, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice A de la projection q-orthogonale sur F.

   e) La matrice A est-elle symétrique ? Pourquoi ?

   f) Déterminer, par rapport à la base (v_1, v_2, v_3), la matrice B de la projection q-orthogonale sur F.

   g) La matrice B est-elle symétrique ? Pourquoi ?

Exercice 116
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, a et b deux vecteurs non nuls de E. On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = a \wedge (b \wedge x)$$

1. Déterminer l'endomorphisme adjoint u^*.
2. En déduire que si (a, b) est lié, alors u est symétrique.
3. Réciproquement, montrer que si u est symétrique, alors (a, b) est lié.
4. Montrer que u est un projecteur, si, et seulement si, $< a, b >= -1$.
5. Montrer que u est un projecteur orthogonal, si, et seulement si, $b = -\dfrac{a}{\|a\|^2}$
6. On suppose que u est un projecteur orthogonal. Déterminer $\ker(u)$ et $Im(u)$

Exercice 117
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E, tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
2. Montrer que $\ker(u^*) = \ker(u)$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\ker(u - \lambda Id_E) = \ker(u^* - \lambda Id_E)$.
4. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u et si E_λ est le sous-espace propre associé, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.
5. Dans toute la suite, on suppose que $\dim(E) = 2$ et que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

   a) Montrer que si u possède une valeur propre réelle, alors u possède une base orthonormale formée de vecteurs propres.

   b) On suppose que u n'a aucune valeur propre réelle.

      i) Montrer que $u^* + u$ possède au moins une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$.

      ii) Montrer que le sous-espace propre E_λ est stable par u.

iii) Montrer que $\dim(E_\lambda) = 2$ et que $u^* + u = \lambda Id_E$.

iv) En déduire que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale de E, sécrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 118
Soient E un espace euclidien et u un automorphisme de E, tel que

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < x,y >= 0 \Longrightarrow < u(x),u(y) >= 0$$

1. Soit $\beta = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormale quelconque de E et $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de u^*u par rapport à la base β. Montrer que

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

2. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\alpha(x) \in \mathbb{R}$, tel que $(u^* \circ u)(x) = \alpha(x)x$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $u^* \circ u = \alpha Id_E$.
4. Montrer qu'il existe $k > 0$ et il existe un endomorphisme orthogonal v, tel que $u = kv$.

Exercice 119
Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel réel, de sa base canonique $(1,i)$, où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$, et de son produit scalaire usuel :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ < z,z' >= \text{Re}(\bar{z}z')$$

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.

1. **a)** Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \alpha z + \beta\bar{z}$.

   b) Déterminer la trace et le déterminant de f en fonction de α et β.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que
$$(z,\bar{z}) \text{ est libre} \Longleftrightarrow z^2 \notin \mathbb{R}$$
3. Déterminer f^*.
4. Quelles sont les valeurs de α et β pour lesquelles :

   a) f est un endomorphisme symétrique ?

   b) f est un endomorphisme orthogonal ?

   c) f est une rotation ?

   d) f est une symétrie orthogonale ?
5. On suppose $\beta \neq 0$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles f est une projection orthogonale.

Exercice 120
Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormale $(e_1,e_2,\dots,e_n)$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit l'endomorphisme u_σ de E par :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Longrightarrow u_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} e_i$$

1. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, u_σ est un endomopphisme orthogonal de E.

2. Montrer qu'il existe une valeur propre réelle commune à tous les u_σ.
3. Montrer qu'il existe un hyperplan H de E stable par tous les u_σ.

Exercice 121

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que toutes les valeurs propres de ${}^tAA - A{}^tA$ soient positives.
Montrer que ${}^tAA = A{}^tA$.

Exercice 122

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe une matrice antisymétrique B, telle que $A+B$ soit orthogonale.
   a) Montrer que $AB = BA$ et que $A^2 - B^2 = I$.
   b) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in [-1,1]$ et que si $\lambda \in]-1,1[$, alors $\dim(E_\lambda)$ est paire.
2. En déduire une condition necessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice antisymétrique B, telle que $A+B$ soit orthogonale.

CHAPITRE 5

FORMES SESQUILINÉAIRES - FORMES QUADRATIQUES HERMITIENNES

5.1 Formes sesquilinéaires - Formes hemitiennes

5.1.1 Quelques rappels sur les nombres complexes

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $z = a + ib$, où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.
Dans ce cas, le conjugué, la partie réelle, la partie imaginaire et le module de z sont respectivement définis par :

$$\bar{z} = a - ib,\ \ \mathrm{Re}(z) = a,\ \ \mathrm{Im}(z) = b\ \text{ et }\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Rappelons aussi les identités remarquables suivantes :

i)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

ii)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

iii)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)\ \text{ et }\ \mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$$

iv)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z|^2 = z\bar{z}$$

v)

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C},\ \ |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

vi)

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C},\ \ |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

vii)

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{4}|z_1 + z_2|^2 - \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$$

5.1.2 Définition et propriètés de base

Définition 5.2.

Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est semi-linéaire, si

i) $\forall x \in E, \forall y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in E,\ f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x)$.

Remarque 5.2.1
Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit $g : E \longrightarrow F$ l'application définie par :

$$\forall x \in E,\ g(x) = \overline{f(x)}$$

Alors f est semi-linéaire si, et seulement si, g est linéaire.

Définition 5.3.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.

a) On dit que f est une forme sesquilinéaire sur E, si

i) Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \varphi_x(y) = f(x,y) \end{aligned} \quad \text{est linéaire}$$

ii) Pour tout $y \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_y : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \varphi_y(x) = f(x,y) \end{aligned} \quad \text{est semi-linéaire}$$

b) Une forme sesquilinéaire est dite hermitienne, si

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = \overline{f(y,x)}$$

Remarque 5.3.1

1. *$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire, si, et seulement si,*

   i) $\forall x \in E, \forall y_1 \in E, \forall y_2 \in E,\ f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$,

   ii) $\forall y \in E, \forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E,\ f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$,

   iii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in E, \forall y \in E,\ f(\alpha x, \beta y) = \overline{\alpha}\beta f(x,y)$.

2. *Si h est une forme hermitienne sur E, alors*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2Re(f(x,y))}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ f(x-y, x-y) = f(x,x) + f(y,y) - 2Re(f(x,y))}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ f(ix+y, ix+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2Im(f(x,y))}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ f(ix-y, ix-y) = f(x,x) + f(y,y) - 2Im(f(x,y))}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x+y,x+y) &= f(x,x)+f(y,y)+f(x,y)+f(y,x) \\ &= f(x,x)+f(y,y)+f(x,y)+\overline{f(x,y)} \\ &= f(x,x)+f(y,y)+2Re(f(x,y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(ix+y,x+y) &= f(ix,ix)+f(y,y)+f(ix,y)+f(y,ix) \\ &= -i^2 f(x,x)+f(y,y)+f(ix,y)+\overline{f(ix,y)} \\ &= f(x,x)+f(y,y)+2Re(f(ix,y)) \\ &= f(x,x)+f(y,y)+2Re(-if(x,y)) \\ &= f(x,x)+f(y,y)+2Im(f(x,y)) \quad (car\ Re(-if(x,y)) = Im(f(x,y))) \end{aligned}$$

5.3.1 Matrice d'une forme sesquilinéaire

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E et $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Alors pour chaque $(x,y) \in E \times E$, avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_j e_j$, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{x_i} y_j f(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Définition 5.4.

La matrice de $M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\},\ a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

s'appelle la matrice de f par rapport à la base β.

Notations
Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, on pose

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{1 \le i,j \le n} \ \ et \ \ A^* = {}^t(\overline{A})$$

On vérifie facilement, qu'on a

i) $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall B \in M_n(\mathbb{C}),\ \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

ii) $\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \overline{{}^tA} = {}^t(\overline{A})$.

Remarque 5.4.1
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de f par rapport à la base β.

1. *Par définition, on a*

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i y_j$$

2.

$$\boxed{f \text{ est hermitienne} \Longleftrightarrow A^* = A}$$

3. *Si f est hermitienne, alors on a*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i + \sum_{1\le i<j\le n} (a_{ij}\bar{x}_i y_j + \bar{a}_{ij}\bar{x}_j y_i) \end{aligned}$$

Donc, en particulier, on a

$$\forall x \in E,\ f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (a_{ij}\bar{x}_i x_j + \bar{a}_{ij} x_i \bar{x}_j)$$

5.4.1 Ecriture matricielle

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de f par rapport à la base β. Pour chaque $x \in E$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on pose

$$X = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

Alors, f possède une expression matricielle sous la forme :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = {}^t\overline{X}AY}$$

En effet, on a

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ {}^t\overline{X}AY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i y_j$$

5.4.2 Changement de base

Proposition 5.5.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E. Soient β et γ deux bases de E, A et B sont, respectivement, les matrices de f par rapport aux bases β et γ et P la matrice de passage de β à γ. Alors on a

$$\boxed{B = {}^t\overline{P}AP = P^*AP}$$

Preuve
Soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *et* $\beta = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
Donc, on sait que pour tout $x \in E$, *avec* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i v_i$, *on a* $X = PX'$.
D'après l'écriture matricielle par rapport à chacune des deux bases, on a

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x,y) = {}^t\overline{X'}BY' = {}^t\overline{X}AY = {}^t\overline{PX'}A(PY') = {}^t\overline{X'}({}^t\overline{P}AP)Y'$$

Donc, on aura

$$\forall X' \in \mathbb{C}^n, \forall Y' \in \mathbb{C}^n,\ {}^t\overline{X'}BY' = {}^t\overline{X'}({}^t\overline{P}AP)Y'$$

Ainsi, on aura

$$B = {}^t\overline{P}AP$$

5.5.1 Rang d'une forme sesquilinéaire

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E. Soient β et γ deux bases de E, A et B sont, respectivement, les matrices de f par rapport aux bases β et γ et P la matrice de passage de β à γ.
Alors on sait que $B = {}^t\overline{P}AP$, donc A et B sont équivalentes et par suite, A et B ont même rang. Ainsi, la définition suivante a un sens :

Définition 5.6.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à n'importe quelle base de E. Alors le rang de f est défini par

$$\boxed{\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(A)}$$

5.6.1 Formes hermitienne non dégénérée

Définition 5.7.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque et h une forme hermitienne sur E. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \Phi(x) = \varphi_x \ \text{ où } \ \forall y \in E,\ \varphi_x(y) = h(x,y)$$

Si Φ est injective, on dit que f est non **dégénérée**.

Remarque 5.7.1
D'après la définition précédente, f *est non dégénérée, si et seulement si, pour tout* $x \in E$, *on a*

$$\boxed{[\forall y \in E,\ h(x,y) = 0] \Longrightarrow x = 0}$$

Cela signifie que si pour un certain $x \in E$, *on a* $h(x,y) = 0$ *pour tout* $y \in E$, *alors nécessairement, on a* $x = 0$.

Proposition 5.8.

Soient E un C-espace vectoriel de **dimension finie**, β une base de E, h une forme hermitienne sur E et A la matrice de h par rapport à la base β. Alors,

$$\boxed{[f \text{ est non dégénérée}] \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0}$$

Preuve
On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ qui à chaque x fait correspondre φ_x.
Posons $\beta = (e_1, e_2 \ldots, e_n)$ et $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de β.
Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de Φ par rapport aux bases β et β^*, alors on a

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,n\},\ \Phi(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} e_k^*$$

Donc pour chaque $i \in \{1,2\ldots,n\}$ et pour chaque $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a

$$h(e_i,e_j) = \overline{h(e_j,ei)} = \overline{\Phi(e_j)(e_i)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{ij} \overline{e_k^*(e_i)} = \overline{m}_{ij} \quad (car\ e_k^*(e_i) = \delta_{ik})$$

On en déduit donc que $M = \overline{A}$. Ainsi, on aura,

$$\begin{aligned} f \text{ est non dégénérée} &\Longleftrightarrow \Phi \text{ est injective} \quad (\text{par définition}) \\ &\Longleftrightarrow \Phi \text{ est bijective} \quad (\text{car } E \text{ et } E^* \text{ ont même dimension}) \\ &\Longleftrightarrow \det(M) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \det(\overline{A}) \neq 0 \quad (\text{car } M = \overline{A}) \\ &\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

5.8.1 Orthogonalité

Définition 5.9.

Soient E un C-espace vectoriel quelconque, h une forme hermitienne sur E. Soit A une partie non vide de E, on définit l'orthogonale de A, par rapport à la forme hermitienne h, noté $A^\perp$, par :

$$\boxed{\forall y \in E,\ y \in A^\perp \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ h(x,y) = 0}$$

Remarque 5.9.1

1. *Soient A et B deux parties non vides de E, telles que $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.*
2. *Pour toute partie non vide A de E, on a $A^\perp = Vect(A)^\perp$.*
3. *Pour toute partie non vide A de E, même si A n'est pas un sous-espace vectoriel de E, $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 5.10.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et h une forme hermitienne sur E, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

i) $\dim(F)+\dim(F^{\perp}) \geq \dim(E)$.

ii) Si de plus h **est non dégénérée**, alors on a

$$\boxed{\dim(F)+\dim(F^{\perp}) = \dim(E) \ \text{ et } \ F^{\perp\perp}+F}$$

Preuve
La démonstration est la même que dans le cas des formes bilinéaires symétriques.

Définition 5.11.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et h une forme hermitienne sur E.

i) On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, si $h(x,y)=0$.

ii) On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **isotrope**, si $h(x,x)=0$.

iii) Un sous-espace vetoriel F de E est dit **isotrope**, si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$.

iv) Un sous-espace vetoriel F de E est dit **totalement isotrope**, si $F \subseteq F^{\perp}$.

Théorème 5.12.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque, h une forme hermitienne sur E et F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors

$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp} \Longleftrightarrow F \text{ est non isotrope}}$$

Preuve
Ce théorème se démontre de la même manière que dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique.

5.12.1 Bases orthogonales

Définition 5.13.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $=n$ et h une forme hermitienne sur E. On dit qu'une base $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de E est **orthogonale**, si

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\},\ i \neq j \Longrightarrow h(e_i,e_j)=0$$

Remarque 5.13.1
Supposons que E possède une base orthogonale $\beta=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ et soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de h par rapport à β, donc pour $i \neq j$, on a $a_{ij}=h(e_i,e_j)=0$. Donc A est une matrice diagonale et on a pour $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,

$$h(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\overline{x}_i y_i$$

Donc, en particulier, pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$$h(x,x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2$$

Dans la suite on se propose de montrer que toute forme hermitienne possède au moins une base orthogonale.

Lemme 5.14.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f une forme hermitienne sur E. Alors

$$\boxed{h \text{ est identiquement nulle} \iff \forall x \in E,\ h(x,x) = 0}$$

Preuve

($\Longrightarrow$) *Trivial.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que pour tout $x \in E$, $h(x,x) = 0$ et montrons que h est identiquement nulle.*
Soient $(x,y) \in E \times E$, alors on a $h(x+y,x+y) = 0$ et $h(ix+y,ix+y) = 0$.
Or, on sait que

$$h(x+y,x+y) = h(x,x) + h(y,y) + 2Re(h(x,y)) = 2Re(h(x,y))$$

et que

$$h(ix+y,ix+y) = h(x,x) + h(y,y) + 2Im(h(x,y)) = 2Im(h(x,y))$$

donc $Re(h(x,y)) = Im(h(x,y)) = 0$, par suite, $h(x,y) = 0$.

Théorème 5.15.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toute forme hermitienne h sur E, possède au moins une base orthogonale.

Preuve

On procède par récurrence sur la dimension de E, exactement comme dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique.

5.16 Formes quadratiques hermitiennes

5.16.1 Définition et propriètés élémentaires

Définition 5.17.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On dit qu'une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une **forme quadratique** sur E, s'il existe une forme sesquilinéaire f sur E, telle que

$$\forall x \in E,\ q(x) = \mathrm{Re}(f(x,x))$$

Exemples
Si h est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors l'application $q : E \longrightarrow K$ *définie par :*

$$\forall x \in E,\ q(x) = h(x,x)$$

est une forme quadratique sur E, appelée forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique h.
Réciproquement, à toute forme quadratique, on peut associer une forme hermitienne unique, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.18.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une forme hermitienne unique h sur E, telle que

$$\forall x \in E,\ q(x) = h(x,x)$$

Dans ce cas, h s'appelle la forme polaire associée à la forme quadratique q et on a la relation suivante, appelée formule de polarisation :

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ h(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q(i^k x + y)}$$

Preuve
q est une forme quadratique sur E, donc, par définition, il existe une forme sesquilinéaire f sur E, telle que

$$\forall x \in E,\ q(x) = Re(f(x,x))$$

Soit $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *l'application définie par :*

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ h(x,y) = \frac{f(x,y) + \overline{f(y,x)}}{2}$$

Alors h est une forme hermitienne sur E, car on a

$$\forall x \in E,\ h(x,x) = \frac{f(x,x) + \overline{f(x,x)}}{2} = Re(f(x,x)) = q(x)$$

Puuisque h est hermitienne, alors on sait que pour tout $(x,y) \in E \times E$*, on a*

$$\begin{aligned}
q(x+y) &= q(x) + q(y) + 2Re(h(x,y)) \\
q(-x+y) &= q(x) + q(y) - 2Re(h(x,y)) \\
q(ix+y) &= q(x) + q(y) + 2Im(h(x,y)) \\
q(-ix+y) &= q(x) + q(y) - 2Im(h(x,y))
\end{aligned}$$

Donc, on aura

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{3} i^k q(i^k x + y) &= q(x+y) + iq(ix+y) - q(-x+y) - iq(-ix+y) \\
&= 4(Re(h(x,y)) + iIm(h(x,y))) \\
&= 4h(x,y)
\end{aligned}$$

Cette relation entre q et h assure l'unicité de h.

Remarque 5.18.1
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E et h la forme polaire associée à q.

1. *Soit β une base de E et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de h par rapport à la base β.*
   Alors A s'appelle aussi la matrice de q par rapport à β et on a

$$\boxed{\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij}\bar{x}_i x_j + \bar{a}_{ij} x_i \bar{x}_j)}$$

   Avec $a_{ij}\bar{x}_i x_j + \bar{a}_{ij} x_i \bar{x}_j = 2Re(a_{ij}\bar{x}_i x_j)$, donc on a

$$\boxed{\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} Re(a_{ij}\bar{x}_i x_j)}$$

2. *Puisque h est hermitienne, alors h possède au moins une base orthogonale β.*
   Alors, β s'appelle aussi une base q-orthogonale et q s'écrit, par rapport à cette base, sous la forme réduite suivante :

$$\boxed{\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2}$$

3. *Le rang d'une forme quadratique est défini comme étant le rang de sa forme pôlaire associée.*

Théorème 5.19.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et q une forme quadratique sur E de rang r. Alors il existe des formes linéaires complexes $l_1, l_2, \ldots, l_r$, linéairement indépendantes et il existe des scalaires réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, non nuls, tels que

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |l_i(x)|^2$$

Preuve
Même démonstration que dans le cas réeel.

5.19.1 Méthode de Gauss pour la réduction d'une forme quadratique hermitienne

Cas de la dimension 2

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $= 2$, (e_1, e_2) une base de E et q une forme quadratique hermitienne sur E, alors pour chaque $x \in E$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2$, on a

$$q(x) = a|x_1|^2 + b|x_2|^2 + 2\mathrm{Re}(c\bar{x}_1 x_2) \quad \text{où } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{C}$$

i) Si $(a,b) \neq (0,0)$, alors on peut supposer, par exemple, que $a \neq 0$, puis on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
q(x) &= a|x_1|^2 + b|x_2|^2 + 2\mathrm{Re}(c\bar{x}_1x_2)\\
&= a\left[|x_1|^2 + 2\mathrm{Re}(\frac{c}{a}\bar{x}_1x_2)\right] + b|x_2|^2\\
&= a\left[|x_1 + \frac{c}{a}x_2|^2 - \frac{|c|^2}{a^2}|x_2|^2\right] + b|x_2|^2\\
&= a|x_1 + \frac{c}{a}x_2|^2 + (b - \frac{|c|^2}{a})|x_2|^2\\
&= \alpha|X_1|^2 + \beta|X_2|^2 \quad \text{où } X_1 = x_1 + \frac{c}{a}x_2,\ X_2 = x_2,\ \alpha = a \text{ et } \beta = b - \frac{|c|^2}{a}
\end{aligned}$$

ii) Si $(a,b) = (0,0)$, alors $q(x) = 2\mathrm{Re}(c\bar{x}_1x_2)$, donc on aura

$$\begin{aligned}
q(x) &= 2\mathrm{Re}(c\bar{x}_1x_2)\\
&= \frac{1}{2}(|x_1 + cx_2|^2 - |x_1 - cx_2|^2)\\
&= \frac{1}{2}|x_1 + cx_2|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - cx_2|^2\\
&= \frac{1}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2 \quad \text{où } X_1 = x_1 + cx_2 \text{ et } X_2 = x_1 - cx_2
\end{aligned}$$

Cas de la dimension 3

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, $(e_{1,2}, e_3)$ une base de E et $q : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique. Alors pour tout $x \in E$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, on a

$$q(x) = a|x_1|^2 + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\mathrm{Re}(d\bar{x}_1x_2) + 2\mathrm{Re}(e\bar{x}_1x_3) + 2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3)$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(d,e,f) \in \mathbb{C}^3$.

i) Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, alors on peut supposer par exemple que $a \neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1, on aura,

$$\begin{aligned}
q(x) &= \left(a|x_1|^2 + 2\mathrm{Re}(d\bar{x}_1x_2) + 2\mathrm{Re}(e\bar{x}_1x_3)\right) + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3)\\
&= a\left[|x_1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\bar{x}_1(\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)\right)\right] + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3)\\
&= a\left[|x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3|^2 - |\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3|^2\right] + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3)\\
&= a|x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3|^2 - a|\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3|^2 + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3)\\
&= a|x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3|^2 + Q(x_2,x_3)
\end{aligned}$$

où

$$Q(x_2,x_3) = b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3) - a|\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3|^2$$

est une forme quadratique en (x_2,x_3).
Donc pour achever la décomposition de q, il suffit de décomposer Q qui peut-être considérée comme une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

ii) Si $a=b=c=0$, alors q s'écrit sous la forme :

$$q(x)=2\mathrm{Re}(d\bar{x}_1x_2)+2\mathrm{Re}(e\bar{x}_1x_3)+2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3)$$

En supposant, par exemple, que $d\neq 0$, on peut procèder de la manière suivante :

$$\begin{aligned}q(x)&=2\mathrm{Re}(d\bar{x}_1x_2)+2\mathrm{Re}(e\bar{x}_1x_3)+2\mathrm{Re}(f\bar{x}_2x_3)\\&=2\mathrm{Re}(d\bar{x}_1x_2+e\bar{x}_1x_3+\bar{f}x_2\bar{x}_3)\\&=2\mathrm{Re}\left[d(\bar{x}_1x_2+\frac{e}{d}\bar{x}_1x_3+\frac{\bar{f}}{d}x_2\bar{x}_3)\right]\\&=2\mathrm{Re}\left[d(\bar{x}_1+\frac{\bar{f}}{d}\bar{x}_3)(x_2+\frac{e}{d}x_3)-\frac{e\bar{f}}{d}|x_3|^2\right]\end{aligned}$$

Posons

$$y_1=x_1+\frac{f}{\bar{d}}x_3,\ \ y_2=x_2+\frac{e}{d}x_3\ \text{ et }\ \lambda=-\mathrm{Re}(\frac{e\bar{f}}{d})$$

Donc, on aura

$$\begin{aligned}q(x)&=2\mathrm{Re}(d\bar{y}_1y_2)+\lambda|x_3|^2\\&=\frac{1}{2}|y_1+dy_2|^2-\frac{1}{2}|y_1-dy_2|^2+\lambda|x_3|^2\\&=\frac{1}{2}|x_1+dx_2+(\frac{f}{\bar{d}}+e)x_3|^2-\frac{1}{2}|x_1-dx_2+(\frac{f}{\bar{d}}-e)x_3|^2+\lambda|x_3|^2\\&=\frac{1}{2}|X_1|^2-\frac{1}{2}|X_2|^2+\lambda|X_3|^2\end{aligned}$$

Avec

$$X_1=x_1+dx_2+(\frac{f}{\bar{d}}+e)x_3,\ \ X_2=x_1-dx_2+(\frac{f}{\bar{d}}-e)x_3\ \text{ et }\ X_3=x_3$$

Le cas général

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fine $=n$, $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E et $q:E\longrightarrow\mathbb{C}$ une forme quadratique hermitienne non nulle. Alors on sait que q s'écrit sous la forme :

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|^2+2\mathrm{Re}(\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_ix_j)$$

Nous allons procéder par récurrence sur n, en distinguant deux cas :

i) Il existe $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$, tel que $a_{i_0}\neq 0$, alors quitte à réordonner les a_i, on peut supposer que $a_1\neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1, (si à la place de a_1 on prend a_{i_0}, on doit regrouper tous les termes contenant x_{i_0}), on aura,

$$\begin{aligned}q(x)&=a_1|x_1|^2+2\mathrm{Re}(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\bar{x}_1x_j)+\sum_{i=2}^{n}a_i|x_i|^2+2\mathrm{Re}(\sum_{2\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_ix_j)\\&=a_1\left[|x_1|^2+2\mathrm{Re}\left(\bar{x}_1(\sum_{j=2}^{n}\alpha_jx_j)\right)\right]+\sum_{i=2}^{n}a_i|x_i|^2+2\mathrm{Re}(\sum_{2\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_ix_j)\quad \text{où } \forall j,\ \alpha_j=\frac{a_{1j}}{a_1}\\&=a_1\left|x_1+\sum_{j=2}^{n}\alpha_jx_j\right|^2-\left|\sum_{j=2}^{n}\alpha_jx_j\right|^2+\sum_{i=2}^{n}a_i|x_i|^2+2\mathrm{Re}(\sum_{2\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_ix_j)\\&=a_1\left|x_1+\sum_{j=2}^{n}\alpha_jx_j\right|^2+Q(x_2,\dots,x_n)\end{aligned}$$

où

$$Q(x_2,\dots,x_n)=2\mathrm{Re}(\sum_{2\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_i x_j)+\sum_{i=2}^{n}a_i|x_i|^2-\left|\sum_{j=2}^{n}\alpha_j x_j\right|^2$$

est une forme quadratque en $x_2,x_3,\dots,x_n$, donc on peut considérer Q comme une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dmension $n-1$ et on applique, alors, l'hypothèse de récurrence à Q.

ii) $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$, $a_i=0$, alors, dans ce cas, q s'écrit sous la forme :

$$q(x)=2\mathrm{Re}(\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_i x_j)$$

$q\neq 0$, donc l'un au moins des coefficients a_{ij} est non nul, donc pour simplifier on peut supposer que $a_{12}\neq 0$, puis on regroupe tous les termes contenant x_1 et tous les termes contenant x_2. Ainsi, on aura

$$q(x)=2\mathrm{Re}(a_{12}\bar{x}_1x_2+\sum_{j=3}^{n}a_{1j}\bar{x}_1x_j+\sum_{j=3}^{n}a_{2j}\bar{x}_2x_j)+2\mathrm{Re}(\sum_{3\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_i x_j)$$

On sait que $\forall z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\bar{z})$, alors on a

$$\mathrm{Re}(\sum_{j=3}^{n}a_{2j}\bar{x}_2x_j)=\mathrm{Re}(\sum_{j=3}^{n}\bar{a}_{2j}x_2\bar{x}_j)$$

Donc, si on pose,

$$y_1=\sum_{j=3}^{n}\frac{a_{2j}}{\bar{a}_{12}}x_j \text{ et } y_2=\sum_{j=3}^{n}a_{1j}x_j$$

Alors, on aura,

$$\begin{aligned}q(x)&=2\mathrm{Re}(a_{12}\bar{x}_1x_2+\bar{x}_1y_2+a_{12}x_2\bar{y}_1)+2\mathrm{Re}(\sum_{3\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_i x_j)\\&=2\mathrm{Re}\left((\bar{x}_1+\bar{y}_1)(a_{12}x_2+y_2)-\bar{y}_1y_2\right)+2\mathrm{Re}(\sum_{3\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_i x_j)\\&=2\mathrm{Re}\left((\overline{x_1+y_1})(a_{12}x_2+y_2)\right)-2\mathrm{Re}(\bar{y}_1y_2)+2\mathrm{Re}(\sum_{3\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_i x_j)\\&=\frac{1}{2}|x_1+a_{12}x_2+y_1+y_2|^2-\frac{1}{2}|x_1-a_{12}x_2+y_1-y_2|^2+Q(x_3,\dots,x_n)\end{aligned}$$

où

$$Q(x_3,\dots,x_n)=2\mathrm{Re}(\sum_{3\leq i<j\leq n}a_{ij}\bar{x}_i x_j)-2\mathrm{Re}(\bar{y}_1y_2)$$

est une forme quadratique en $x_3,\dots,x_n$, donc Q peut-être considérée comme une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n-2$. Donc on achève la décompositon en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q.

Exemples

1. *Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie sur $\mathbb{C}^3$ par*

$$\forall x\in\mathbb{C}^3,\ \ q(x)=|x_1|^2+|x_3|^2-2Re(i\bar{x}_1x_2)-2Re(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3)$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
q(x) &= \big(|x_1|^2 - 2Re(i\bar{x}_1x_2)\big) + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3) && (5.1)\\
&= \big(|x_1 - ix_2|^2 - |x_2|^2\big) + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3) && (5.2)\\
&= |x_1 - ix_2|^2 - \Big(|x_2|^2 + 2Re(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3)\Big) + |x_3|^2 && (5.3)\\
&= |x_1 - ix_2|^2 - \Big(|x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 - 2|x_3|^2\Big) + |x_3|^2 && (5.4)\\
&= |x_1 - ix_2|^2 - |x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 + 3|x_3|^2 && (5.5)
\end{aligned}$$

2. *Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie sur $\mathbb{C}^3$ par*

$$\forall x \in \mathbb{C}^3,\ \ q(x) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 + 2Re(\bar{x}_1x_2) + 2Re(\bar{x}_1x_3)$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
q(x) &= \big(|x_1|^2 + 2Re(\bar{x}_1x_2) + 2Re(\bar{x}_1x_3)\big) + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 \quad (\textit{Regroupement des termes contenant } x_1)\\
&= \big(|x_1|^2 + 2Re(\bar{x}_1(x_2+x_3))\big) + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2\\
&= \big(|x_1+x_2+x_3|^2 - |x_2+x_3|^2\big) + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2\\
&= |x_1+x_2+x_3|^2 + \big(|x_2|^2 - 2Re(\bar{x}_2x_3)\big) - 5|x_3|^2\\
&= |x_1+x_2+x_3|^2 + \big(|x_2-x_3|^2 - |x_3|^2\big) - 5|x_3|^2\\
&= |x_1+x_2+x_3|^2 + |x_2-x_3|^2 - 6|x_3|^2
\end{aligned}$$

3. *Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie sur $\mathbb{C}^3$ par*

$$\forall x \in \mathbb{C}^3,\ \ q(x) = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 - i\bar{x}_1x_3 + ix_1\bar{x}_3 + (1-i)\bar{x}_2x_3 + (1+i)x_2\bar{x}_3$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
q(x) &= 2Re\left(\bar{x}_1x_2 - i\bar{x}_1x_3 + (1-i)\bar{x}_2x_3\right)\\
&= 2Re\left(\bar{x}_1x_2 - i\bar{x}_1x_3 + (1-i)x_2\bar{x}_3\right)\\
&= 2Re\big((\bar{x}_1 + (1-i)\bar{x}_3)(x_2 - ix_3) + i(1-i)|x_3|^3\big)\\
&= 2Re\Big(\overline{(x_1 + (1+i)x_3)}(x_2 - ix_3)\Big) + 2Re(i(1-i))|x_3|^2\\
&= \frac{1}{2}|x_1+x_2+x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - x_2 + (1+2i)x_3|^2 + 2|x_3|^2
\end{aligned}$$

5.20 Exercices

Exercice 123

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$, appliquer l'algorithme de Gauss pour décomposer q sous formes de carrés, déterminer le rang et la signature de q et une base q-orthogonale.

1. $q(x) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 2|x_3|^2 + 2i\bar{x}_1x_2 - 2ix_1\bar{x}_2 - i\bar{x}_1x_3 + ix_1\bar{x}_3 + 2i\bar{x}_2x_3 - 2ix_2\bar{x}_3$
2. $q(x) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 + \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_3 + x_1\bar{x}_3$.
3. $q(x) = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 - i\bar{x}_1x_3 + ix_1\bar{x}_3 + (1-i)\bar{x}_2x_3 + (1+i)x_2\bar{x}_3$
4. $q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\bar{x}_1x_2 - x_1\bar{x}_2 + 2i\bar{x}_2 - 2ix_2\bar{x}_3$.

Exercice 124

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 2i & 7 & 3i \\ 0 & -3i & 5 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme de Gauss décomposer q sous formes de carrés, déterminer le rang et la signature de q et une base q-orthogonale.

Exercice 125

Soit q la forme quadratique hermitienne définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^3,\ q(x) = i\bar{x}_1 x_2 - i x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_3 + x_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3 + x_2 \bar{x}_3$$

1. Déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
2. En appliquant la méthode de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
3. En déduire le rang et la signature de q.
4. Déterminer une base q-orthogonale.

Exercice 126

Soit $f : \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_2[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_2[X],\ \ f(P,Q) = \overline{P(1)}Q(1) + \overline{P(i)}Q(i) + \overline{P(-i)}Q(-i)$$

1. Montrer que f est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}_2[X]$ et déterminer sa matrice par rapport à la base canonique $(1, X, X^2)$.
2. Déterminer la forme quadratique q associée à f et appliquer l'algorithme de Gauss à q.
3. Trouver une base q-orthogonale (P_0, P_1, P_2), telle que $\deg(P_k) = k$, pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

Exercice 127

Soit f la forme hermitienne définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3,\ \ f(x,y) = 6\bar{x}_1 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2 + 9\bar{x}_3 y_3 + 2\bar{x}_1 y_2 + 2\bar{x}_2 y_1 - 2\bar{x}_1 y_3 - 2\bar{x}_3 y_1 + (2+3i)\bar{x}_2 y_3 + (2-3i)\bar{x}_3 y_2$$

1. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
2. Déterminer la forme quadratique q associée à f et appliquer l'algorithme de Gauss à q.
3. Déterminer le rang et la signature de q.

CHAPITRE 6

ESPACES HERMITIENS

6.1 Produit hermitien

6.1.1 Définition et exemples

Définition 6.2.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et h une forme hermitienne sur E.

i) On dit que h est **positif**, si
$$\forall x \in E,\ h(x,x) \geq 0$$

ii) On dit que h est **définie positive**, si
$$\forall x \in E,\ x \neq 0 \Longrightarrow h(x,x) > 0$$

iii) On appelle **produit hermitien** sur E, toute forme hermitienne sur E définie positive.

iv) Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit hermitien s'appelle un espace préhilbertien complexe.

v) Un espace préhilbertien complexe de dimension finie s'appelle un **espace hermitien**.

Exemples

1. *Le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$ est défini par :*
$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^n,\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$
avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.
Donc $\mathbb{C}^n$ muni de ce produit hermitien est un espace hermitien.

2. *Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :*
$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C}),\ f(A,B) = tr(A^*B), \quad \text{où } A^* = {}^t\overline{A}$$
Alors, f définit un produit hermitien sur $M_n(\mathbb{C})$.
En effet, il est facile de vérifier que f est une forme hermitienne.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, avec $A \neq 0$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, alors on a

$$\begin{aligned} f(A,A) = tr(A^*A) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}, \quad avec\ b_{ik} = \bar{a}_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki}a_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $f(A,A) > 0$.

3. *$l_2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ est un espace préhilbertien complexe pour le produit hermitien défini par :*

$$\forall x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n$$

avec $x = (x_n)_{n\geq 0}$ et $y = (y_n)_{n\geq 0}$.
Ici, f est bien définie, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\bar{x}_n y_n| = |x_n||y_n|$ et $|x_n||y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$.

4. *$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{C}$, est un espace préhilbertien complexe pour le produit hermitien suivant :*

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}), \forall g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}),\ \varphi(f,g) = \int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt$$

Remarque 6.2.1
Une matrice hermitienne A est dite définie positive, si la forme hermitienne définie par la matrice A est définie positive.
Donc une matrice hermitienne A est définie positive, si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ X \neq 0 \Longrightarrow {}^t\overline{X}AX > 0$$

Proposition 6.3.

Soit E un espace hermitien. Alors,

i) E possède au moins une base orthonormale.

ii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$.

iii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F^{\perp\perp} = F$.

Preuve
Même justification que dans le cas des espaces euclidiens.

6.3.1 Notations et règles de calcul

Notations

Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'un produit hermitien h. Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ \text{ on pose }\ f(x,y) = < x,y > \ \text{ et }\ f(x,x) = \|x\|^2$$

Règles de calcul

i)

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(<x,y>)}$$

ii)

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(<x,y>)}$$

iii)

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \quad \text{(Identité du prallèlogramme)}$$

iv) Identité de polarisation :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ <x,y> = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{3} i^k \|i^k x + y\|^2\right)}$$

Remarque 6.3.1
Notez que si $<x,y> = 0$*, alors on aura*

$$\|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

6.3.2 Utilisation des bases orthonormales

Soit E un espace hermitien de dimension n, muni d'une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Alors on a

1. $$\boxed{\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} <e_i, x> e_i}$$

2. $$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ <x,y> = \sum_{i=1}^{n} <x,e_i><e_i,y>}$$

3. $$\boxed{\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |<x,e_i>|^2}$$

4. Si u est un endomorphisme de E et si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de u par rapport à la base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors on a

$$\boxed{\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\},\ a_{ij} = \overline{<u(e_j),e_i>} = <e_i, u(e_j)>}$$

Preuve
Exercice

6.4 Inégalité de cauchy-Schwartz

Théorème 6.5.

Soit E un un espace préhilbertien complexe, alors on a

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E,\ |<x,y>| \leq \|x\|\|y\|}$$

Preuve

Soit $(x,y) \in E^2$,

i) *Si* $<x,y>=0$ *alors il n y a rien à démontrer, car* $0 \leq \|x\|\|y\|$.

ii) *Si* $<x,y>\neq 0$, *on pose* $\lambda = \dfrac{<x,y>}{|<x,y>|}$, *donc on aura*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \|t\lambda x + y\| \geq 0$$

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ \ \|t\lambda x + y\| \geq 0 &\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ \|x\|^2 t^2 + 2Re(<t\lambda x, y>) + \|y\|^2 \geq 0 \\ &\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \ \|x\|^2 t^2 + 2Re(t\overline{\lambda} <x,y>) + \|y\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Or on a

$$\overline{\lambda} <x,y>= \frac{\overline{<x,y>}}{|<x,y>|} <x,y>= \frac{|<x,y>|^2}{|<x,y>|} = |<x,y>|$$

Ainsi, on aura

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \|x\|^2 t^2 + 2|<x,y>|t + \|y\|^2 \geq 0$$

Nous obtenons, donc, un trinôme de second degré en t qui est toujours positif ou nul pour tout $t \in \mathbb{R}$, *donc son discriminant* $\Delta \leq 0$. *Donc on aura*

$$|<x,y>|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

D'où le résultat.

Proposition 6.6.

Soit E un espace préhilbertien complexe, alors on a

$$\boxed{|<x,y>| = \|x\|\|y\| \Longleftrightarrow (x,y) \text{ est lié}}$$

Preuve

$(\Longrightarrow)$ *Supposons que* $|<x,y>| = \|x\|\|y\|$.

Si $x = 0$ *ou* $y = 0$, *alors* (x,y) *est lié. Donc, on peut supposer que* $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$.

Puisque $|<x,y>| = \|x\|\|y\|$, *alors le discriminant du trinôme en t :*

$$\|x\|^2 t^2 - 2|<x,y>|t + \|y\|^2$$

est nul, donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$, *tel que*

$$\|x\|^2 t_0^2 - 2|<x,y>|t_0 + \|y\|^2 = 0$$

donc on aura

$$\|t_0\lambda x - y\|^2 = 0 \quad \text{où}\ \ \lambda = \frac{<x,y>}{|<x,y>|}$$

Ainsi, on aura $t_0\lambda x - y = 0$, *donc* (x,y) *est lié.*

$(\Longleftarrow)$ *Supposons que (x,y) est lié, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $y = \alpha x$, donc on aura*

$$|<x,y>| = |<x,\alpha x>| = |\alpha|\|x\|^2 = \|x\|\|y\|$$

Corollaire 6.7.

Soit E un espace préhilbertien complexe, alors l'application dédinie par :

$$\forall x \in E, \ \ \|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

est une norme sur E, appelée norme euclidienne sur E.

Preuve
Même démonstration que dans le cas des espaces euclidiens.

6.8 Endomorphismes d'un espace hermitien

6.8.1 Endomorphisme adjoint

Proposition 6.9.

Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme u de E, il existe un unique endomorphisme v de E, tel que

$$\boxed{\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \ <u(x),y> = <x,v(y)>}$$

Dans ce cas, v s'appelle l'adjoint de u et se note u^*.

Preuve
Pour chaque $y \in E$, on considère la forme linéaire φ_y sur E définie par :

$$\forall x \in E, \ ; \varphi_y(x) = <y,u(x)>$$

Puisque tout produit hermitien est non dégénéré et puisque E est de dimension finie, alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow E^* \\ z &\longmapsto \Phi(z), \ \ où \ \ \forall x \in E, \ \Phi(z)(x) = <z,x> \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On a $\varphi_y \in E^*$, donc il existe un unique $z_y \in E$, tel que $\Phi(z_y) = \varphi_y$, donc si pour chaque $y \in E$, $v(y) = z_y$, alors on définit bien une application $v : E \longrightarrow E$.
On vérifie facilement, comme dans le cas des espaces euclidiens, que v est linéaire et on a

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \ \varphi_y(x) = \Phi(z_y)(x) &\Longrightarrow \forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \ <y,u(x)> = <z_y,x> \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \ <y,u(x)> = <v(y),x> \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \ \overline{<u(x),y>} = \overline{<x,v(y)>} \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \ <u(x),y> = <x,v(y)> \end{aligned}$$

L'unicité de v se démontre de la même manière que dans le cas des espaces euclidiens.

Proposition 6.10.

Soit E un espace hermitien. Alors on a

i) $\forall u \in L(E),\ \ u^{**} = u$.

ii) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E),\ \ (u+v)^* = u^* + v^*$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in L(E),\ \ (\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$.

iv) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E),\ \ (v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

v) Si β est une **base orthonormale** de E et si $A = Mat(u, \beta)$, alors on a

$$Mat(u^*, \beta) = A^*$$

Preuve

i), ii), iii) et iv) sont faciles à vérifier

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *et* $Mat(u^*, \beta) = B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$*, alors on sait que*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2,\ \ a_{ij} =< e_i, u(e_j) > \ \ et\ \ b_{ij} =< e_i, u^*(e_j) >$$

Ainsi, on aura

$$b_{ij} =< e_i, u^*(e_j) >=< u(e_i), e_j >= \overline{< e_j, u(e_i) >} = \overline{a_{ij}}$$

Donc, $B = {}^t(\overline{A}) = A^*$.

Proposition 6.11.

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E, alors

i) $\ker(u^*) = Im(u)^{\perp}$.

ii) $Im(u^*) = \ker(u)^{\perp}$.

iii) Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Preuve

Se démontre de la même manière que dans le cas des espaces euclidiens.

6.11.1 Endomorphismes normaux

Définition 6.12.

Soit E un espace hermitien, on dit qu'un endomorphisme u de E est normal, si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Remarque 6.12.1

1. *Une matrice* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *est dite normale, si* $A^*A = AA^*$.
2. *Soient* E *un espace hermitien,* $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *une* ***base orthonormale*** *de* E*,* u *un endomorphisme de* E *et* $A = Mat(u, \beta)$*, alors*

$$u\ \ est\ normal \Longleftrightarrow A\ \ est\ normale$$

3. *Si* u *est un endomorphisme normal, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $\lambda Id_E - u$ *est normal.*

Lemme 6.13.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, telle que $\operatorname{tr}(AA^*) = 0$. Alors $A = 0$.

Preuve

Posons $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, $A^* = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ *et* $AA^* = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, *donc on aura*

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,m\},\ b_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned} tr(AA^*) &= \sum_{j=1}^{n} c_{jj} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \end{aligned}$$

Puisque $tr(AA^*) = 0$, *alors pour tout* $(i,j) \in \{1,2,\ldots,m\}^2$, $|a_{ij}|^2 = 0$. *D'où le résultat.*

Proposition 6.14.

Soient un espace hermitien et u un endomorphisme normal de E, alors

i) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

ii) $\ker(u) = \ker(u^*)$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \ker(\lambda Id_E - u) = \ker(\lambda Id_E - u^*)$.

iv) Si F un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Preuve

i) *Soit* $x \in E$, *alors on a*

$$\|u(x)\|^2 = < u(x), u(x) > = < u^*(u(x)), x > = < u(u^*(x)), x > = < u^*(x), u^*(x) > = \|u^*(x)\|^2$$

ii) *Soit* $x \in E$, *alors on a*

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Longleftrightarrow u(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \|u(x)\| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \|u^*(x)\| = 0 \\ &\Longleftrightarrow u^*(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \ker(u^*) \end{aligned}$$

iii) *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, puisque $u^* \circ u = u \circ u^*$, alors on voit facilement, par un simple calcul, qu'on a aussi $(\lambda Id_E - u)^*(\lambda Id_E - u) = (\lambda Id_E - u)(\lambda Id_E - u)^*$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'endomorphisme $\lambda Id_E - u$ est normal. Donc d'après ii), on a le résultat.*

iv) *Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par u et soit $p = \dim(F)$, avec $p \geq 1$.*
Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, n)$ une base orthonormale de E, telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F et $(e_{p+1}, \dots, n)$ une base de $F^\perp$.
Soit M la matrice de u par rapport à base β. Puisque F est stable par u, alors M s'écrit sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad avec\ A \in M_p(\mathbb{C}),\ B \in M_{p,n-p}(\mathbb{C})\ et\ C \in M_{n-p}(\mathbb{C})$$

Donc pour montrer que $F^\perp$ est stable par u il suffit de montrer que $B = 0$.
La base β est orthonormale, donc $Mat(u^*, \beta) = M^*$. Par conséquent on aura,

$$\begin{aligned}
u^* \circ u = u \circ u^* &\iff M^*M = MM^* \\
&\iff \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B + C^*C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^* + BB^* & BC^* \\ CB^* & CC^* \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow A^*A = AA^* + BB^* \\
&\Longrightarrow tr(A^*A) = tr(AA^* + BB^*) = tr(AA^*) + tr(BB^*) \\
&\Longrightarrow tr(BB^*) = 0 \quad (car\ \ tr(A^*A) = tr(AA^*)) \\
&\Longrightarrow B = 0 \quad (d'après\ le\ lemme\ précédent)
\end{aligned}$$

Donc $F^\perp$ est stable par u.

Théorème 6.15.

Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme normal de E, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Preuve
On procède par récurrence sur n, avec $n = \dim(E)$.
Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
H.R "Supposons que $n > 1$ et que tout endomorphisme normal sur un espace hermitien de dimension $< n$, possède une base orthonormale formée de vecteurs propres".
Soit E un espace hermitien de dimension n et soit u un endomorphisme normal de E.
Le corps $\mathbb{C}$ est algèbriquement clos, donc u possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
Soit E_1 un vecteur propre associé à λ, alors $F = Vect(e_1)$ est stable par u, donc d'après la proposition précédente, $F^\perp$ est stable par u.
Soit v la réstriction de u à $F^\perp$, alors v est un endomorphisme normal de $F^\perp$, car u est normal.
On a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = n - 1$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, \dots, e_n)$ de $F^\perp$ formée de vecteurs propres de v.
Ainsi, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Remarque 6.15.1
Toute matrice normale est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

6.15.1 Endomorphismes hermitiens

Définition 6.16.

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.

i) On dit que u est hermitien (ou autoadjoint), si $u^* = u$.

ii) On dit que u est antihermitien, si $u^* = -u$.

Remarque 6.16.1

1. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne, si $A^* = A$.*
2. *Soit β une* ***base orthonormale*** *de E et soit $A = Mat(u, \beta)$, alors*

$$(u \text{ est hermitien}) \Longleftrightarrow (A \text{ est hermitienne})$$

3. *Tout endomorphisme hermitien est normal.*

Proposition 6.17.

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme hermitien de E. Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles.

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, alors il existe $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.
Donc, on aura

$$\begin{aligned}
< u(x_0), x_0 >=< x_0, u^*(x_0) > &\Longrightarrow < u(x_0), x_0 >=< x_0, u(x_0) > \quad (car\ u^* = u)\\
&\Longrightarrow < \lambda x_0, x_0 >=< x_0, \lambda x_0 >\\
&\Longrightarrow \overline{\lambda}\|x_0\|^2 = \lambda\|x_0\|^2\\
&\Longrightarrow \overline{\lambda} = \lambda \quad (car\ \|x_0\|^2 \neq 0)\\
&\Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Théorème 6.18.

Soient E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme hermitien u, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Preuve

Il suffit de remarquer que tout endomorphisme hermitien est normal.

Remarque 6.18.1

Toute matrice hermitienne est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

6.18.1 Endomorphismes unitaires

Définition 6.19.

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.
On dit que u est unitaire, si $u^*u = Id_E$.

Remarque 6.19.1

1. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire, si $A^*A = I$.*
2. *Soit β une **base orthonormale** de E et soit $A = Mat(u, \beta)$, alors*
$$(u \text{ est unitaire}) \Longleftrightarrow (A \text{ est unitaire})$$
3. *Tout endomorphisme unitaire u est inversible et on a $u^{-1} = u^*$.*
4. *Tout endomorphisme unitaire est normal.*

Proposition 6.20.

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E. Alors propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est unitaire,

ii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$,

iii) $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < u(x), u(y) > = < x, y >$.

Preuve

i) $\Longrightarrow$ ii) *Supposons que u est unitaire, donc pour tout $x \in E$, $u^*(u(x)) = x$.*
Soit $x \in E$, alors on a
$$\|u(x)\|^2 = < u(x), u(x) > = < u^*(u(x)), x > = < x, x > = \|x\|^2$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) *Supposons que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.*
Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors, d'après l'identité de polarisation, on a
$$\begin{aligned}
< u(x), u(y) > &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} i^k \|i^k u(x) + u(y)\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} i^k \|u(i^k x) + u(y)\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} i^k \|u(i^k x + y)\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} i^k \|i^k x + y\|^2 \\
&= < x, y >
\end{aligned}$$

iii) $\Longrightarrow$ i) *Supposons que $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < u(x), u(y) > = < x, y >$.*
Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a
$$\begin{aligned}
\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < u(x), u(y) > = < x, y > &\Longrightarrow \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < u^*(u(x)), y > = < x, y > \\
&\Longrightarrow \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < (u^*u)(x), y > = < x, y > \\
&\Longrightarrow \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < (u^*u)(x) - x, y > = 0
\end{aligned}$$

Fixons $x \in E$, alors on aura

$$\forall y \in E, \ < (u^*u)(x) - x, y >= 0$$

Le produit hermitien est non dégénérée, donc on aura

$$\forall x \in E, \ (u^*u)(x) - x = 0$$

Donc pour tout $x \in E$, on a $(u^*u)(x) = x$. D'où le résultat.

Remarque 6.20.1
Soit E un espace hermitien, u un endomorphisme uniaire de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, alors $|\lambda| = 1$.
En effet, si λ est une valeur propre de u, alors il existe $x_0 \in E$, avec $x_0 \neq 0$, tel que $u(x_0) = \lambda x_0$, donc d'après la proposition précédente, on a

$$\|x_0\| = \|u(x_0)\| = \|\lambda x_0\| = |\lambda|\|x_0\|$$

$x_0 \neq 0$, donc $\|x_0\| \neq 0$ et par suite $|\lambda| = 1$.

Proposition 6.21.

Soit E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.

i) Si u est unitaire, alors l'image par u d'une base orthonormale de E est une base orthonormale de E.

ii) S'il existe une base orthonormale β de E, telle que $u(\beta)$ soit une base orthonormale de E, alors u est unitaire.

Preuve
Exercice

Remarque 6.21.1

1. *La matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale est une matrice unitaire.*
2. *Pour tout matrice normale $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ et une matrice unitaire $P \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $A = P^*DP$.*
3. *Pour tout matrice hermitienne $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ et une matrice unitaire $P \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $A = P^*DP$.*

Théorème 6.22.

Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme unitaire u, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice U de u s'écrit sous la forme :

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$.

Preuve
Un endomorphisme unitaire est normal, donc il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de u. Soit U la matrice de u par rapport à cette base, alors U est diagonale et les éléments diagonaux de U sont tous de module 1*, donc chaque élément diagonal s'écrit sous la forme* $e^{i\theta}$ *avec un certain* $\theta \in \mathbb{R}$.

6.23 Exercices

Exercice 128
Soient n un entier ≥ 1 et $h : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2,\ \ h(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{i\theta})}Q(e^{i\theta})\,d\theta$$

1. Montrer que h défini un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.
3. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.
   a) Calculer $||P||^2$.
   b) Soit $M = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que $M \geq 1$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 129
1. Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, il exixte deux matrices hermitiennes uniques A et B, telles que $M = A + iB$.
2. Montrer que si $M = A + iB$, où A et B sont hermitiennes, alors

$$(M \text{ est normale}) \Longleftrightarrow AB = BA$$

Exercice 130
Pour tout entier $n \geq 3$, on considère le groupe G des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$.
Posons $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, alors on sait que

$$G = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$$

On désigne par E l'ensemble de toutes les applications de G dans $\mathbb{C}$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose

$$< f, g >= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(\omega^k)}g(\omega^k)$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$.
2. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit hermitien sur E.
3. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on définit l'application $f_k : G \longrightarrow \mathbb{C}$, par :

$$\forall z \in G,\ f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{n}}$$

   et on considère l'application $U : E \longrightarrow E$, définie par :

$$\forall f \in E, \forall z \in G,\ U(f)(z) = f(\omega z)$$

   a) Montrer que U est un endomorphisme unitaire de E et déterminer U^*.

b) Montrer que pour tout $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, f_k est un vecteur propre de U.

c) En déduire que $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ est une base orthonormale de E.

4. Pour chaque $\lambda \in [0,1]$, on pose $A_\lambda = Id_E - \lambda U - (1-\lambda)U^*$.

a) Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$, A_λ est un endomorphisme normal.

b) Pour quelle valeur de λ, A_λ est-t-il un endomorphisme hermitien ?

c) Dans le cas où A_λ est hermitien, montrer que

$$\forall f \in E,\ < A_\lambda(f), f > \geq 0$$

Exercice 131

On munit $M_n(\mathbb{C})$ de son produit hermitien usuel :

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2,\ < A, B >= \operatorname{tr}(A^*B)$$

On désigne par $\mathcal{U}_n$ le groupe des matrices unitaires d'ordre n. Montrer que

$$\forall U \in \mathcal{U}_n,\ \forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \|UA\| = \|AU\| = \|\|U^*AU\|$$

Exercice 132

Soit U une matrice unitaire de $M_n(\mathbb{C})$, tel que -1 n'est pas valeur propre de U.

1. Montrer que $U + I$ est inversible.
2. On pose $H = -i(U+I)^{-1}(U-I)$. Montrer que H est hermitien.
3. Quel est le lien entre les valeurs propres de H et celles de U ?

Exercice 133

Soit E un espace hermitien. Pour tout endomorphisme u de E, on pose

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

1. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est hermitien et $\|u\| \leq 1$,

ii) Il existe un endomorphisme unitaire h de u, tel que $u = \frac{1}{2}(h + h^*)$.

2. En déduire que tout endomorphisme de E, s'écrit comme combinaison linéaire de quatres endomorphismes unitaires.

Exercice 134

1. Montrer que pour toute matrice unitaire U, il existe une matrice hermitienne H, telle que $U = e^{iH}$.
2. Montrer que pour toute matrice complexe A, il existe une matrice hermitienne définie positive R et une matrice hermitienne H, telles que $A = e^{iH}R$.

Exercice 135

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est normal,

ii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$,

iii) Tout sous-espace vectoriel stable par u est aussi stable par u^*,

iv) Tout sous-espace vectoriel F stable par u, $F^\perp$ est aussi stable par u,

v) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $u^* = P(u)$.

INDEX