11 FUNCIONES

En esta unidad trataremos el estudio, a través de relaciones funcionales, de la interpretación, representación y tratamiento de la información. En cursos anteriores los alumnos han ido conociendo algunos tipos de funciones, abordaremos conceptos nuevos básicos que los alumnos deberán conocer para poder adentrarse sin dificultades en la siguiente unidad.

El uso del lenguaje gráfico y algebraico será el hilo conductor de la unidad, los alumnos podrán desarrollar procesos de matematización en contextos funcionales sencillos y aprenderán a describir características de problemas cotidianos que puedan ser representados gráficamente.

Los contenidos de esta unidad se presentan partiendo de un problema o ejercicio sencillo, de esta forma podemos esperar que el propio alumno lo resuelva y sería deseable que también fuera capaz de sacar sus propias conclusiones teóricas.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Comunicación lingüística (CL)

Es la protagonista de toda la unidad teniendo especial importancia en las secciones: Interpretación de gráficas, Matemáticas vivas y Funciones en los medios de comunicación, así como en la sección Lee y comprende las matemáticas de final del bloque.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

Se desarrolla lo largo de toda la unidad y especialmente en la sección Matemáticas vivas.

Competencia digital (CD)

Se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Competencias sociales y cívicas (CSC)

Está presente en varias actividades que permitirán desarrollar un juicio moral y razonar sobre la realidad social. Deben destacarse las actividades propuestas en Funciones en los medios de comunicación.

Competencia aprender a aprender (CAA)

En toda la unidad se considera la necesidad de potenciar en los alumnos su espíritu crítico potenciando el pensamiento creativo. La puesta en común de los distintos trabajos es una ocasión para la integración de conocimientos adquiridos por distintas vías así como para el análisis y la comparación de distintas formas de abordar un mismo objetivo.

Competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (CSIEE)

Se desarrolla especialmente en varias de las últimas actividades de cada sección (Investiga o Desafío).

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos, ya que hay que tener en cuenta el tiempo necesario para la exposición de los trabajos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Reconocer funciones expresadas en sus diferentes formas y contextos.
- Comprender el concepto de dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, continuidad y monotonía de una función.
- Reconocer funciones simétricas y funciones periódicas.
- Interpretar gráficas.
- Realizar una tarea de trabajo cooperativo utilizando funciones.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen, algunas **actividades de refuerzo y de ampliación** que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

Material complementario

En el material complementario **Comprende y resuelve problemas** se proponen actividades para trabajar la comprensión y la resolución de problemas relacionadas con el estudio de funciones.

Por otra parte, el material complementario **Practica**+ cuenta con un repaso de los contenidos y procedimientos estudiados sobre funciones y se proponen nuevas actividades para repasar y afianzar dichos contenidos.

Además, para ayudar a los alumnos a comprender y practicar conceptos relacionados con las funciones pueden acceder a la lección 1322 de la web www.mismates.es.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD				
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**	**Relación de actividades del libro del alumno**	**Competencias clave**
Relaciones funcionales Formas de expresar una función	1. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función.	1.1. Identifica funciones y las utiliza para representar relaciones de la vida cotidiana. 1.2. Determina las diferentes formas de expresar una función.	1-3 35, 47 4-9 36	CL CMCT CD CSC CAA
Dominio y recorrido. Puntos de corte Dominio y recorrido Puntos de corte con los ejes	2. Identificar en una función el dominio y el recorrido. 3. Determinar, en la función, los puntos de corte con los ejes tanto gráfica como analíticamente.	2.1. Identifica el dominio y el recorrido de una función interpretándolos dentro de un contexto. 3.1. Calcula e interpreta adecuadamente los puntos de corte con los ejes. 3.2. Representa correctamente los puntos de corte con los ejes.	10-13, 16 37, 38 11, 15 39, 49 14	CL CMCT CSC CAA
Continuidad	4. Reconocer cuando una función es continua. 5. Identificar los puntos de discontinuidad de una función.	4.1. Decide cuándo una función es continua a partir de un enunciado o una gráfica. 4.2. Interpreta dentro de un contexto si una función es continua o no. 5.1. Reconoce los puntos de discontinuidad de una función y comprende su aparición.	17, 19, 41, 45 20 18, 21	CL CMCT CD CSC CAA CSIEE
Crecimiento. Máximos y mínimos	6. Reconocer cuando una función es creciente y cuando es decreciente. 7. Identificar los máximos y los mínimos de una función.	6.1. Distingue cuándo una función es creciente o decreciente en un intervalo. 6.2. Comprende el comportamiento de una función según sea creciente o decreciente. 7.1. Reconoce los máximos y los mínimos de una función y su relación con el crecimiento o el decrecimiento de la misma.	22, 23 24, 25 43, 45, 46 41, 42, 44	CL CMCT CSC CAA CSIEE
Simetrías y periodicidad Simetrías Periodicidad	8. Reconocer si una función es simétrica o periódica.	8.1. Analiza cuándo una función es simétrica y las características que presenta. 8.2. Identifica funciones periódicas y calcula su período.	26-28 48-50 29-31 51, 52	CL CMCT CSC CAA CSIEE
Interpretación de gráficas	9. Describir con el lenguaje apropiado, a partir de una gráfica, las características de una función. 10. Analizar gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y formular conjeturas.	9.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente. 10.1. Asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.	32, 33 53-58 F1, F2 34 Matemáticas vivas 1-3 Trabajo cooperativo	CL CMCT CSC CAA CSIEE

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

Actividades de Refuerzo
Actividades de Ampliación

Propuesta de Evaluación A
Propuesta de Evaluación B

MATERIAL COMPLEMENTARIO

Comprende y resuelve problemas

Practica+

MisMates.es
Lección 1322
de la web www.mismates.es

Contenidos de la unidad

Presentación de la unidad
Ideas previas
Repasa lo que sabes

1. Relaciones funcionales

2. Dominio y recorrido. Puntos de corte
   - Puntos de corte con los ejes

3. Continuidad

4. Crecimiento. Máximos y mínimos

5. Simetría y periodicidad
   - Simetrías
   - Periodicidad

6. Interpretación de gráficas

¿Qué tienes que saber?
- Dominio, recorrido y puntos de corte.
- Continuidad y monotonía.
- Funciones simétricas.
- Funciones periódicas.

Actividades finales

Matemáticas vivas
La Vuelta Ciclista a España
- Estudio de funciones a partir de perfiles de diferentes etapas

Avanza
Tasa de variación media

Funciones en los medios de comunicación

PARA EL ALUMNO

Matemáticas en el día a día
Contenido WEB. Primeras tablas de valores

GeoGebra. Gráfica de una función

GeoGebra. Gráfica de una función no continua

GeoGebra. Función periódica

Actividades interactivas

Trabajo cooperativo
Tarea cuya estrategia es *Preparar la tarea,* adaptación del Laboratorio de Innovación Educativo del colegio Ártica a partir de David y Roger Mel Johnson


11

FUNCIONES

IDEAS PREVIAS
- Coordenadas cartesianas.
- Intervalos.
- Expresiones algebraicas.
- Valor numérico.

Hay muchas situaciones de la vida cotidiana en las que se relacionan dos magnitudes; por ejemplo, si nos fijamos en el crecimiento de un árbol a lo largo de un período de tiempo, podemos observar la relación existente entre las magnitudes *altura* y *tiempo*. En efecto, a medida que pasan los meses o los años, varía la altura, que depende del tiempo transcurrido.

REPASA LO QUE SABES

1. Dibuja en tu cuaderno el plano cartesiano y representa en él los siguientes puntos.
   a) $A(1, 2)$, $B(2, -3)$, $C(-2, -4)$ y $D(-3, 2)$
   b) Un punto, E, de abscisa 4 y ordenada -1.
   c) Un punto, F, de abscisa -2 y ordenada 3.
2. ¿Qué condición deben cumplir las coordenadas de un punto que pertenece al eje de abscisas? ¿Y si pertenece al eje de ordenadas?
3. Representa en la recta real los siguientes intervalos.
   a) $(2, 5)$ d) $(3, +\infty)$
   b) $(-1, 3]$ e) $(-\infty, 2)$
   c) $[-2, 4)$ f) $[-1, +\infty)$
4. Escribe la expresión algebraica que permite hallar el área de un cuadrado según la longitud de su lado. Calcula el valor de la expresión si el lado mide 2 cm, 4 cm y 7 cm, respectivamente.

mac3e39

MATEMÁTICAS EN EL DÍA A DÍA

En Mesopotamia y en el antiguo Egipto se realizaron las primeras tablas que relacionan los números naturales con sus cuadrados, sus cubos o sus inversos.

213

Sugerencias didácticas

En cursos anteriores los alumnos han manejado funciones, en esta unidad se formalizarán algunas de sus características como el dominio, la continuidad, la monotonía, simetrías y periodicidad.

Es importante destacar que la introducción a cada uno de estos conceptos va a realizarse mediante ejemplos cotidianos y cercanos.

Los alumnos deberán aprender a utilizar el lenguaje matemático propio de las relaciones funcionales.

Antes de comenzar la unidad debemos repasar los conceptos de intervalos en la recta real y coordenadas de un punto en el plano. Y debemos recordarles qué es una expresión algebraica y cómo ha de calcularse el valor numérico.

Contenido WEB. PRIMERAS TABLAS DE VALORES

En la sección Matemáticas en el día a día se introduce un recurso TIC para complementar la página de inicio con información relativa a la unidad. En él se explica la relación entre los primeros usos de tablas ordenadas con relaciones entre conjuntos de números y las funciones que se utilizan en la actualidad. Puede utilizarse para motivar a los alumnos antes de comenzar a trabajar la unidad o como ampliación para aquellos alumnos que muestren un interés especial.

Repasa lo que sabes

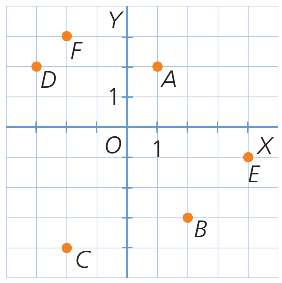
Soluciones de las actividades

1. Dibuja en tu cuaderno el plano cartesiano y representa en él los siguientes puntos.

a) $A(1, 2)$, $B(2, -3)$, $C(-2, -4)$ y $D(-3, 2)$

b) Un punto, E, de abscisa 4 y ordenada -1.

c) Un punto, F, de abscisa -2 y ordenada 3.



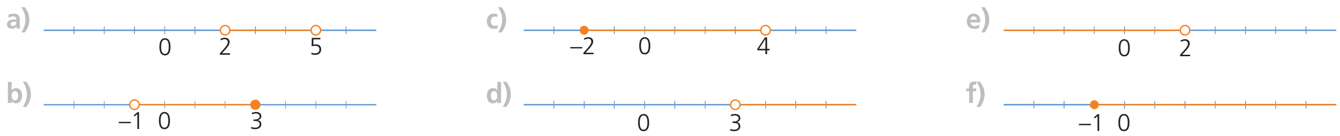
2. ¿Qué condición deben cumplir las coordenadas de un punto que pertenece al eje de abscisas? ¿Y si pertenece al eje de ordenadas?

Para que un punto pertenezca al eje de abscisas su segunda coordenada, la ordenada, debe ser 0.

Un punto que pertenezca al eje de ordenadas tiene por abscisa 0.

3. Representa en la recta real los siguientes intervalos.

a) $(2, 5)$ b) $(-1, 3]$ c) $[-2, 4)$ d) $(3, +\infty)$ e) $(-\infty, 2)$ f) $[-1, +\infty)$

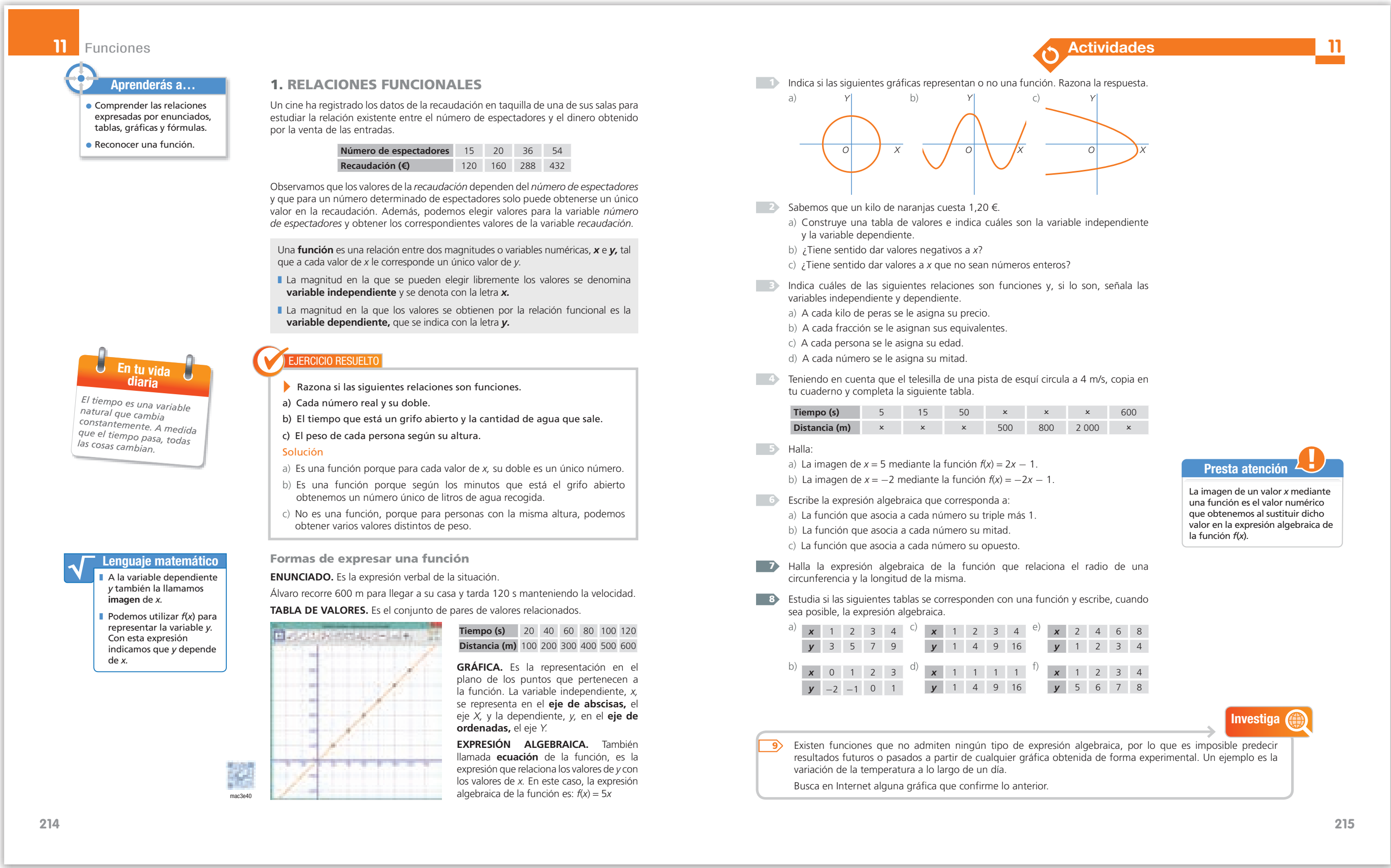


4. Escribe la expresión algebraica que permite hallar el área de un cuadrado según la longitud de su lado. Calcula el valor de la expresión si el lado mide 2 cm, 4 cm y 7 cm, respectivamente.

Área del cuadrado $= l \cdot l = l^2$

Lado 2 cm: $A = 4$ cm^2 Lado 4 cm: $A = 16$ cm^2 Lado 7 cm: $A = 49$ cm^2

1. Relaciones funcionales



11 Funciones

Aprenderás a…

- Comprender las relaciones expresadas por enunciados, tablas, gráficas y fórmulas.
- Reconocer una función.

1. RELACIONES FUNCIONALES

Un cine ha registrado los datos de la recaudación en taquilla de una de sus salas para estudiar la relación existente entre el número de espectadores y el dinero obtenido por la venta de las entradas.

Número de espectadores	15	20	36	54
Recaudación (€)	120	160	288	432

Observamos que los valores de la *recaudación* dependen del *número de espectadores* y que para un número determinado de espectadores solo puede obtenerse un único valor en la recaudación. Además, podemos elegir valores para la variable *número de espectadores* y obtener los correspondientes valores de la variable *recaudación*.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, ***x*** e ***y***, tal que a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

- La magnitud en la que se pueden elegir libremente los valores se denomina **variable independiente** y se denota con la letra ***x***.
- La magnitud en la que los valores se obtienen por la relación funcional es la **variable dependiente**, que se indica con la letra ***y***.

En tu vida diaria

El tiempo es una variable natural que cambia constantemente. A medida que el tiempo pasa, todas las cosas cambian.

EJERCICIO RESUELTO

Razona si las siguientes relaciones son funciones.

a) Cada número real y su doble.

b) El tiempo que está un grifo abierto y la cantidad de agua que sale.

c) El peso de cada persona según su altura.

Solución

a) Es una función porque para cada valor de *x*, su doble es un único número.

b) Es una función porque según los minutos que está el grifo abierto obtenemos un número único de litros de agua recogida.

c) No es una función, porque para personas con la misma altura, podemos obtener varios valores distintos de peso.

Lenguaje matemático

- A la variable dependiente *y* también la llamamos **imagen** de *x*.
- Podemos utilizar *f*(*x*) para representar la variable *y*. Con esta expresión indicamos que *y* depende de *x*.

Formas de expresar una función

ENUNCIADO. Es la expresión verbal de la situación.

Álvaro recorre 600 m para llegar a su casa y tarda 120 s manteniendo la velocidad.

TABLA DE VALORES. Es el conjunto de pares de valores relacionados.

Tiempo (s)	20	40	60	80	100	120
Distancia (m)	100	200	300	400	500	600

GRÁFICA. Es la representación en el plano de los puntos que pertenecen a la función. La variable independiente, *x*, se representa en el **eje de abscisas,** el eje *X*, y la dependiente, *y*, en el **eje de ordenadas,** el eje *Y*.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA. También llamada **ecuación** de la función, es la expresión que relaciona los valores de *y* con los valores de *x*. En este caso, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = 5x$

mac3e40

214

Actividades 11

1 Indica si las siguientes gráficas representan o no una función. Razona la respuesta.

a) b) c)

2 Sabemos que un kilo de naranjas cuesta 1,20 €.

a) Construye una tabla de valores e indica cuáles son la variable independiente y la variable dependiente.

b) ¿Tiene sentido dar valores negativos a *x*?

c) ¿Tiene sentido dar valores a *x* que no sean números enteros?

3 Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y, si lo son, señala las variables independiente y dependiente.

a) A cada kilo de peras se le asigna su precio.

b) A cada fracción se le asignan sus equivalentes.

c) A cada persona se le asigna su edad.

d) A cada número se le asigna su mitad.

4 Teniendo en cuenta que el telesilla de una pista de esquí circula a 4 m/s, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla.

Tiempo (s)	5	15	50	×	×	×	600
Distancia (m)	×	×	×	500	800	2 000	×

5 Halla:

a) La imagen de $x = 5$ mediante la función $f(x) = 2x - 1$.

b) La imagen de $x = -2$ mediante la función $f(x) = -2x - 1$.

6 Escribe la expresión algebraica que corresponda a:

a) La función que asocia a cada número su triple más 1.

b) La función que asocia a cada número su mitad.

c) La función que asocia a cada número su opuesto.

7 Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el radio de una circunferencia y la longitud de la misma.

8 Estudia si las siguientes tablas se corresponden con una función y escribe, cuando sea posible, la expresión algebraica.

a)

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

b)

x	0	1	2	3
y	−2	−1	0	1

c)

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

d)

x	1	1	1	1
y	1	4	9	16

e)

x	2	4	6	8
y	1	2	3	4

f)

x	1	2	3	4
y	5	6	7	8

Presta atención

La imagen de un valor *x* mediante una función es el valor numérico que obtenemos al sustituir dicho valor en la expresión algebraica de la función *f*(*x*).

Investiga

9 Existen funciones que no admiten ningún tipo de expresión algebraica, por lo que es imposible predecir resultados futuros o pasados a partir de cualquier gráfica obtenida de forma experimental. Un ejemplo es la variación de la temperatura a lo largo de un día.

Busca en Internet alguna gráfica que confirme lo anterior.

215

Sugerencias didácticas

Resultará sencilla la comprensión por parte de los alumnos de qué es una relación funcional, bastará recordar algunas situaciones de la vida cotidiana y pedir que ellos citen más. Es fundamental que presentemos ejemplos de relaciones entre variables que no sean funcionales por medio de enunciados, tablas y gráficas, para que sepan distinguir.

Es recomendable que de los enunciados que sugieran se cree la tabla de valores, la gráfica y la expresión algebraica. Será necesario que reconozcan cuáles son y qué valores toman la variable independiente y la dependiente.

Conviene trabajar en la modelación de las expresiones algebraicas de una función dada por un enunciado o una tabla.

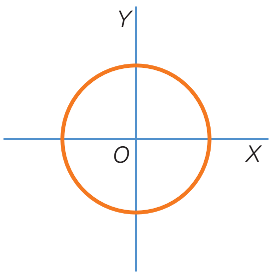
GeoGebra. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Se muestra la gráfica de la función $f(x) = 5x$. Puede utilizarse pulsando sobre la barra de navegación para ver el proceso paso a paso: primero se colocan los puntos y a continuación la recta, o activando el botón Reproduce de modo que la construcción se realizará automáticamente sin necesidad de interacción con el archivo. Este recurso completa la explicación del libro. Puede proponerse a los alumnos representar otras funciones sencillas o comprobar los resultados de los ejercicios 4 y 8.

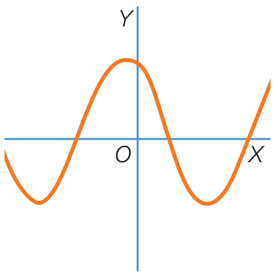
Soluciones de las actividades

1 Indica si las siguientes gráficas representan o no una función. Razona la respuesta.

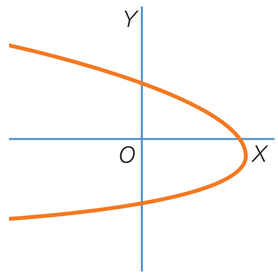
a)



b)



c)



a) y **c)** No es función, un mismo valor *x* tiene dos imágenes.

b) Es función, a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

2 Sabemos que un kilo de naranjas cuesta 1,20 €.

a) Construye una tabla de valores e indica cuáles son la variable independiente y la variable dependiente.

b) ¿Tiene sentido dar valores negativos a x?

c) ¿Tiene sentido dar valores a x que no sean números enteros?

a)

Cantidad (kg)	1	2	3	4
Precio (€)	1,20	2,40	3,60	4,80

La variable independiente es *la cantidad* y la variable dependiente es *el precio*.

b) No tiene sentido.

c) Si tiene sentido porque podemos comprar fracciones de kilo de naranjas.

3 Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y, si lo son, señala las variables independiente y dependiente.

a) A cada kilo de peras se le asigna su precio.

b) A cada fracción se le asignan sus equivalentes.

c) A cada persona se le asigna su edad.

d) A cada número se le asigna su mitad.

a) Es función: la variable independiente es *la cantidad* y la dependiente *el precio*.

b) No es función.

c) Es función: la variable independiente es *la persona* y la dependiente es *la edad*.

d) Es función: la variable independiente es *los números* y la dependiente es la mitad de *los números*.

4 Teniendo en cuenta que el telesilla de una pista de esquí circula a 4 m/s, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla.

Tiempo (s)	5	15	50	×	×	×	600
Distancia (m)	×	×	×	500	800	2 000	×

Tiempo (s)	5	15	50	125	200	500	600
Distancia (m)	20	60	200	500	800	2 000	2 400

5 Halla:

a) La imagen de $x = 5$ mediante la función $f(x) = 2x - 1$.

b) La imagen de $x = -2$ mediante la función $f(x) = -2x - 1$.

a) $f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

b) $f(-2) = -2 \cdot (-2) - 1 = 3$

6 Escribe la expresión algebraica que corresponda a:

a) La función que asocia a cada número su triple más 1.

b) La función que asocia a cada número su mitad.

c) La función que asocia a cada número su opuesto.

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ c) $f(x) = -x$

7 Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el radio de una circunferencia y la longitud de la misma.

$f(r) = 2\pi r$

8 Estudia si las siguientes tablas se corresponden con una función y escribe, cuando sea posible, la expresión algebraica.

a)

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

b)

x	0	1	2	3
y	−2	−1	0	1

c)

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

d)

x	1	1	1	1
y	1	4	9	16

e)

x	2	4	6	8
y	1	2	3	4

f)

x	1	2	3	4
y	5	6	7	8

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x - 2$

c) $f(x) = x^2$

d) No es función.

e) $f(x) = \dfrac{x}{2}$

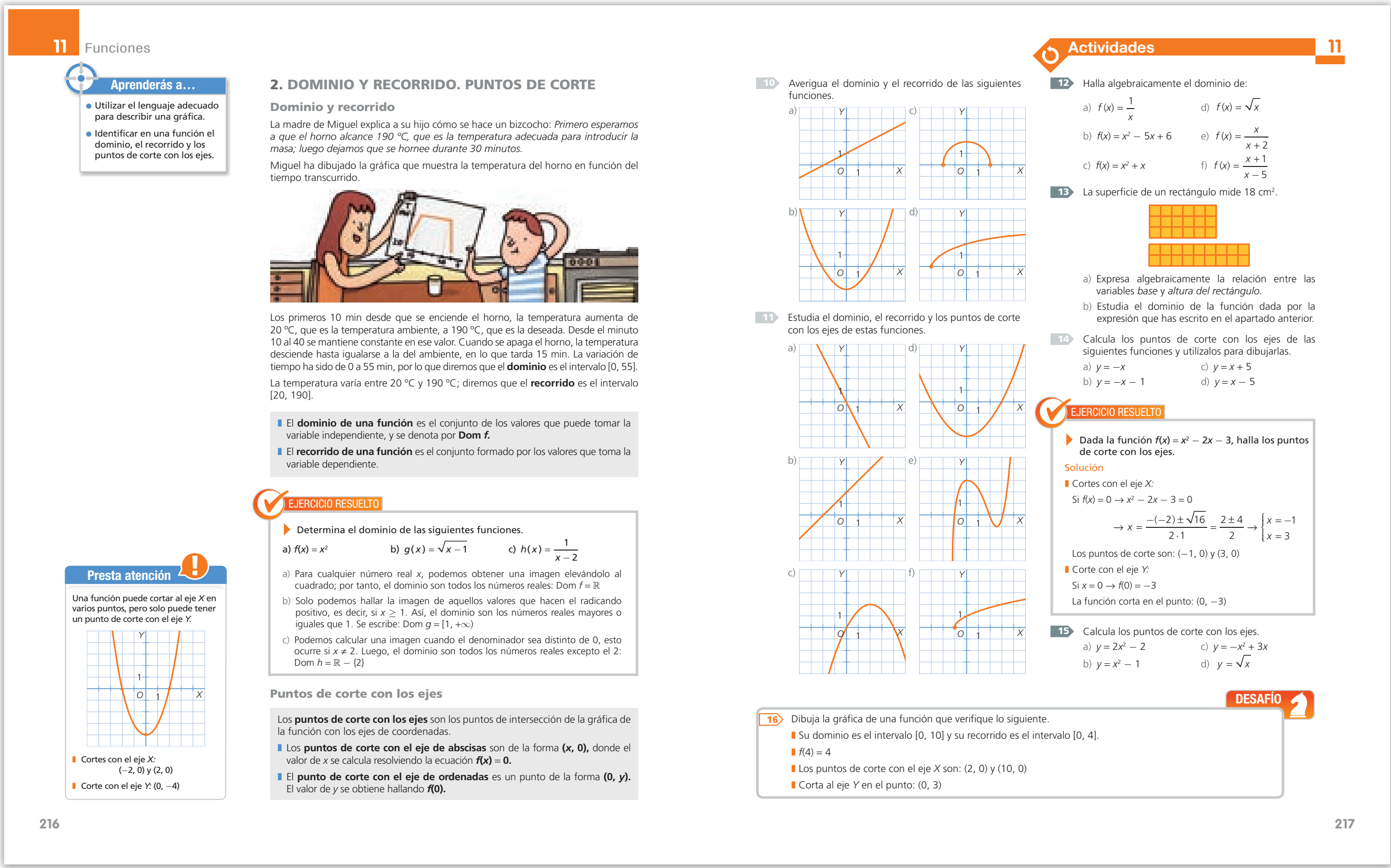
f) $f(x) = x + 4$

Investiga

9 Existen funciones que no admiten ningún tipo de expresión algebraica, por lo que es imposible predecir resultados futuros o pasados a partir de cualquier gráfica obtenida de forma experimental. Un ejemplo es la variación de la temperatura a lo largo de un día. Busca en Internet alguna gráfica que confirme lo anterior.

Respuesta abierta.

2. Dominio y recorrido. Puntos de corte



11 Funciones

Aprenderás a…

- Utilizar el lenguaje adecuado para describir una gráfica.
- Identificar en una función el dominio, el recorrido y los puntos de corte con los ejes.

2. DOMINIO Y RECORRIDO. PUNTOS DE CORTE

Dominio y recorrido

La madre de Miguel explica a su hijo cómo se hace un bizcocho: *Primero esperamos a que el horno alcance 190 °C, que es la temperatura adecuada para introducir la masa; luego dejamos que se hornee durante 30 minutos.*

Miguel ha dibujado la gráfica que muestra la temperatura del horno en función del tiempo transcurrido.

Los primeros 10 min desde que se enciende el horno, la temperatura aumenta de 20 °C, que es la temperatura ambiente, a 190 °C, que es la deseada. Desde el minuto 10 al 40 se mantiene constante en ese valor. Cuando se apaga el horno, la temperatura desciende hasta igualarse a la del ambiente, en lo que tarda 15 min. La variación de tiempo ha sido de 0 a 55 min, por lo que diremos que el **dominio** es el intervalo [0, 55].

La temperatura varía entre 20 °C y 190 °C; diremos que el **recorrido** es el intervalo [20, 190].

- El **dominio de una función** es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente, y se denota por **Dom *f***.
- El **recorrido de una función** es el conjunto formado por los valores que toma la variable dependiente.

EJERCICIO RESUELTO

Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = \sqrt{x-1}$ c) $h(x) = \frac{1}{x-2}$

a) Para cualquier número real x, podemos obtener una imagen elevándolo al cuadrado; por tanto, el dominio son todos los números reales: Dom $f = \mathbb{R}$

b) Solo podemos hallar la imagen de aquellos valores que hacen el radicando positivo, es decir, si $x \geq 1$. Así, el dominio son los números reales mayores o iguales que 1. Se escribe: Dom $g = [1, +\infty)$

c) Podemos calcular una imagen cuando el denominador sea distinto de 0, esto ocurre si $x \neq 2$. Luego, el dominio son todos los números reales excepto el 2: Dom $h = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte con los ejes

Los **puntos de corte con los ejes** son los puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.

- Los **puntos de corte con el eje de abscisas** son de la forma **(*x*, 0)**, donde el valor de x se calcula resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
- El **punto de corte con el eje de ordenadas** es un punto de la forma **(0, *y*)**. El valor de y se obtiene hallando $f(0)$.

Presta atención

Una función puede cortar al eje X en varios puntos, pero solo puede tener un punto de corte con el eje Y.

- Cortes con el eje X: $(-2, 0)$ y $(2, 0)$
- Corte con el eje Y: $(0, -4)$

Actividades

10 Averigua el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

11 Estudia el dominio, el recorrido y los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

12 Halla algebraicamente el dominio de:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

c) $f(x) = x^2 + x$ f) $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$

13 La superficie de un rectángulo mide 18 cm².

a) Expresa algebraicamente la relación entre las variables *base* y *altura del rectángulo*.

b) Estudia el dominio de la función dada por la expresión que has escrito en el apartado anterior.

14 Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones y utilízalos para dibujarlas.

a) $y = -x$ c) $y = x + 5$

b) $y = -x - 1$ d) $y = x - 5$

EJERCICIO RESUELTO

Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, halla los puntos de corte con los ejes.

Solución

Cortes con el eje X:

Si $f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $(-1, 0)$ y $(3, 0)$

Corte con el eje Y:

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -3$

La función corta en el punto: $(0, -3)$

15 Calcula los puntos de corte con los ejes.

a) $y = 2x^2 - 2$ c) $y = -x^2 + 3x$

b) $y = x^2 - 1$ d) $y = \sqrt{x}$

DESAFÍO

16 Dibuja la gráfica de una función que verifique lo siguiente.

- Su dominio es el intervalo [0, 10] y su recorrido es el intervalo [0, 4].
- $f(4) = 4$
- Los puntos de corte con el eje X son: (2, 0) y (10, 0)
- Corta al eje Y en el punto: (0, 3)

216 217

Sugerencias didácticas

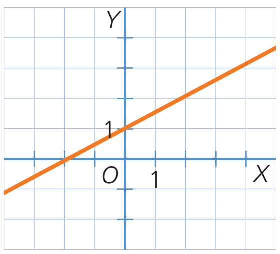
Para empezar a explicar el dominio y el recorrido de una función será conveniente hacerlo a partir de su gráfica. A continuación debemos plantear el cálculo de estos conceptos para funciones dadas por expresiones algebraicas.

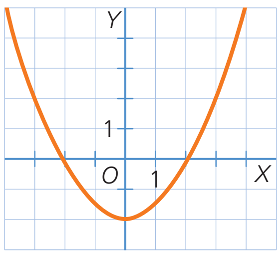
Al estudiar el dominio en funciones racionales es muy probable que surjan dificultades, para que les resulte sencillo se debe recordar qué ocurre cuando en una fracción algebraica se anula el denominador. Y para que comprendan el dominio de funciones con radicales conviene explicarles que, para que la imagen de un valor sea un número real, el radicando debe ser positivo.

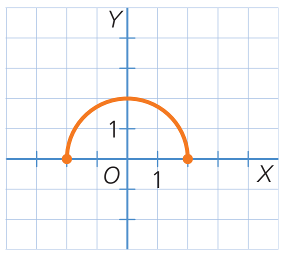
En el cálculo de los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas es posible que los alumnos confundan el valor de la abscisa con el de la ordenada; es importante trabajarlo con sencillos ejemplos gráficos.

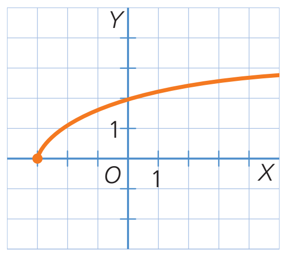
Soluciones de las actividades

10 Averigua el dominio y el recorrido de estas funciones.

a)


b)


c)


d)


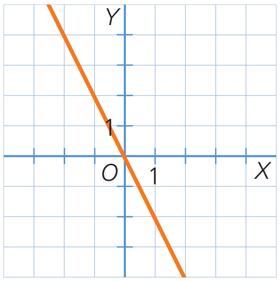
a) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido $= \mathbb{R}$

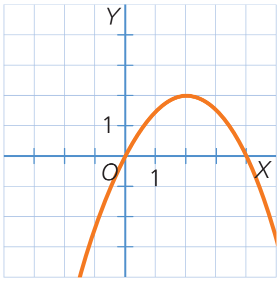
b) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido $= [-2, +\infty)$

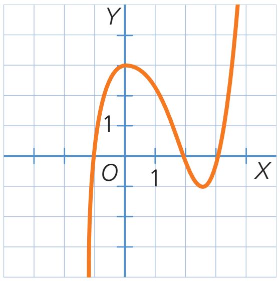
c) Dom $f = [-2, 2]$
Recorrido $= [0, 2]$

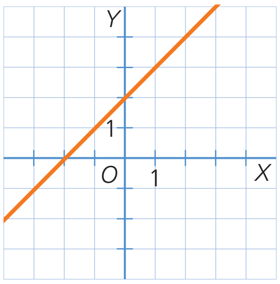
d) Dom $f = [-3, +\infty)$
Recorrido $= [0, +\infty)$

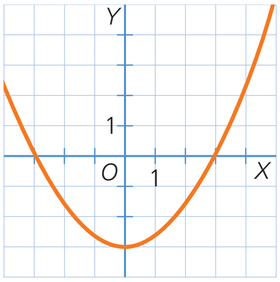
11 Estudia el dominio, el recorrido y los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

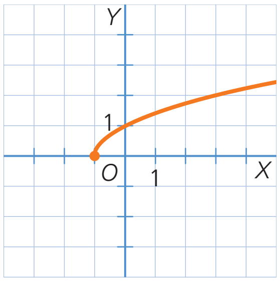
a)


c)


e)


b)


d)


f)


a) Dom $f = \mathbb{R}$ Recorrido $= \mathbb{R}$
Corte: $(0, 0)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ Recorrido $= \mathbb{R}$
Corte: $(-2, 0)$ y $(0, 2)$

c) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido $= (-\infty, 2]$
Corte: $(0, 0)$ y $(4, 0)$

d) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido $= [-3, +\infty)$
Corte: $(-3, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, -3)$

e) Dom $f = \mathbb{R}$ Recorrido $= \mathbb{R}$
Corte: $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 3)$

f) Dom $f = [-1, +\infty)$
Recorrido $= [0, +\infty)$
Corte: $(0, 0)$ y $(0, 1)$

12 Halla algebraicamente el dominio de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ c) $f(x) = x^2 + x$ d) $f(x) = \sqrt{x}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-5}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ b) Dom $f = \mathbb{R}$ c) Dom $f = \mathbb{R}$ d) Dom $f = [0, +\infty)$ e) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$ f) Dom $f = \mathbb{R} - \{5\}$

13 La superficie de un rectángulo mide 18 cm^2.

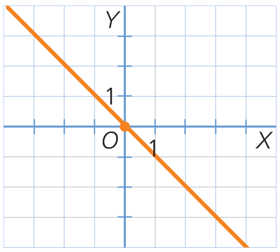
a) Expresa algebraicamente la relación entre las variables *base* y *altura del rectángulo.*

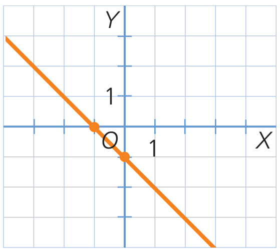
b) Estudia el dominio de la función dada por la expresión que has escrito en el apartado anterior.

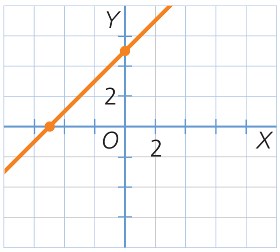
a) Si b es la base y a la altura, resulta: $b \cdot a = 18 \rightarrow b = \dfrac{18}{a}$ b) Dominio $= (0, +\infty)$

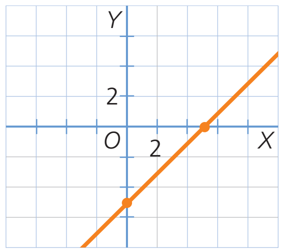
14 Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones y utilízalos para dibujarlas.

a) $y = -x$ b) $y = -x - 1$ c) $y = x + 5$ d) $y = x - 5$

a)


b)


c)


d)


15 Calcula los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

a) $y = 2x^2 - 2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = -x^2 + 3x$ d) $y = \sqrt{x}$

a) Cortes con eje X: $2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = -1 \rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$. Corte con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

b) Con eje X: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = -1 \rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$. Con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

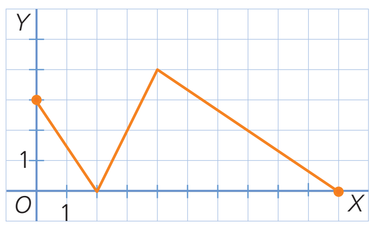
c) Con eje X: $-x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x + 3) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 3 \rightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$. Con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

d) Con eje X: $\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$. Con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

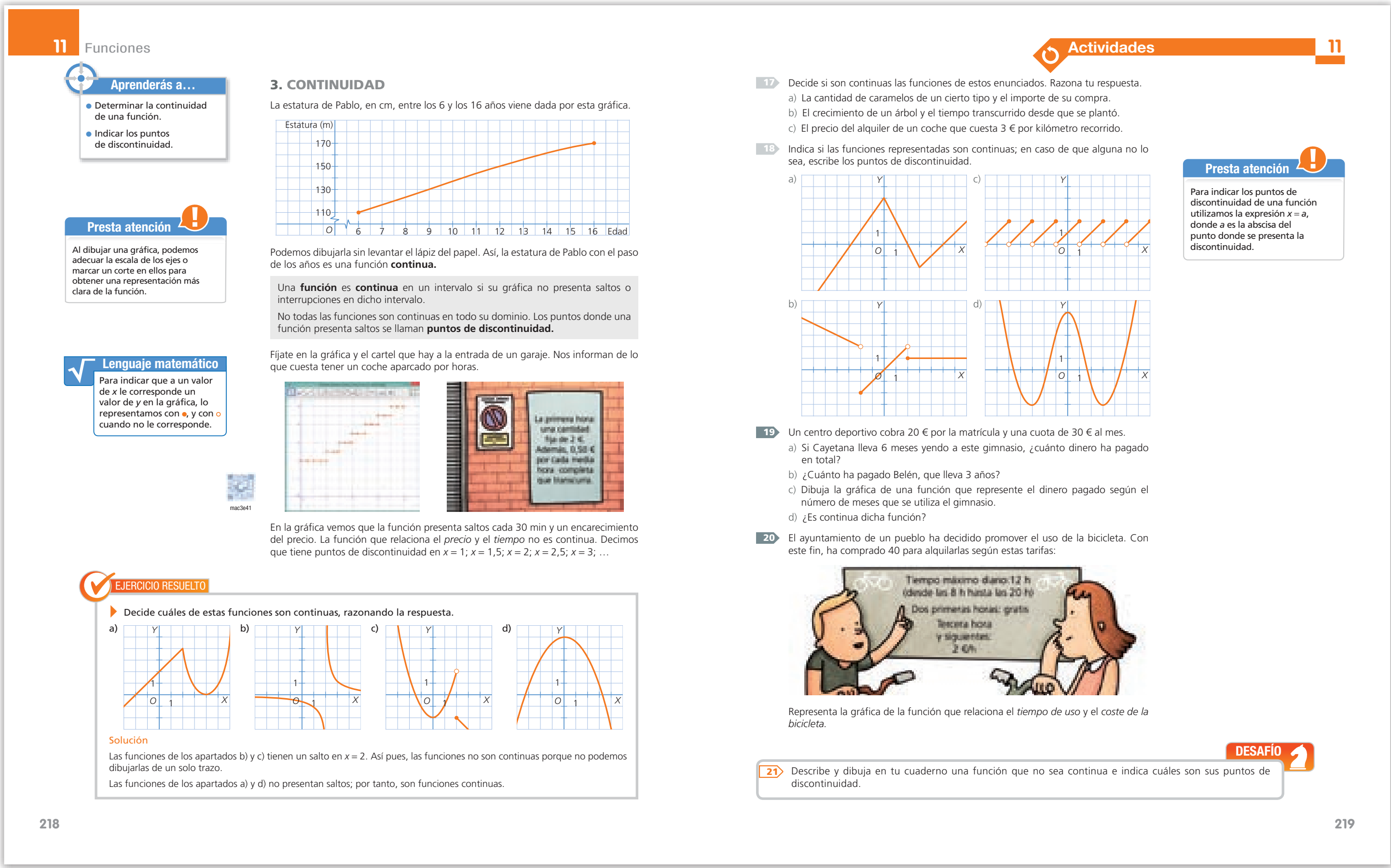
Desafío

16 Dibuja la gráfica de una función que verifique lo siguiente.

- Su dominio es el intervalo $[0, 10]$ y su recorrido es el intervalo $[0, 4]$.
- $f(4) = 4$
- Los puntos de corte con el eje X son: $(2, 0)$ y $(10, 0)$
- Corta al eje Y en el punto: $(0, 3)$



3. Continuidad



Aprenderás a…

- Determinar la continuidad de una función.
- Indicar los puntos de discontinuidad.

Presta atención

Al dibujar una gráfica, podemos adecuar la escala de los ejes o marcar un corte en ellos para obtener una representación más clara de la función.

Lenguaje matemático

Para indicar que a un valor de *x* le corresponde un valor de *y* en la gráfica, lo representamos con ●, y con ○ cuando no le corresponde.

3. CONTINUIDAD

La estatura de Pablo, en cm, entre los 6 y los 16 años viene dada por esta gráfica.

Podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel. Así, la estatura de Pablo con el paso de los años es una función **continua.**

Una **función** es **continua** en un intervalo si su gráfica no presenta saltos o interrupciones en dicho intervalo.

No todas las funciones son continuas en todo su dominio. Los puntos donde una función presenta saltos se llaman **puntos de discontinuidad.**

Fíjate en la gráfica y el cartel que hay a la entrada de un garaje. Nos informan de lo que cuesta tener un coche aparcado por horas.

mac3e41

En la gráfica vemos que la función presenta saltos cada 30 min y un encarecimiento del precio. La función que relaciona el *precio* y el *tiempo* no es continua. Decimos que tiene puntos de discontinuidad en $x = 1$; $x = 1,5$; $x = 2$; $x = 2,5$; $x = 3$; …

EJERCICIO RESUELTO

Decide cuáles de estas funciones son continuas, razonando la respuesta.

a) b) c) d)

Solución

Las funciones de los apartados b) y c) tienen un salto en $x = 2$. Así pues, las funciones no son continuas porque no podemos dibujarlas de un solo trazo.

Las funciones de los apartados a) y d) no presentan saltos; por tanto, son funciones continuas.

218

Actividades 11

17 Decide si son continuas las funciones de estos enunciados. Razona tu respuesta.

a) La cantidad de caramelos de un cierto tipo y el importe de su compra.

b) El crecimiento de un árbol y el tiempo transcurrido desde que se plantó.

c) El precio del alquiler de un coche que cuesta 3 € por kilómetro recorrido.

18 Indica si las funciones representadas son continuas; en caso de que alguna no lo sea, escribe los puntos de discontinuidad.

a) c) b) d)

Presta atención

Para indicar los puntos de discontinuidad de una función utilizamos la expresión $x = a$, donde a es la abscisa del punto donde se presenta la discontinuidad.

19 Un centro deportivo cobra 20 € por la matrícula y una cuota de 30 € al mes.

a) Si Cayetana lleva 6 meses yendo a este gimnasio, ¿cuánto dinero ha pagado en total?

b) ¿Cuánto ha pagado Belén, que lleva 3 años?

c) Dibuja la gráfica de una función que represente el dinero pagado según el número de meses que se utiliza el gimnasio.

d) ¿Es continua dicha función?

20 El ayuntamiento de un pueblo ha decidido promover el uso de la bicicleta. Con este fin, ha comprado 40 para alquilarlas según estas tarifas:

Representa la gráfica de la función que relaciona el *tiempo de uso* y el *coste de la bicicleta.*

DESAFÍO

21 Describe y dibuja en tu cuaderno una función que no sea continua e indica cuáles son sus puntos de discontinuidad.

219

Sugerencias didácticas

Se deben proponer ejemplos gráficos de la vida cotidiana de funciones definidas a trozos que sean continuas y otras no continuas.

Será conveniente recordar que cuando a un valor *x* le corresponde un valor *y* en la gráfica lo representaremos con ○, y con • cuando no le corresponde.

En las funciones no continuas hemos de hacer hincapié en estudiar la continuidad en el dominio de definición y en los extremos del mismo.

Se debe insistir en cómo se expresan los puntos de discontinuidad ($x = a$).

Conviene prestar atención a la escala de los ejes al representar la gráfica de una función.

GeoGebra. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN NO CONTINUA

Se muestra la representación gráfica de una función con puntos de discontinuidad.

Puede utilizarse pulsando sobre la barra de navegación para ver el proceso paso a paso: primero se colocan los puntos y a continuación el trozo de función, o activando el botón Reproduce de modo que la construcción se realizará automáticamente sin necesidad de interacción con el archivo.

Este recurso completa la explicación del libro sobre este tipo de funciones incidiendo en los saltos de la gráfica que suelen tener una mayor dificultad para los alumnos.

Soluciones de las actividades

17 Decide si son continuas las funciones de estos enunciados. Razona tu respuesta.

a) La cantidad de caramelos de un cierto tipo y el importe de su compra.

b) El crecimiento de un árbol y el tiempo transcurrido desde que se plantó.

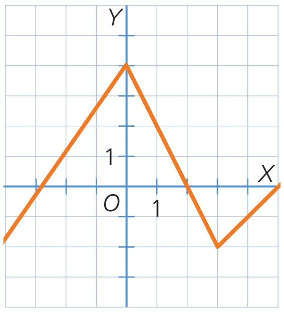
c) El precio del alquiler de un coche que cuesta 3 € por kilómetro recorrido.

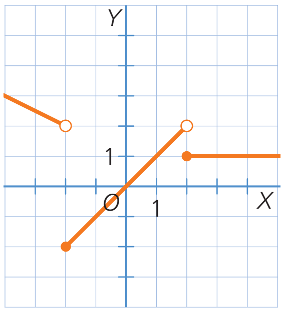
a) Es continua, no presenta saltos ni interrupciones.

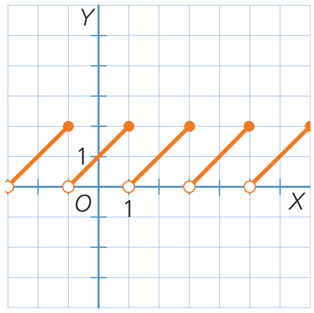
b) Es continua, el crecimiento de un árbol no presenta saltos

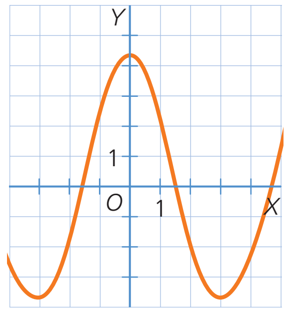
c) No es continua, cada kilómetro recorrido supone un salto de 3 euros en el precio de alquiler.

18 Indica si las funciones representadas son continuas; en caso de que alguna no lo sea, escribe los puntos de discontinuidad.

a)


b)


c)


d)


a) Es una función continua.

b) No es una función continua. Presenta puntos de discontinuidad en $x = 2$ y $x = -2$.

c) No es una función continua.
Presenta puntos de discontinuidad en $x = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

d) Es una función continua.

19 Un centro deportivo cobra 20 € por la matrícula y una cuota de 30 € al mes.

a) Si Cayetana lleva 6 meses yendo a este gimnasio, ¿cuánto dinero ha pagado en total?

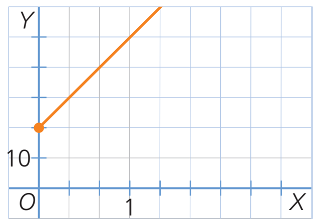
b) ¿Cuánto ha pagado Belén, que lleva 3 años?

c) Dibuja la gráfica de una función que represente el dinero pagado según el número de meses que se utiliza el gimnasio.

d) ¿Es continua dicha función?

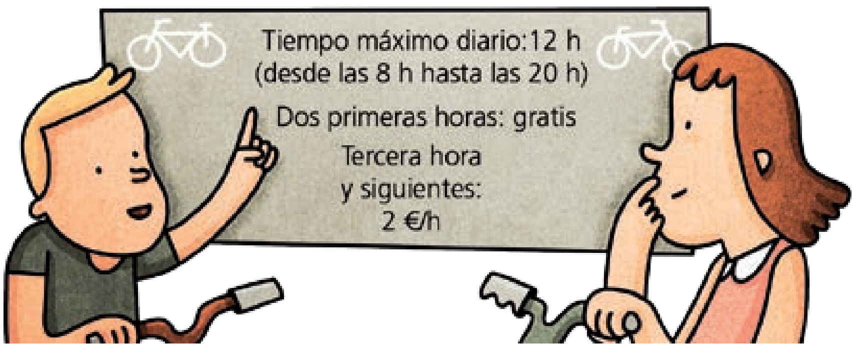
a) Si x = número de meses, el coste del gimnasio viene dado por la función $f(x) = 30x + 20$.
Por tanto Cayetana ha pagado: $f(6) = 30 \cdot 6 + 20 = 200$ €

b) Belén ha pagado: $f(36) = 30 \cdot 36 + 20 = 1\,100$ €

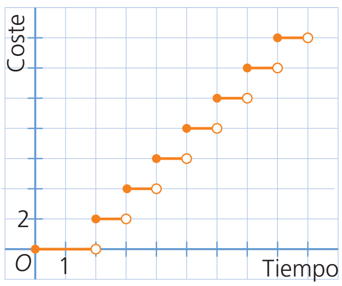
c)


d) Es una función continua.

20 El ayuntamiento de un pueblo ha decidido promover el uso de la bicicleta. Con este fin, ha comprado 40 para alquilarlas según estas tarifas:



Representa la gráfica de la función que relaciona el *tiempo de uso* y el *coste de la bicicleta*.

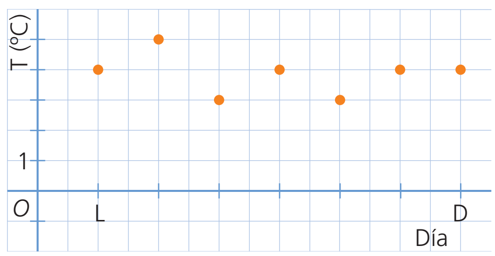


Desafío

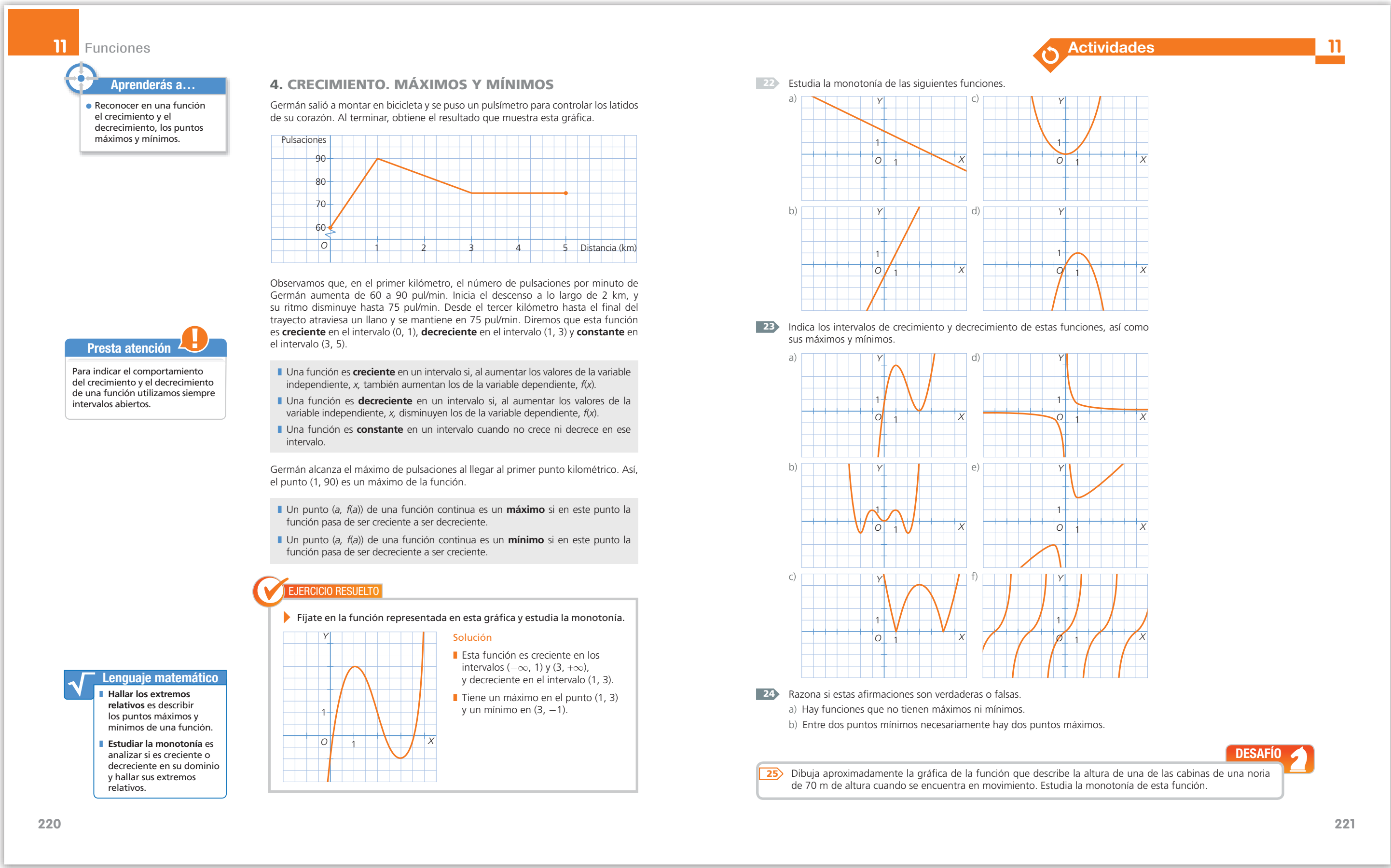
21 Describe y dibuja en tu cuaderno una función que no sea continua e indica cuáles son sus puntos de discontinuidad.

Respuesta abierta.

Por ejemplo, la función que relaciona los días de una semana de invierno con la temperatura máxima alcanzada no es continua.



4. Crecimiento. Máximos y mínimos


11 Funciones

Aprenderás a…

- Reconocer en una función el crecimiento y el decrecimiento, los puntos máximos y mínimos.

4. CRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Germán salió a montar en bicicleta y se puso un pulsímetro para controlar los latidos de su corazón. Al terminar, obtiene el resultado que muestra esta gráfica.

Observamos que, en el primer kilómetro, el número de pulsaciones por minuto de Germán aumenta de 60 a 90 pul/min. Inicia el descenso a lo largo de 2 km, y su ritmo disminuye hasta 75 pul/min. Desde el tercer kilómetro hasta el final del trayecto atraviesa un llano y se mantiene en 75 pul/min. Diremos que esta función es **creciente** en el intervalo (0, 1), **decreciente** en el intervalo (1, 3) y **constante** en el intervalo (3, 5).

- Una función es **creciente** en un intervalo si, al aumentar los valores de la variable independiente, *x*, también aumentan los de la variable dependiente, *f*(*x*).
- Una función es **decreciente** en un intervalo si, al aumentar los valores de la variable independiente, *x*, disminuyen los de la variable dependiente, *f*(*x*).
- Una función es **constante** en un intervalo cuando no crece ni decrece en ese intervalo.

Presta atención

Para indicar el comportamiento del crecimiento y el decrecimiento de una función utilizamos siempre intervalos abiertos.

Germán alcanza el máximo de pulsaciones al llegar al primer punto kilométrico. Así, el punto (1, 90) es un máximo de la función.

- Un punto (*a*, *f*(*a*)) de una función continua es un **máximo** si en este punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente.
- Un punto (*a*, *f*(*a*)) de una función continua es un **mínimo** si en este punto la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

EJERCICIO RESUELTO

Fíjate en la función representada en esta gráfica y estudia la monotonía.

Solución

- Esta función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$, y decreciente en el intervalo (1, 3).
- Tiene un máximo en el punto (1, 3) y un mínimo en $(3, -1)$.

Lenguaje matemático

- **Hallar los extremos relativos** es describir los puntos máximos y mínimos de una función.
- **Estudiar la monotonía** es analizar si es creciente o decreciente en su dominio y hallar sus extremos relativos.

220

Actividades 11

22 Estudia la monotonía de las siguientes funciones.

a) b) c) d)

23 Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones, así como sus máximos y mínimos.

a) b) c) d) e) f)

24 Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Hay funciones que no tienen máximos ni mínimos.

b) Entre dos puntos mínimos necesariamente hay dos puntos máximos.

DESAFÍO

25 Dibuja aproximadamente la gráfica de la función que describe la altura de una de las cabinas de una noria de 70 m de altura cuando se encuentra en movimiento. Estudia la monotonía de esta función.

221

Sugerencias didácticas

Para que los alumnos comprendan los conceptos de función creciente, decreciente y constante dibujaremos una gráfica.

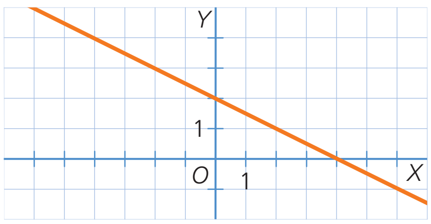
Hemos de resaltar que en el estudio de la monotonía de funciones los resultados son intervalos de la recta real.

Es necesario darle importancia a las definiciones de punto máximo y punto mínimo, es frecuente que los alumnos asocien un punto máximo con el que tiene mayor imagen en la gráfica. También les cuesta entender que una función pueda tener varios máximos y varios mínimos; y conviene insistir en la determinación de puntos máximos y mínimos utilizando las dos coordenadas de los puntos.

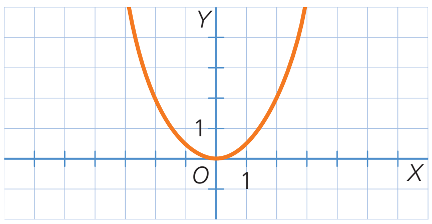
Soluciones de las actividades

22 Estudia la monotonía de siguientes funciones.

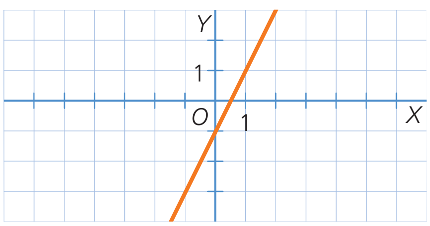
a)



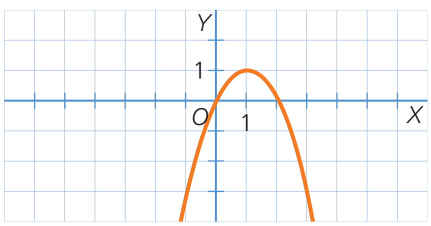
c)



b)



d)



a) Es una función decreciente en todo su dominio.

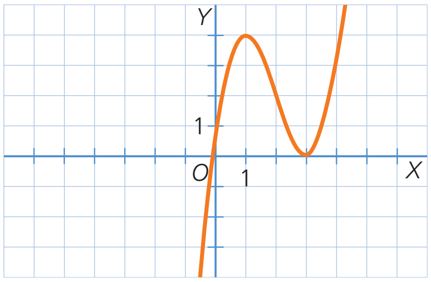
b) Es una función creciente en todo su dominio.

c) Es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$. Tiene un punto mínimo en (0, 0).

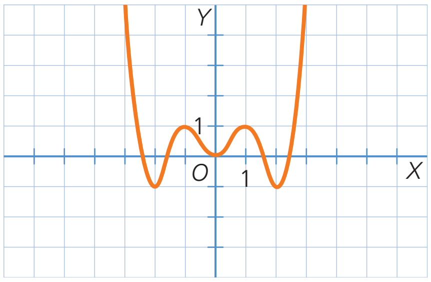
d) Es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$, es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un punto máximo en (1, 1).

23 Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones, así como sus máximos y mínimos.

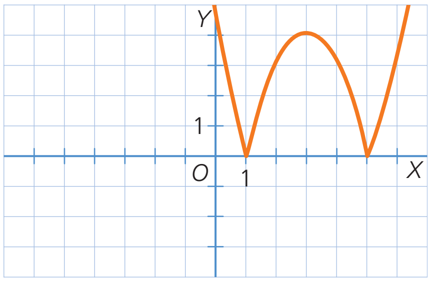
a)



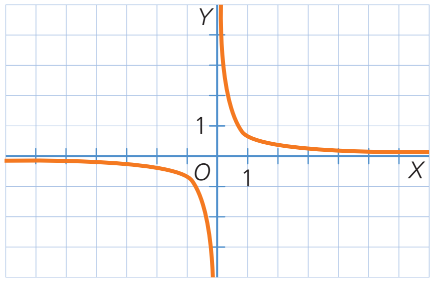
b)



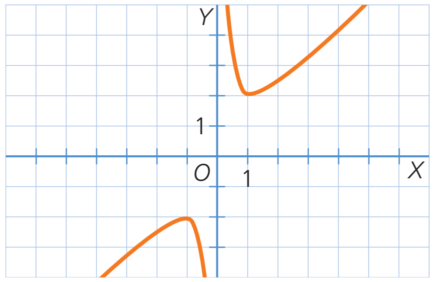
c)



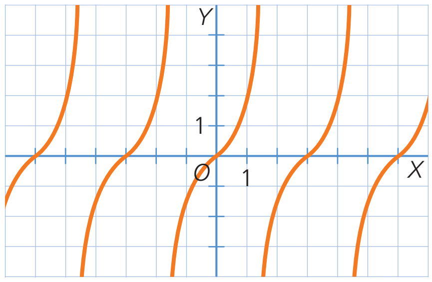
d)



e)



f)



a) Es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(1, 3)$.
El punto máximo es $(1, 4)$ y el punto mínimo, $(3, 0)$.

b) Es creciente en $(-2, -1)$, $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$, es decreciente en $(-\infty, -2)$, $(-1, 0)$ y $(1, 2)$.
Los puntos máximos son $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, los puntos mínimos, $(-2, -1)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$.

c) Es creciente en $(1, 3)$ y $(5, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, 5)$.
El punto máximo es $(3, 4)$ y los puntos mínimos, $(1, 0)$ y $(5, 0)$.

d) Es decreciente en todo su dominio. No tiene puntos máximos ni mínimos.

e) Es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, es decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. El máximo es $(-1, -2)$, y el punto mínimo, $(1, 2)$.

f) Es creciente en todo su dominio. No tiene puntos máximos ni mínimos.

24 Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Hay funciones que no tienen máximos ni mínimos.

b) Entre dos puntos mínimos necesariamente hay dos puntos máximos.

a) Verdadera, por ejemplo $y = x$ es creciente en todo su dominio.

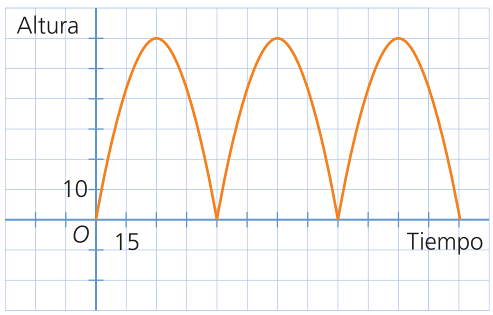
b) Falsa, entre dos puntos mínimos, en una función continua, hay solo un punto máximo.

Desafío

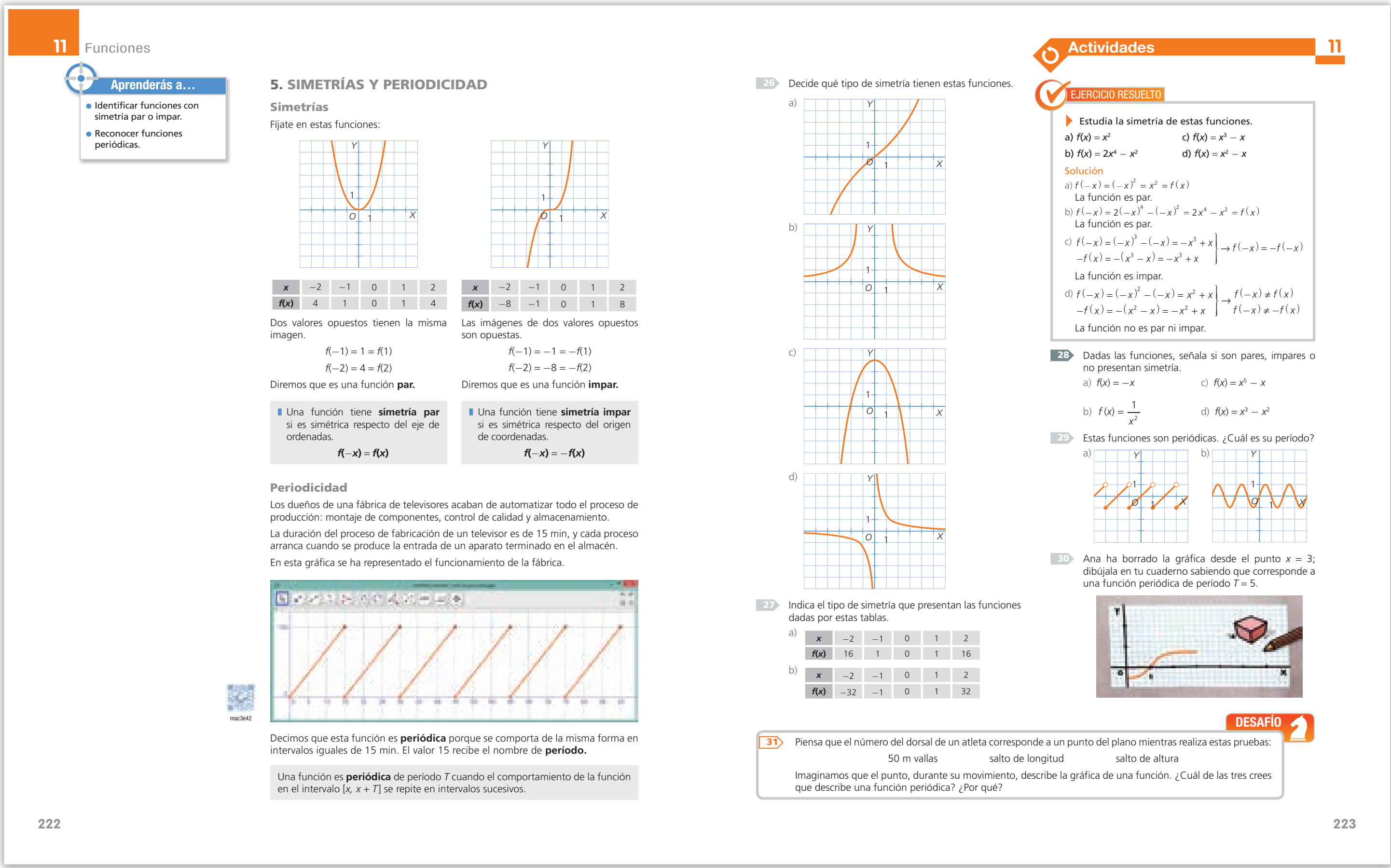
25 Dibuja aproximadamente la gráfica de la función que describe la altura de una de las cabinas de una noria de 70 m de altura. Estudia la monotonía de esta función.

Es una función creciente en los intervalos: $(0, 30)$, $(60, 90)$ y $(120, 150)$

Es decreciente en los intervalos: $(30, 60)$, $(90, 120)$ y $(150, 180)$



5. Simetrías y periodicidad



Aprenderás a…

- Identificar funciones con simetría par o impar.
- Reconocer funciones periódicas.

5. SIMETRÍAS Y PERIODICIDAD

Simetrías

Fíjate en estas funciones:

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

Dos valores opuestos tienen la misma imagen.

$f(-1) = 1 = f(1)$

$f(-2) = 4 = f(2)$

Diremos que es una función **par.**

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	–8	–1	0	1	8

Las imágenes de dos valores opuestos son opuestas.

$f(-1) = -1 = -f(1)$

$f(-2) = -8 = -f(2)$

Diremos que es una función **impar.**

Una función tiene **simetría par** si es simétrica respecto del eje de ordenadas.

$$f(-x) = f(x)$$

Una función tiene **simetría impar** si es simétrica respecto del origen de coordenadas.

$$f(-x) = -f(x)$$

Periodicidad

Los dueños de una fábrica de televisores acaban de automatizar todo el proceso de producción: montaje de componentes, control de calidad y almacenamiento.

La duración del proceso de fabricación de un televisor es de 15 min, y cada proceso arranca cuando se produce la entrada de un aparato terminado en el almacén.

En esta gráfica se ha representado el funcionamiento de la fábrica.

mac3e42

Decimos que esta función es **periódica** porque se comporta de la misma forma en intervalos iguales de 15 min. El valor 15 recibe el nombre de **período.**

Una función es **periódica** de período T cuando el comportamiento de la función en el intervalo $[x, x + T]$ se repite en intervalos sucesivos.

222

Actividades 11

26 Decide qué tipo de simetría tienen estas funciones.

a) b) c) d)

27 Indica el tipo de simetría que presentan las funciones dadas por estas tablas.

a)

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	16	1	0	1	16

b)

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	–32	–1	0	1	32

EJERCICIO RESUELTO

Estudia la simetría de estas funciones.

a) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = 2x^4 - x^2$ d) $f(x) = x^2 - x$

Solución

a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

La función es par.

b) $f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 = 2x^4 - x^2 = f(x)$

La función es par.

c) $\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x \\ -f(x) = -(x^3 - x) = -x^3 + x \end{array}\right\} \rightarrow f(-x) = -f(-x)$

La función es impar.

d) $\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \\ -f(x) = -(x^2 - x) = -x^2 + x \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{array}$

La función no es par ni impar.

28 Dadas las funciones, señala si son pares, impares o no presentan simetría.

a) $f(x) = -x$ c) $f(x) = x^5 - x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ d) $f(x) = x^3 - x^2$

29 Estas funciones son periódicas. ¿Cuál es su período?

a) b)

30 Ana ha borrado la gráfica desde el punto $x = 3$; dibújala en tu cuaderno sabiendo que corresponde a una función periódica de período $T = 5$.

DESAFÍO

31 Piensa que el número del dorsal de un atleta corresponde a un punto del plano mientras realiza estas pruebas:

50 m vallas salto de longitud salto de altura

Imaginamos que el punto, durante su movimiento, describe la gráfica de una función. ¿Cuál de las tres crees que describe una función periódica? ¿Por qué?

223

Sugerencias didácticas

En la unidad 7 los alumnos han estudiado qué es una simetría axial y una simetría central. Así, si dibujamos dos funciones, una de ellas simétrica respecto el eje de ordenadas y otra con simetría central de centro el origen de coordenadas los alumnos entenderán qué es una función par y qué es una función impar. Deben comprender que dos valores opuestos de la variable independiente en una función par tienen la misma imagen, y en una impar, imágenes opuestas.

Para que los alumnos identifiquen qué es una función periódica será suficiente poner un ejemplo y sugerirles que propongan algunos más.

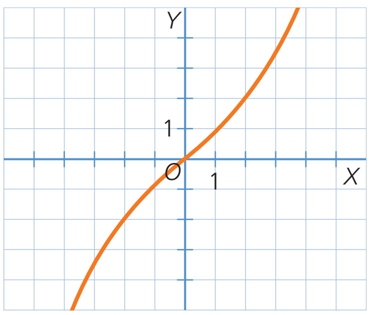
GeoGebra. FUNCIÓN PERIÓDICA

Para completar la explicación del libro sobre este tipo de funciones se propone un recurso con el que se incide en la periodicidad. Es conveniente indicar que la gráfica de la función continuará indefinidamente aunque en el archivo solo se representan algunos trozos. En él se muestra la representación gráfica de una función periódica y no continua. Puede utilizarse pulsando sobre la barra de navegación para ver el proceso paso a paso: primero se colocan los puntos y a continuación el trozo de función, o activando el botón Reproduce de modo que la construcción se realizará automáticamente sin necesidad de interacción con el archivo.

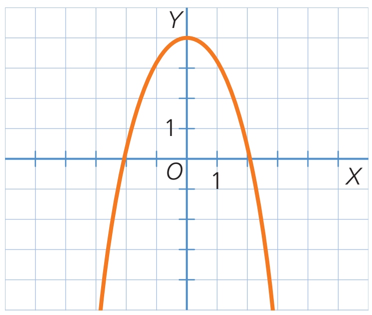
Soluciones de las actividades

26 A la vista de estas gráficas decide qué tipo de simetría tiene cada una.

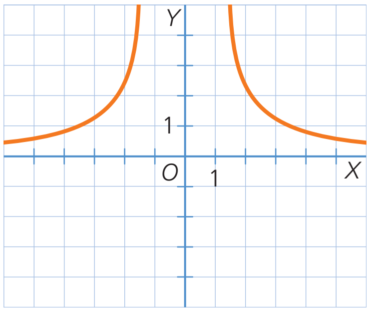
a)



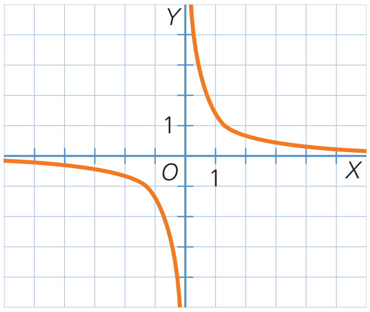
c)



b)



d)



a) Tiene simetría impar. b) Tiene simetría par. c) Tiene simetría par. d) Tiene simetría impar.

27 Indica el tipo de simetría que presentan las funciones dadas por estas tablas.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	16	1	0	1	16

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-32	-1	0	1	3

a) Cumple que $f(-x) = f(x) \rightarrow$ Es una función par. b) Como $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Es una función impar.

28 Dadas las funciones, señala si son pares, impares o no presentan simetría.

a) $f(x) = -x$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = x^5 - x$ d) $f(x) = x^3 - x^2$

a) $f(-x) = -(-x) = x$

$-f(x) = -(-x) = x$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Es función impar.

b) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2}$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Es función par.

c) $f(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x$

$-f(x) = -(x^5 - x) = -x^5 + x$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Es función impar.

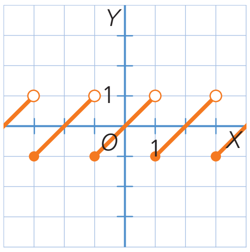
d) $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$

$-f(x) = -(x^3 - x^2) = -x^3 + x^2$

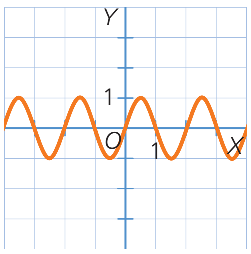
No tiene simetría par ni tampoco simetría impar.

29 Estas funciones son periódicas. ¿Cuál es el valor del período?

a)

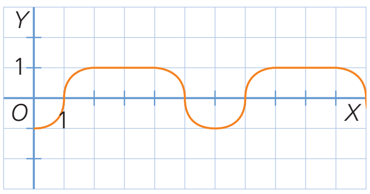


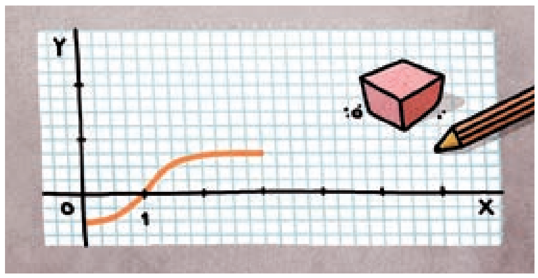
b)



a) $T = 2$ unidades b) $T = 2$ unidades

30 Ana ha borrado la gráfica desde el punto $x = 3$; dibújala en tu cuaderno sabiendo que corresponde a una función periódica de período $T = 5$.





Desafío

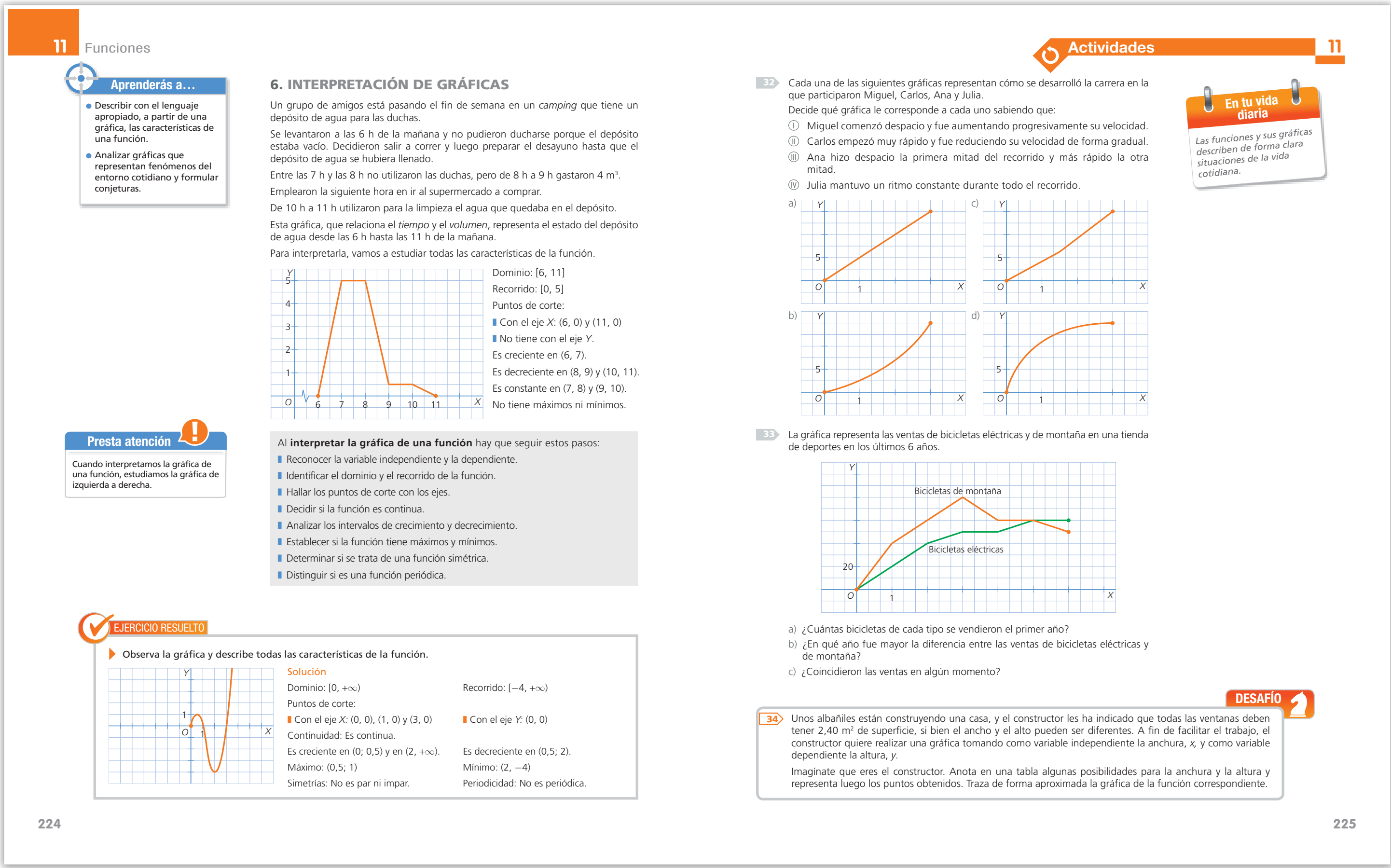
31 Piensa que el número del dorsal de un atleta corresponde a un punto del plano mientras realiza estas pruebas:

50 m vallas salto de longitud salto de altura

Imaginamos que el punto, durante su movimiento, describe la gráfica de una función. ¿Cuál de las tres crees que describe una función periódica? ¿Por qué?

Es periódica la prueba de 50 m vallas porque al llegar a cada una tiene que hacer un salto. Si, por ejemplo la distancia entre dos de ellas es de 10 m realizará 5 saltos describiendo una función periódica de período $T = 10$.

6. Interpretación de gráficas



11 Funciones

Aprenderás a…

- Describir con el lenguaje apropiado, a partir de una gráfica, las características de una función.
- Analizar gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y formular conjeturas.

6. INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

Un grupo de amigos está pasando el fin de semana en un *camping* que tiene un depósito de agua para las duchas.

Se levantaron a las 6 h de la mañana y no pudieron ducharse porque el depósito estaba vacío. Decidieron salir a correr y luego preparar el desayuno hasta que el depósito de agua se hubiera llenado.

Entre las 7 h y las 8 h no utilizaron las duchas, pero de 8 h a 9 h gastaron 4 m^3.

Emplearon la siguiente hora en ir al supermercado a comprar.

De 10 h a 11 h utilizaron para la limpieza el agua que quedaba en el depósito.

Esta gráfica, que relaciona el *tiempo* y el *volumen*, representa el estado del depósito de agua desde las 6 h hasta las 11 h de la mañana.

Para interpretarla, vamos a estudiar todas las características de la función.

Dominio: [6, 11]

Recorrido: [0, 5]

Puntos de corte:

- Con el eje *X*: (6, 0) y (11, 0)
- No tiene con el eje *Y*.

Es creciente en (6, 7).

Es decreciente en (8, 9) y (10, 11).

Es constante en (7, 8) y (9, 10).

No tiene máximos ni mínimos.

Presta atención

Cuando interpretamos la gráfica de una función, estudiamos la gráfica de izquierda a derecha.

Al **interpretar la gráfica de una función** hay que seguir estos pasos:

- Reconocer la variable independiente y la dependiente.
- Identificar el dominio y el recorrido de la función.
- Hallar los puntos de corte con los ejes.
- Decidir si la función es continua.
- Analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Establecer si la función tiene máximos y mínimos.
- Determinar si se trata de una función simétrica.
- Distinguir si es una función periódica.

EJERCICIO RESUELTO

Observa la gráfica y describe todas las características de la función.

Solución

Dominio: $[0, +\infty)$ Recorrido: $[-4, +\infty)$

Puntos de corte:

- Con el eje *X*: (0, 0), (1, 0) y (3, 0)
- Con el eje *Y*: (0, 0)

Continuidad: Es continua.

Es creciente en (0; 0,5) y en $(2, +\infty)$. Es decreciente en (0,5; 2).

Máximo: (0,5; 1) Mínimo: (2, −4)

Simetrías: No es par ni impar. Periodicidad: No es periódica.

224

Actividades 11

32 Cada una de las siguientes gráficas representan cómo se desarrolló la carrera en la que participaron Miguel, Carlos, Ana y Julia.

Decide qué gráfica le corresponde a cada uno sabiendo que:

Ⓘ Miguel comenzó despacio y fue aumentando progresivamente su velocidad.

Ⓘ Carlos empezó muy rápido y fue reduciendo su velocidad de forma gradual.

Ⓘ Ana hizo despacio la primera mitad del recorrido y más rápido la otra mitad.

Ⓘ Julia mantuvo un ritmo constante durante todo el recorrido.

En tu vida diaria

Las funciones y sus gráficas describen de forma clara situaciones de la vida cotidiana.

33 La gráfica representa las ventas de bicicletas eléctricas y de montaña en una tienda de deportes en los últimos 6 años.

a) ¿Cuántas bicicletas de cada tipo se vendieron el primer año?

b) ¿En qué año fue mayor la diferencia entre las ventas de bicicletas eléctricas y de montaña?

c) ¿Coincidieron las ventas en algún momento?

DESAFÍO

34 Unos albañiles están construyendo una casa, y el constructor les ha indicado que todas las ventanas deben tener 2,40 m^2 de superficie, si bien el ancho y el alto pueden ser diferentes. A fin de facilitar el trabajo, el constructor quiere realizar una gráfica tomando como variable independiente la anchura, *x*, y como variable dependiente la altura, *y*.

Imagínate que eres el constructor. Anota en una tabla algunas posibilidades para la anchura y la altura y representa luego los puntos obtenidos. Traza de forma aproximada la gráfica de la función correspondiente.

225

Sugerencias didácticas

Es importante que los alumnos descubran y reconozcan que muchísimos aspectos de nuestra vida se pueden asociar a la presencia de gráficas.

En este epígrafe interpretarán representaciones gráficas de funciones que abarquen todas las propiedades estudiadas.

Trataremos de asegurarnos de que los alumnos hayan asimilado todos los conceptos planteados en la unidad dado que son conceptos básicos y relevantes para cursos superiores. Se debe insistir en la utilización del lenguaje matemático apropiado.

Soluciones de las actividades

32 Cada una de las siguientes gráficas representan cómo se desarrolló la carrera en la que participaron Miguel, Carlos, Ana y Julia.

Decide qué gráfica le corresponde a cada uno sabiendo que:

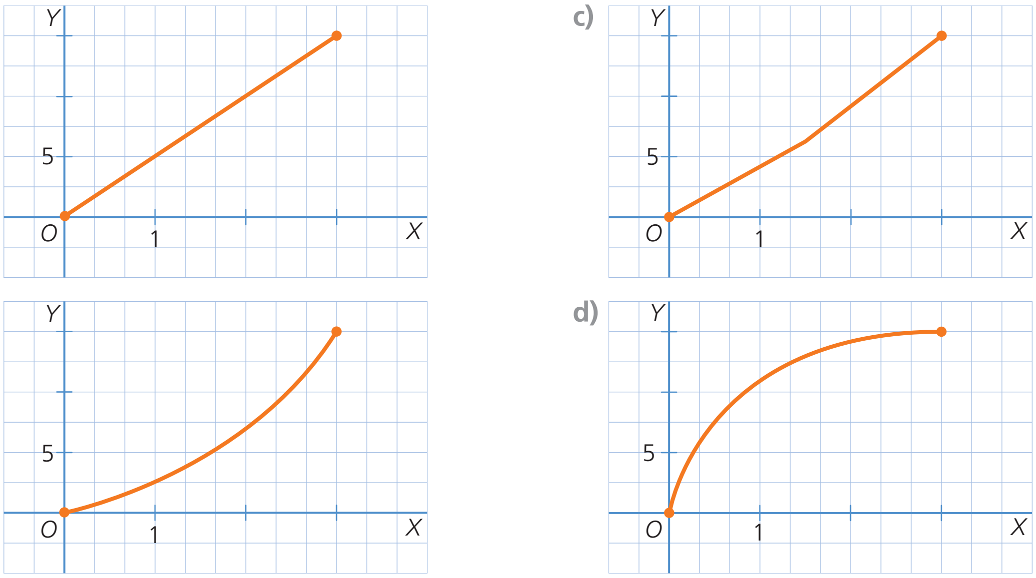
Ⓘ Miguel comenzó despacio y fue aumentando progresivamente su velocidad.

Ⓘ Carlos empezó muy rápido y fue reduciendo su velocidad de forma gradual.

Ⓘ Ana hizo despacio la primera mitad del recorrido y más rápido la otra mitad.

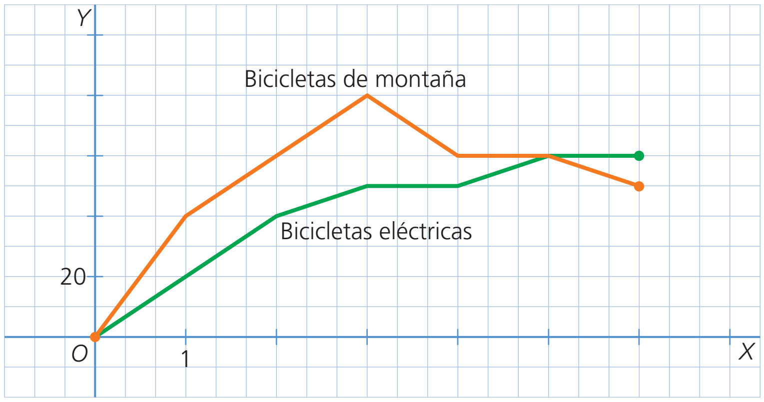
Ⓘ Julia mantuvo un ritmo constante durante todo el recorrido.

a) b) c) d)



a) Julia **b)** Miguel **c)** Ana **d)** Carlos

33 La gráfica representa las ventas de bicicletas eléctricas y de montaña en una tienda de deportes en los últimos 6 años.



a) ¿Cuántas bicicletas de cada tipo se vendieron el primer año?

b) ¿En qué año fue mayor la diferencia entre las ventas de bicicletas eléctricas y de montaña?

c) ¿Coincidieron las ventas en algún momento?

a) En el primer año se vendieron 40 bicicletas de montaña y 20 bicicletas eléctricas.

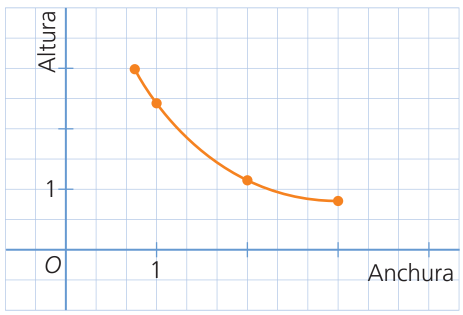
b) En el tercer año hubo una diferencia mayor entre las ventas de los dos tipos.

c) Sí, coincidieron las ventas en el quinto año.

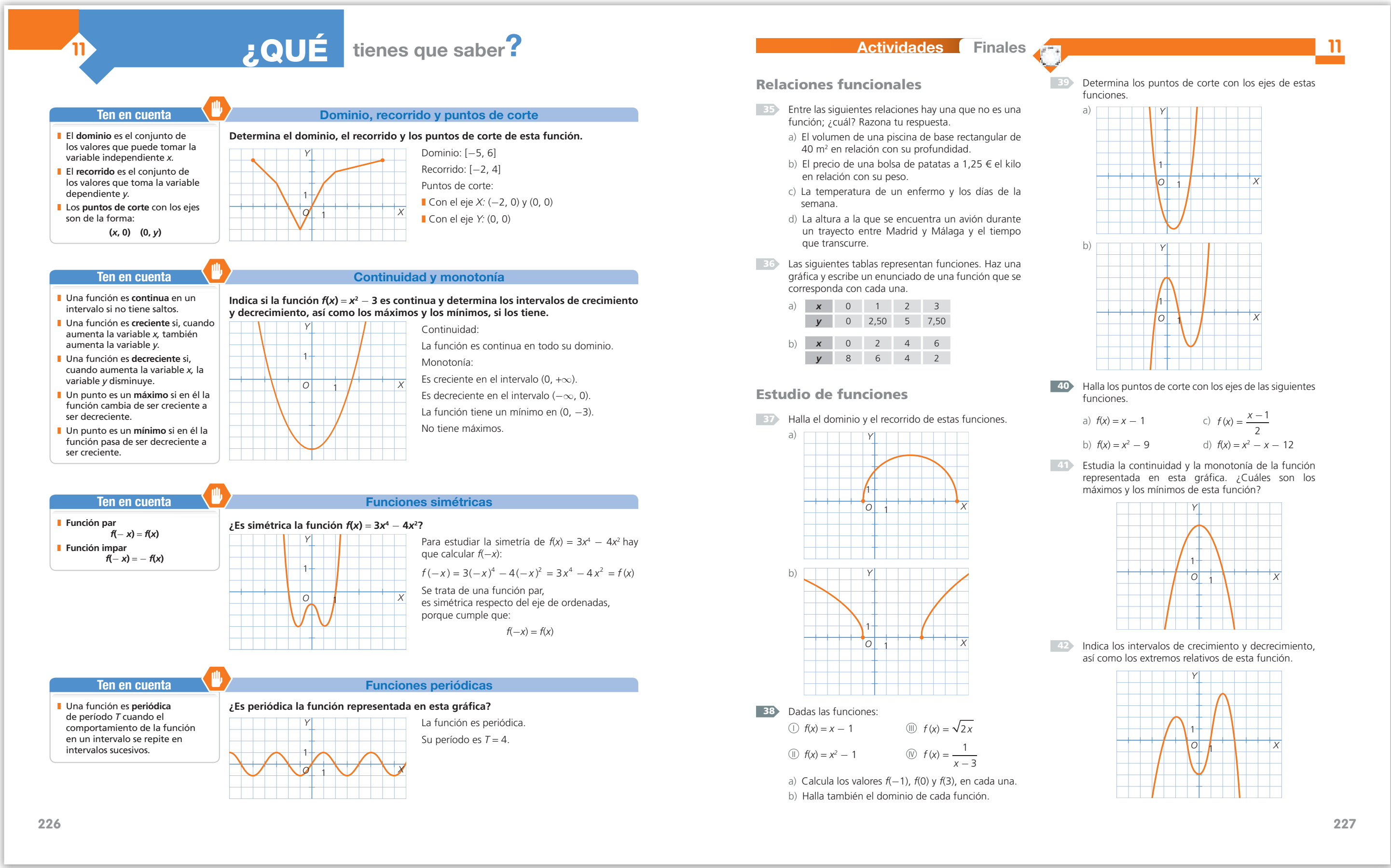
Investiga

34 Unos albañiles están construyendo una casa, y el constructor les ha indicado que todas las ventanas deben tener 2,40 m^2 de superficie, si bien el ancho y el alto pueden ser diferentes. A fin de facilitar el trabajo, el constructor quiere realizar una gráfica tomando como variable independiente la anchura, *x*, y como variable dependiente la altura, *y*. Imagínate que eres el constructor. Anota en una tabla algunas posibilidades para la anchura y la altura y representa luego los puntos obtenidos. Traza de forma aproximada la gráfica de la función correspondiente.

Anchura (m)	0,8	1	1,5	2	3
Altura (m)	3	2,4	1,6	1,2	0,8



¿Qué tienes que saber?



11 ¿QUÉ tienes que saber?

Ten en cuenta

- El **dominio** es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente *x*.
- El **recorrido** es el conjunto de los valores que toma la variable dependiente *y*.
- Los **puntos de corte** con los ejes son de la forma: **$(x, 0)$ $(0, y)$**

Dominio, recorrido y puntos de corte

Determina el dominio, el recorrido y los puntos de corte de esta función.

Dominio: $[-5, 6]$

Recorrido: $[-2, 4]$

Puntos de corte:

- Con el eje *X*: $(-2, 0)$ y $(0, 0)$
- Con el eje *Y*: $(0, 0)$

Ten en cuenta

- Una función es **continua** en un intervalo si no tiene saltos.
- Una función es **creciente** si, cuando aumenta la variable *x*, también aumenta la variable *y*.
- Una función es **decreciente** si, cuando aumenta la variable *x*, la variable *y* disminuye.
- Un punto es un **máximo** si en él la función cambia de ser creciente a ser decreciente.
- Un punto es un **mínimo** si en él la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

Continuidad y monotonía

Indica si la función $f(x) = x^2 - 3$ es continua y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y los mínimos, si los tiene.

Continuidad:

La función es continua en todo su dominio.

Monotonía:

Es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

Es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

La función tiene un mínimo en $(0, -3)$.

No tiene máximos.

Ten en cuenta

- **Función par** $f(-x) = f(x)$
- **Función impar** $f(-x) = -f(x)$

Funciones simétricas

¿Es simétrica la función $f(x) = 3x^4 - 4x^2$?

Para estudiar la simetría de $f(x) = 3x^4 - 4x^2$ hay que calcular $f(-x)$:

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^2 = 3x^4 - 4x^2 = f(x)$$

Se trata de una función par, es simétrica respecto del eje de ordenadas, porque cumple que:

$$f(-x) = f(x)$$

Ten en cuenta

- Una función es **periódica** de período *T* cuando el comportamiento de la función en un intervalo se repite en intervalos sucesivos.

Funciones periódicas

¿Es periódica la función representada en esta gráfica?

La función es periódica.

Su período es $T = 4$.

226

Actividades Finales 11

Relaciones funcionales

35 Entre las siguientes relaciones hay una que no es una función; ¿cuál? Razona tu respuesta.

a) El volumen de una piscina de base rectangular de 40 m² en relación con su profundidad.

b) El precio de una bolsa de patatas a 1,25 € el kilo en relación con su peso.

c) La temperatura de un enfermo y los días de la semana.

d) La altura a la que se encuentra un avión durante un trayecto entre Madrid y Málaga y el tiempo que transcurre.

36 Las siguientes tablas representan funciones. Haz una gráfica y escribe un enunciado de una función que se corresponda con cada una.

a)

x	0	1	2	3
y	0	2,50	5	7,50

b)

x	0	2	4	6
y	8	6	4	2

Estudio de funciones

37 Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.

a)

b)

38 Dadas las funciones:

Ⓘ $f(x) = x - 1$ Ⓘ $f(x) = \sqrt{2x}$

Ⓘ $f(x) = x^2 - 1$ Ⓘ $f(x) = \frac{1}{x-3}$

a) Calcula los valores $f(-1)$, $f(0)$ y $f(3)$, en cada una.

b) Halla también el dominio de cada función.

39 Determina los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

a)

b)

40 Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 9$

c) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

d) $f(x) = x^2 - x - 12$

41 Estudia la continuidad y la monotonía de la función representada en esta gráfica. ¿Cuáles son los máximos y los mínimos de esta función?

42 Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de esta función.

227

Sugerencias didácticas

En esta sección se destacan los procedimientos más importantes que los alumnos deben haber aprendido tras estudiar esta unidad. En este momento, los alumnos deben ser capaces de:

- Hallar el dominio, el recorrido y los puntos de corte de una función.
- Estudiar la continuidad y monotonía.
- Averiguar de forma gráfica y algebraica si una función tiene simetría par o impar.
- Reconocer funciones periódicas dadas mediante un gráfico y calcular sus períodos.

Actividades finales

Soluciones de las actividades

35 Entre las siguientes relaciones hay una que no es una función; ¿cuál? Razona tu respuesta.

a) El volumen de una piscina de base rectangular de 40 m² en relación con su profundidad.

b) El precio de una bolsa de patatas a 1,25 € el kilo en relación con su peso.

c) La temperatura de un enfermo y los días de la semana.

d) La altura a la que se encuentra un avión durante un trayecto entre Madrid y Málaga y el tiempo que transcurre.

La relación del apartado **c)** no es función. Un enfermo puede tener la misma temperatura distintos días, y durante un día su temperatura puede tomar diferentes valores.

36 Las siguientes tablas representan funciones. Haz una gráfica y escribe un enunciado de una función que se corresponda con cada una.

a)

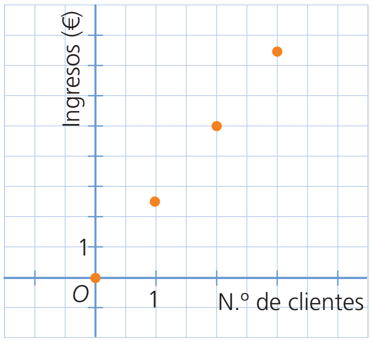
x	0	1	2	3
y	0	2,50	5	7,50

b)

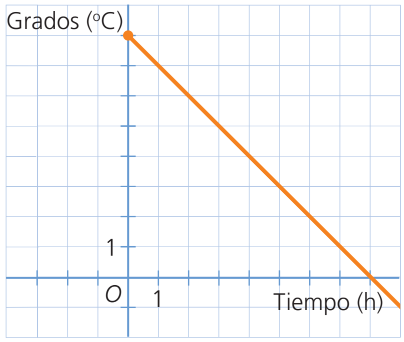
x	0	2	4	6
y	8	6	4	2

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) Si x es el número de clientes que desayunan en una cafetería e y el ingreso, en euros, en la caja, la gráfica que obtenemos es:

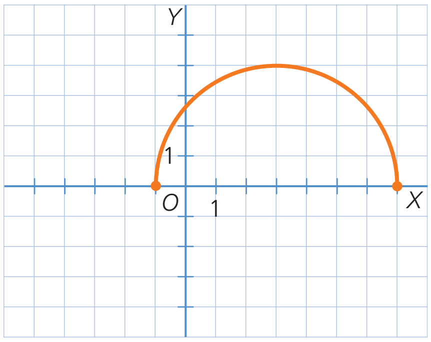


b) En un viaje en coche comprobamos que la temperatura del exterior es de 8 °C y cada 2 h apuntamos la temperatura exterior a la que nos encontramos.

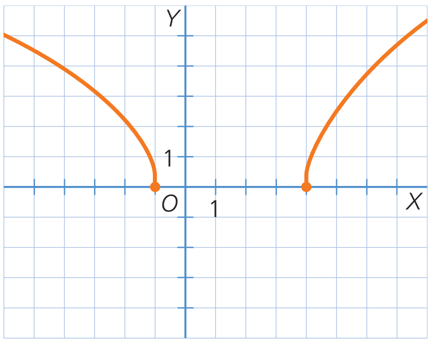


37 Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.

a)



b)



a) Dominio $= [-1, 7]$
Recorrido $= [0, 4]$

b) Dominio $= (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$
Recorrido $= [0, +\infty)$

38 Dadas las funciones:

Ⓘ $f(x) = x - 1$ Ⓘⓘ $f(x) = x^2 - 1$ Ⓘⓘⓘ $f(x) = \sqrt{2x}$ ⒾⓋ $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

a) Calcula los valores $f(-1)$, $f(0)$ y $f(3)$, en cada una. **b)** Halla también el dominio de cada función.

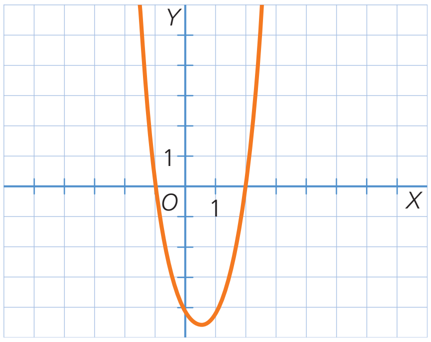
a)
- $f(x) = x - 1 \rightarrow f(-1) = -2$, $f(0) = -1$ y $f(3) = 2$
- $f(x) = x^2 - 1 \rightarrow f(-1) = 0$, $f(0) = -1$ y $f(3) = 8$
- $f(x) = \sqrt{2x}$ $f(-1)$ no tiene sentido calcularlo, ya que -1 no pertenece al dominio de la función. $f(0) = 0$ y $f(3) = \sqrt{6}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x-3} \rightarrow f(-1) = \dfrac{1}{-4}$ $f(0) = \dfrac{1}{-3}$ $f(3)$ no tiene sentido calcularlo, ya que 3 no pertenece al dominio.

b) $f(x) = x - 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{2x} \rightarrow \text{Dom } f = [0, +\infty)$

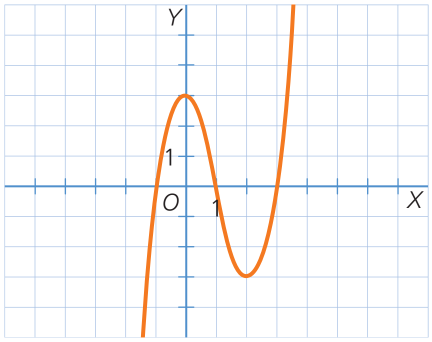
$f(x) = x^2 - 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x-3} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

39 Determina los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

a)



b)



a) $(-1, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, -4)$ **b)** $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 3)$

40 Halla los puntos de corte con los ejes de las funciones.

a) $f(x) = x - 1$ **b)** $f(x) = x^2 - 9$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-1}{2}$ **d)** $f(x) = x^2 - x - 12$

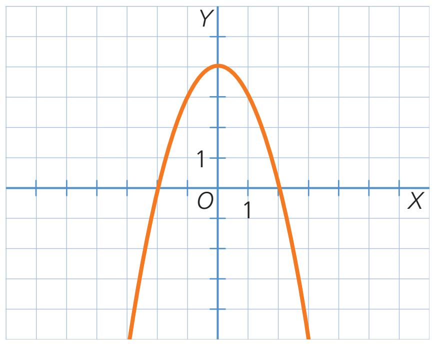
a) Con el eje X: $(1, 0)$
Con el eje Y: $(0, -1)$

b) Con el eje X: $(3, 0)$ y $(-3, 0)$
Con el eje Y: $(0, -9)$

c) Con el eje X: $(1, 0)$
Con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

d) Con el eje X: $(4, 0)$ y $(-3, 0)$
Con el eje Y: $(0, -12)$

41 Estudia la continuidad y la monotonía de la función representada en esta gráfica. ¿Cuáles son los máximos y los mínimos de esta función?

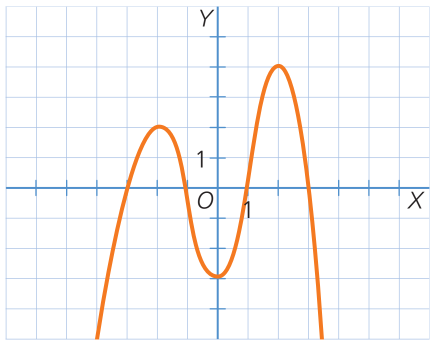


Es una función continua.

Es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

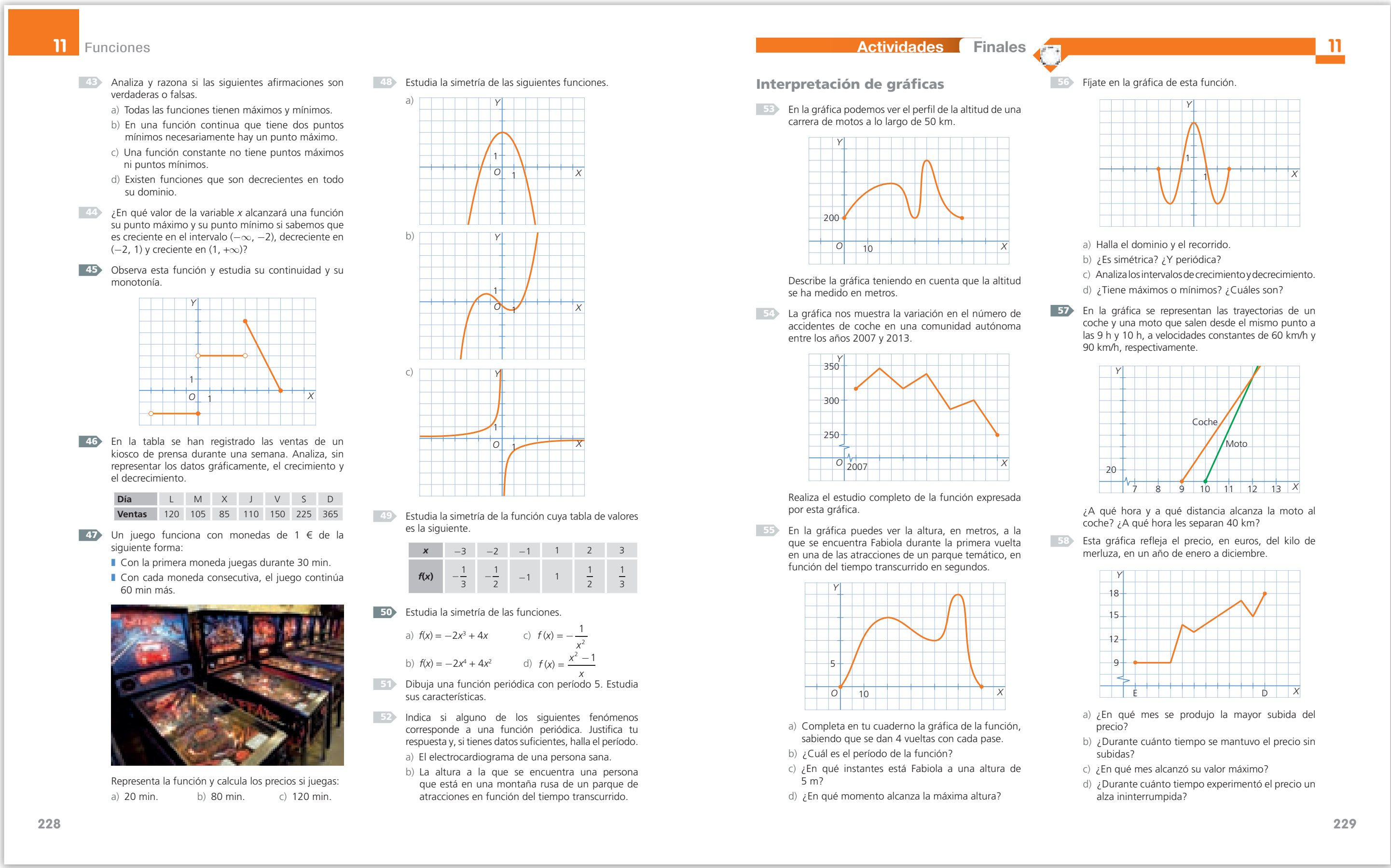
Tiene un punto máximo, el $(0, 4)$ y no tiene puntos mínimos.

42 Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de esta función.



Es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$ y decreciente en $(-2, 0)$ y $(2, +\infty)$.

Tiene dos puntos máximos: $(-2, 2)$ y $(2, 4)$ y un punto mínimo, el $(0, -3)$.



11 Funciones

43 Analiza y razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) Todas las funciones tienen máximos y mínimos.
b) En una función continua que tiene dos puntos mínimos necesariamente hay un punto máximo.
c) Una función constante no tiene puntos máximos ni puntos mínimos.
d) Existen funciones que son decrecientes en todo su dominio.

44 ¿En qué valor de la variable x alcanzará una función su punto máximo y su punto mínimo si sabemos que es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$, decreciente en $(-2, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$?

45 Observa esta función y estudia su continuidad y su monotonía.

46 En la tabla se han registrado las ventas de un kiosco de prensa durante una semana. Analiza, sin representar los datos gráficamente, el crecimiento y el decrecimiento.

Día	L	M	X	J	V	S	D
Ventas	120	105	85	110	150	225	365

47 Un juego funciona con monedas de 1 € de la siguiente forma:
- Con la primera moneda juegas durante 30 min.
- Con cada moneda consecutiva, el juego continúa 60 min más.

Representa la función y calcula los precios si juegas:
a) 20 min. b) 80 min. c) 120 min.

48 Estudia la simetría de las siguientes funciones.
a) b) c)

49 Estudia la simetría de la función cuya tabla de valores es la siguiente.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

50 Estudia la simetría de las funciones.
a) $f(x) = -2x^3 + 4x$
b) $f(x) = -2x^4 + 4x^2$
c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$
d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

51 Dibuja una función periódica con período 5. Estudia sus características.

52 Indica si alguno de los siguientes fenómenos corresponde a una función periódica. Justifica tu respuesta y, si tienes datos suficientes, halla el período.
a) El electrocardiograma de una persona sana.
b) La altura a la que se encuentra una persona que está en una montaña rusa de un parque de atracciones en función del tiempo transcurrido.

228

Actividades Finales 11

Interpretación de gráficas

53 En la gráfica podemos ver el perfil de la altitud de una carrera de motos a lo largo de 50 km.

Describe la gráfica teniendo en cuenta que la altitud se ha medido en metros.

54 La gráfica nos muestra la variación en el número de accidentes de coche en una comunidad autónoma entre los años 2007 y 2013.

Realiza el estudio completo de la función expresada por esta gráfica.

55 En la gráfica puedes ver la altura, en metros, a la que se encuentra Fabiola durante la primera vuelta en una de las atracciones de un parque temático, en función del tiempo transcurrido en segundos.

a) Completa en tu cuaderno la gráfica de la función, sabiendo que se dan 4 vueltas con cada pase.
b) ¿Cuál es el período de la función?
c) ¿En qué instantes está Fabiola a una altura de 5 m?
d) ¿En qué momento alcanza la máxima altura?

56 Fíjate en la gráfica de esta función.

a) Halla el dominio y el recorrido.
b) ¿Es simétrica? ¿Y periódica?
c) Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) ¿Tiene máximos o mínimos? ¿Cuáles son?

57 En la gráfica se representan las trayectorias de un coche y una moto que salen desde el mismo punto a las 9 h y 10 h, a velocidades constantes de 60 km/h y 90 km/h, respectivamente.

¿A qué hora y a qué distancia alcanza la moto al coche? ¿A qué hora les separan 40 km?

58 Esta gráfica refleja el precio, en euros, del kilo de merluza, en un año de enero a diciembre.

a) ¿En qué mes se produjo la mayor subida del precio?
b) ¿Durante cuánto tiempo se mantuvo el precio sin subidas?
c) ¿En qué mes alcanzó su valor máximo?
d) ¿Durante cuánto tiempo experimentó el precio un alza ininterrumpida?

229

43 Analiza y razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Todas las funciones tienen máximos y mínimos.

b) En una función continua que tiene dos puntos mínimos necesariamente hay un punto máximo.

c) Una función constante no tiene puntos máximos ni puntos mínimos.

d) Existen funciones que son decrecientes en todo su dominio.

a) Falsa, por ejemplo $f(x) = x$.

b) Verdadera.

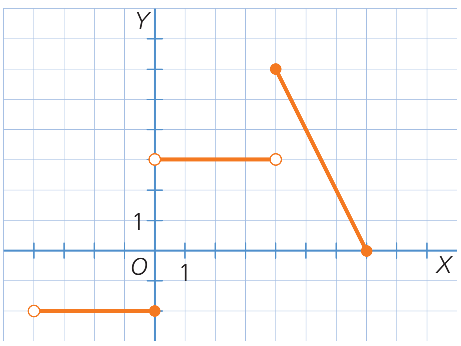
c) Verdadera.

d) Verdadera, por ejemplo $f(x) = -x^3$.

44 ¿En qué valor de la variable x alcanzará una función su punto máximo y su punto mínimo si sabemos que es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$, decreciente en $(-2, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$?

La función alcanzará su punto máximo en $x = -2$ y su punto mínimo en $x = 1$.

45 Observa esta función y estudia su continuidad y su monotonía.



La función no es continua, presenta puntos de discontinuidad en $x = 0$ y $x = 4$. Es constante en $(-4, 0)$ y $(0, 4)$, y es decreciente en el intervalo $(4, 7)$.

46 En la tabla se han registrado las ventas de un kiosco de prensa durante una semana. Analiza, sin representar los datos gráficamente, el crecimiento y el decrecimiento.

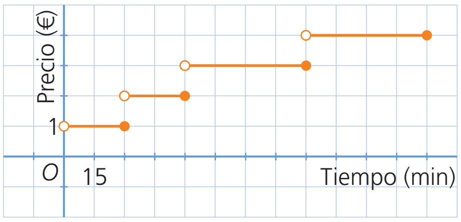
Día	L	M	X	J	V	S	D
Ventas	120	105	85	110	150	225	365

Las ventas decrecieron de lunes a miércoles y fueron creciendo paulatinamente desde el jueves hasta el domingo.

47 Un juego funciona con monedas de 1 € de la siguiente forma:

- Con la primera moneda juegas durante 30 min.
- Con cada moneda consecutiva, 60 min más.

Representa la función y calcula los precios si juegas: **a)** 20 min. **b)** 80 min. **c)** 120 min.



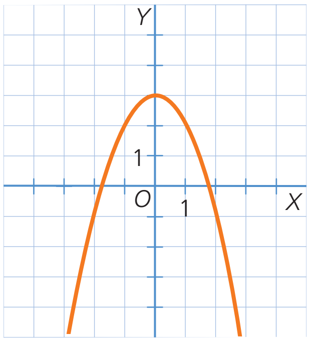
a) El precio por jugar 20 min es 1 €.

b) El precio de 80 min es 3 €.

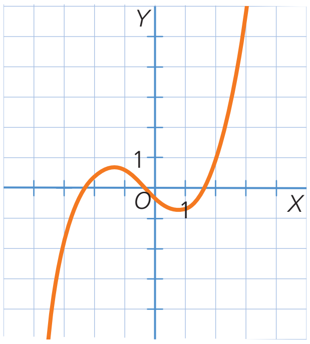
c) Si juegas 120 min el precio es 3 €.

48 Estudia las simetrías de las funciones.

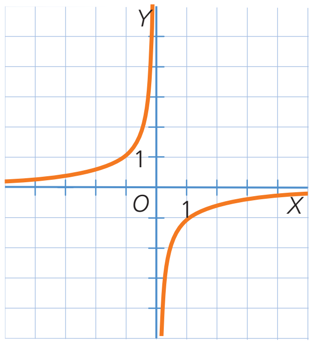
a)



b)



c)



a) Es simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) y **c)** Es simétrica respecto del origen de coordenadas, es una función impar.

49 Estudia la simetría de la función cuya tabla de valores es la siguiente.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Cumple $f(-x) = -f(x)$ por tanto es una función impar.

50 Estudia la simetría de las funciones.

a) $f(x) = -2x^3 + 4x$ **b)** $f(x) = -2x^4 + 4x^2$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

a) $f(-x) = -2(-x)^3 + 4(-x) = 2x^3 - 4x = -f(x) \rightarrow$ F. impar

b) $f(-x) = -2(-x)^4 + 4(-x)^2 = -2x^4 + 4x^2 \rightarrow$ F. par

c) $f(-x) = -\dfrac{1}{(-x)^2} = -\dfrac{1}{x^2} = f(x) \rightarrow$ F. par

d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)} = -\dfrac{x^2 - 1}{x} = -f(x) \rightarrow$ F. impar

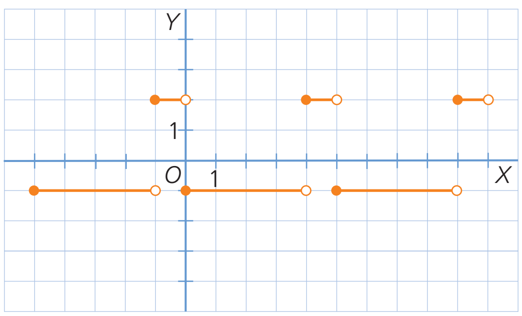
51 Dibuja una función periódica con período 5. Estudia sus características.

Respuesta abierta, por ejemplo:

Dominio: $[-5, 10)$ Recorrido: $[-1, 2]$

La función presenta puntos de discontinuidad en los puntos $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$, $x = 5$ y $x = 9$.

Es una función constante que toma valor 2 y valor -1 alternativamente.



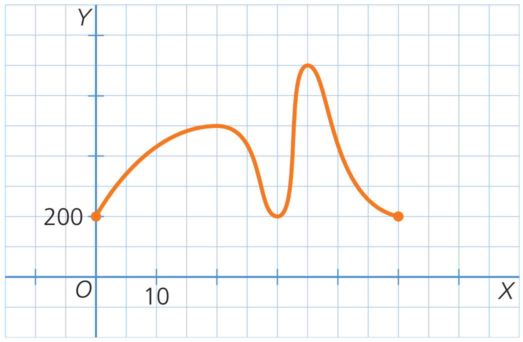
52 Indica si alguno de los siguientes fenómenos corresponde a una función periódica. Justifica tu respuesta y, si tienes datos suficientes, halla el período.

a) El electrocardiograma de una persona sana.

b) La altura a la que se encuentra una persona que está en una montaña rusa de un parque de atracciones en función del tiempo trascurrido.

a) Es periódica.   b) Es periódica de período el tiempo que tarda en dar una vuelta completa.

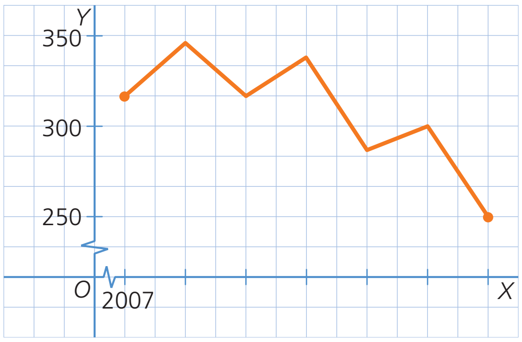
53 En la gráfica podemos ver el perfil de la altitud de una carrera de motos a lo largo de 50 km. Describe la gráfica teniendo en cuenta que la altitud se ha medido en metros.



La carrera parte de una altitud sobre el nivel del mar de 200 m, durante 20 km ascienden hasta los 500 m. Durante 10 km realizan una bajada y alcanzan la misma altitud de partida.

Los 5 km siguientes suben hasta los 700 m y a partir del km 35 y durante 15 km realizan una bajada para volver a la altitud inicial.

54 La gráfica nos muestra la variación en el número de accidentes de coche en una comunidad autónoma entre los años 2007 y 2013. Realiza el estudio completo de la función expresada por esta gráfica.



La variable independiente son *los años* y la variable dependiente, *el número de accidentes*.

Dominio: [2007, 2013]   Recorrido: [250, 340]

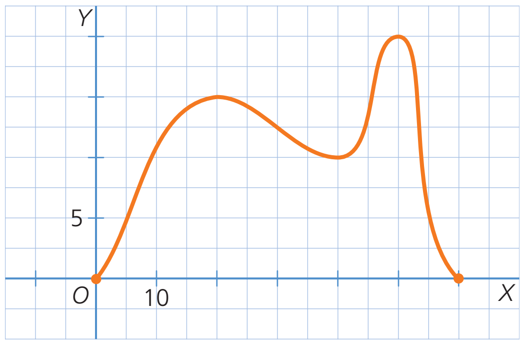
No tiene puntos de corte con los ejes. Es una función continua.

Es creciente en (2007, 2008), (2009, 2010) y (2011, 2012) y decreciente en (2008, 2009), (2010, 2011) y (2012, 2013).

Presenta puntos máximos en los puntos (2008, 340), (2010, 330) y (2012, 300) y puntos mínimos en (2009, 317) y (2011, 280).

No es simétrica ni periódica.

55 En la gráfica puedes ver la altura, en metros, a la que se encuentra Fabiola, durante la primera vuelta en una de las atracciones de un parque temático, en función del tiempo trascurrido.



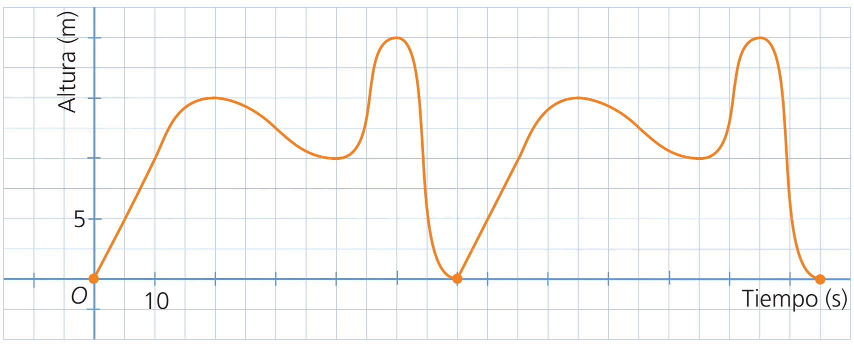
a) Completa en tu cuaderno la gráfica de la función, sabiendo que se dan 4 vueltas con cada pase.

b) ¿Cuál es el período de la función?

c) ¿En qué instantes está Fabiola a una altura de 5 m?

d) ¿En qué momento alcanza la máxima altura?

a)

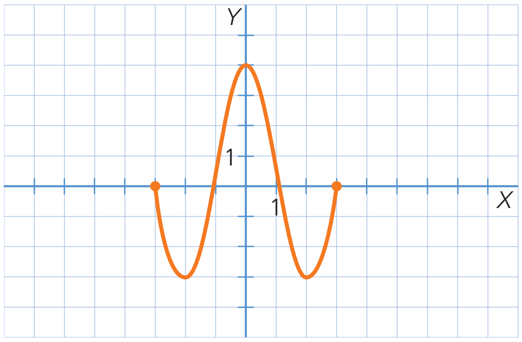


b) $T = 60$ s

c) A los 5 s y a los 55 s del comienzo de cada vuelta.

d) A los 50 s del comienzo de cada vuelta.

56 Fíjate en la gráfica de esta función.



a) Halla el dominio y el recorrido.

b) ¿Es simétrica? ¿Y periódica?

c) Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) ¿Tiene máximos o mínimos? ¿Cuáles son?

a) Dominio: $[-3, 3]$

Recorrido: $[-3, 4]$

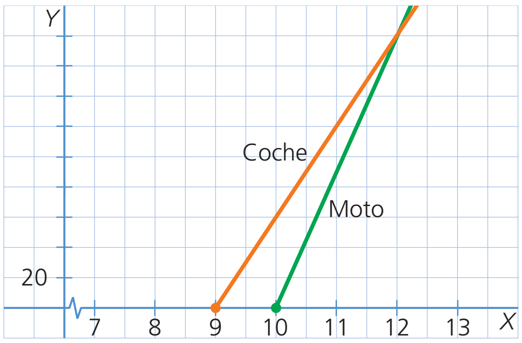
b) Sí, es simétrica, es una función par.

No es periódica.

c) La función es creciente en $(-2, 0)$ y $(2, 3)$ y decreciente en $(-3, -2)$ y $(0, 2)$.

d) Tiene un punto máximo en $(0, 4)$ y dos puntos mínimos, $(-2, -3)$ y $(2, -3)$.

57 En la gráfica se representan las trayectorias de un coche y una moto que salen desde el mismo punto a las 9 h y 10 h, a velocidades constantes de 60 km/h y 90 km/h, respectivamente.

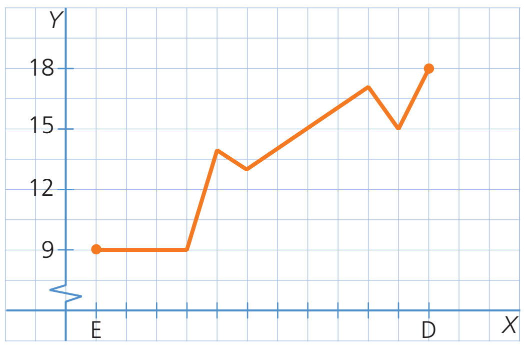


¿A qué hora y a qué distancia alcanza la moto al coche? ¿A qué hora les separan 40 km?

La moto alcanza al coche a las 12 h cuando han recorrido 180 km.

Les separan 40 km a las 10 h 30 min.

58 Esta gráfica refleja el precio, en euros, del kilo de merluza, en un año de enero a diciembre.



a) ¿En qué mes se produjo la mayor subida del precio?

b) ¿Durante cuánto tiempo se mantuvo el precio sin subidas?

c) ¿En qué mes alcanzó su valor máximo?

d) ¿Durante cuánto tiempo experimentó el precio un alza ininterrumpida?

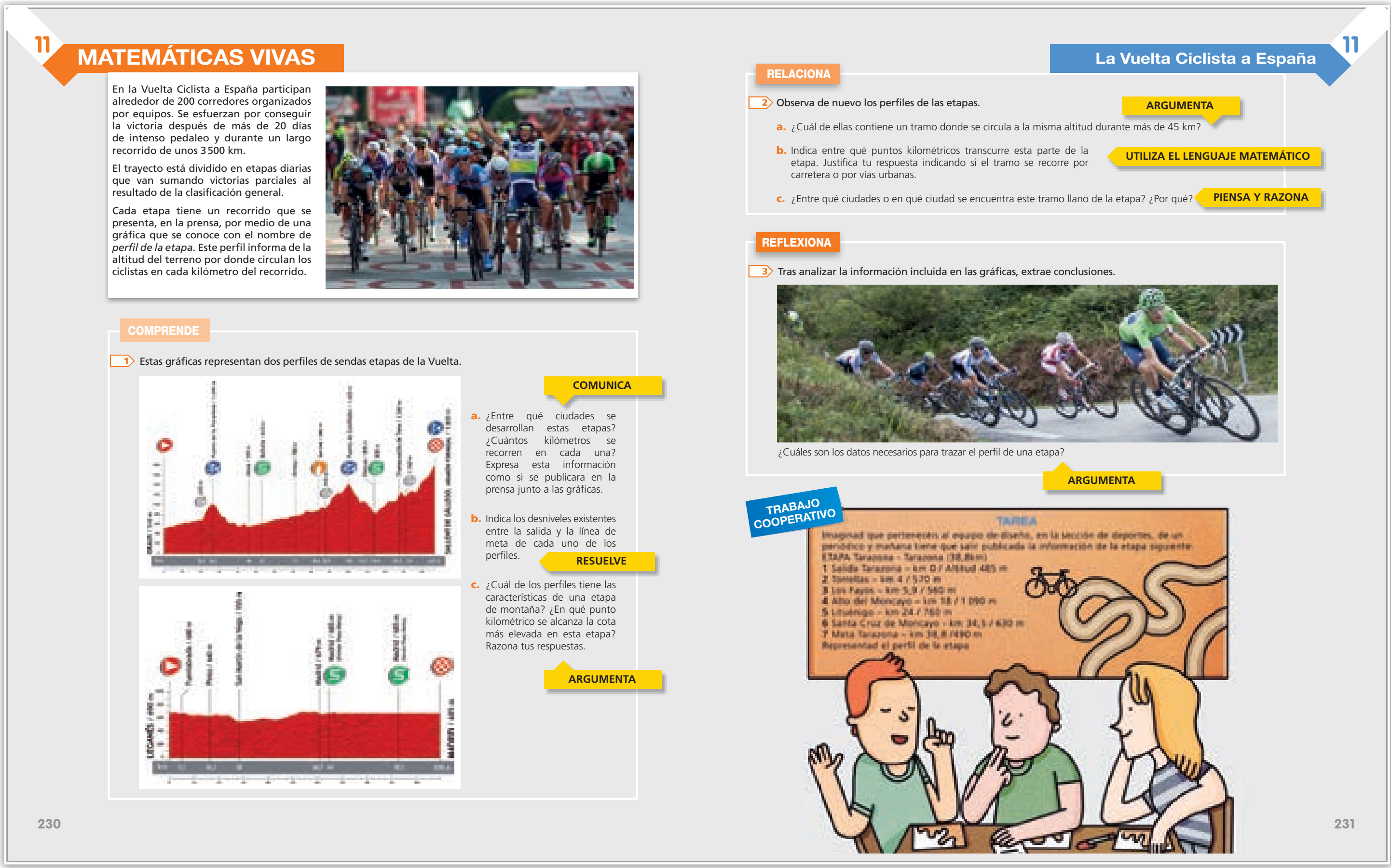
a) En abril.

b) Desde enero hasta fin de marzo.

c) En diciembre.

d) Desde junio hasta octubre, cuatro meses.

Matemáticas vivas



11 MATEMÁTICAS VIVAS

En la Vuelta Ciclista a España participan alrededor de 200 corredores organizados por equipos. Se esfuerzan por conseguir la victoria después de más de 20 días de intenso pedaleo y durante un largo recorrido de unos 3 500 km.

El trayecto está dividido en etapas diarias que van sumando victorias parciales al resultado de la clasificación general.

Cada etapa tiene un recorrido que se presenta, en la prensa, por medio de una gráfica que se conoce con el nombre de *perfil de la etapa.* Este perfil informa de la altitud del terreno por donde circulan los ciclistas en cada kilómetro del recorrido.

COMPRENDE

1 Estas gráficas representan dos perfiles de sendas etapas de la Vuelta.

COMUNICA

a. ¿Entre qué ciudades se desarrollan estas etapas? ¿Cuántos kilómetros se recorren en cada una? Expresa esta información como si se publicara en la prensa junto a las gráficas.

b. Indica los desniveles existentes entre la salida y la línea de meta de cada uno de los perfiles. RESUELVE

c. ¿Cuál de los perfiles tiene las características de una etapa de montaña? ¿En qué punto kilométrico se alcanza la cota más elevada en esta etapa? Razona tus respuestas. ARGUMENTA

230

La Vuelta Ciclista a España 11

RELACIONA

2 Observa de nuevo los perfiles de las etapas.

a. ¿Cuál de ellas contiene un tramo donde se circula a la misma altitud durante más de 45 km? ARGUMENTA

b. Indica entre qué puntos kilométricos transcurre esta parte de la etapa. Justifica tu respuesta indicando si el tramo se recorre por carretera o por vías urbanas. UTILIZA EL LENGUAJE MATEMÁTICO

c. ¿Entre qué ciudades o en qué ciudad se encuentra este tramo llano de la etapa? ¿Por qué? PIENSA Y RAZONA

REFLEXIONA

3 Tras analizar la información incluida en las gráficas, extrae conclusiones.

¿Cuáles son los datos necesarios para trazar el perfil de una etapa? ARGUMENTA

TRABAJO COOPERATIVO

TAREA

Imaginad que pertenecéis al equipo de diseño, en la sección de deportes, de un periódico y mañana tiene que salir publicada la información de la etapa siguiente:

ETAPA Tarazona – Tarazona (38,8 km)

1 Salida Tarazona – km 0 / Altitud 485 m

2 Torrellas – km 4 / 570 m

3 Los Fayos – km 5,9 / 560 m

4 Alto del Moncayo – km 18 / 1 090 m

5 Litueñigo – km 24 / 760 m

6 Santa Cruz de Moncayo – km 34,5 / 630 m

7 Meta Tarazona – km 38,8 / 490 m

Representad el perfil de la etapa

231

La Vuelta Ciclista a España

Sugerencias didácticas

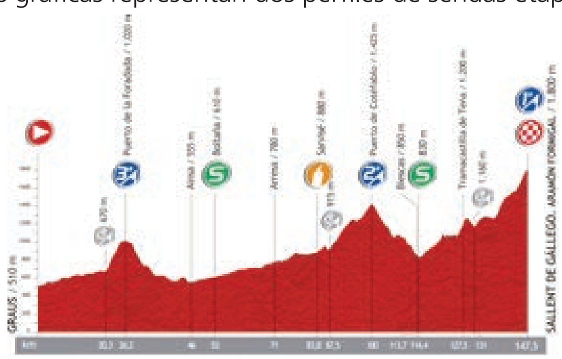
La Vuelta Ciclista a España resultará muy útil a los alumnos para completar el desarrollo de su capacidad para el manejo de funciones. En las actividades de comprensión las gráficas propuestas en la presentación de la actividad llevarán por si mismas a un tratamiento matemático. Los alumnos comprenden la relación entre los lenguajes natural y gráfico para comunicar, resolver y argumentar, desarrollando de este modo competencias matemáticas. En las actividades de relación se plantean cuestiones propias de las matemáticas como son la búsqueda y la comparación. Para terminar reflexionando sobre el problema.

Para finalizar la sección, se incluye el apartado **Trabajo cooperativo** donde se propone una tarea cuya estrategia cooperativa es ***Preparar la tarea,* adaptación del Laboratorio de Innovación Educativa del *colegio Ártica* a partir de *David* y *Roger Johnson*.** Para desarrollar esta tarea, los alumnos imaginarán que pertenecen al equipo de diseño de un periódico y elaborarán en pequeños grupos un perfil de una etapa ciclista a partir de los datos que tienen.

Soluciones de las actividades

Comprende

1 Estas gráficas representan dos perfiles de sendas etapas de la Vuelta.



a) ¿Entre qué ciudades se desarrollan estas etapas? ¿Cuántos kilómetros se recorren en cada una? Expresa esta información como si se publicara en la prensa junto a las gráficas.

b) Indica los desniveles existentes entre la salida y la línea de meta de cada uno de los perfiles.

c) ¿Cuál de los perfiles tiene las características de una etapa de montaña? ¿En qué punto kilométrico se alcanza la cota más elevada en esta etapa? Razona tus respuestas.

a) La primera etapa se desarrolla entre Graus y Sallent de Gállego y la segunda entre Leganés y Madrid. En la primera tienen que recorrer 147,5 km, mientras que en la segunda, 109,6 km.

b) Desnivel entre la salida y la meta en la etapa Graus-Formigal: 1 800 − 510 = 1 290 m

Desnivel entre la salida y la meta en la etapa Leganés-Madrid: 685 − 690 = −5m

c) La etapa de montaña es la de Graus-Formigal por la cantidad de desniveles que presenta.

La cota máxima de la etapa de montaña es 1 800 m de altitud sobre el nivel del mar y el punto kilométrico en que se encuentra es precisamente la meta, el 147,5.

Relaciona

2 Observa de nuevo los perfiles de las etapas.

a) ¿Cuál de ellas contiene un tramo donde se circula a la misma altitud durante más de 45 km?

b) Indica entre qué puntos kilométricos transcurre esta parte de la etapa. Justifica tu respuesta indicando si el tramo se recorre por carretera o por vías urbanas.

c) ¿Entre qué ciudades o en qué ciudad se encuentra este tramo llano de la etapa? ¿Por qué?

a) En la etapa Leganés-Madrid se circula a la misma altitud.

b) Esta parte de la etapa está contenida en el intervalo de kilómetros [64; 109,6], y se recorre por vías urbanas.

c) El tramo llano de la etapa se recorre por la ciudad de Madrid, los ciclistas hacen un recorrido definido por la organización para que los aficionados disfruten viendo a los ciclistas.

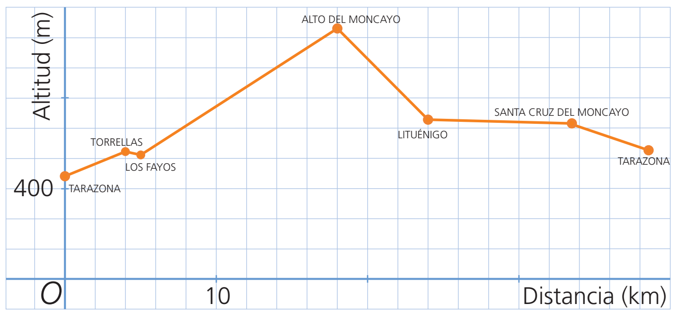
Reflexiona

3 Tras analizar la información incluida en las gráficas, extrae conclusiones.

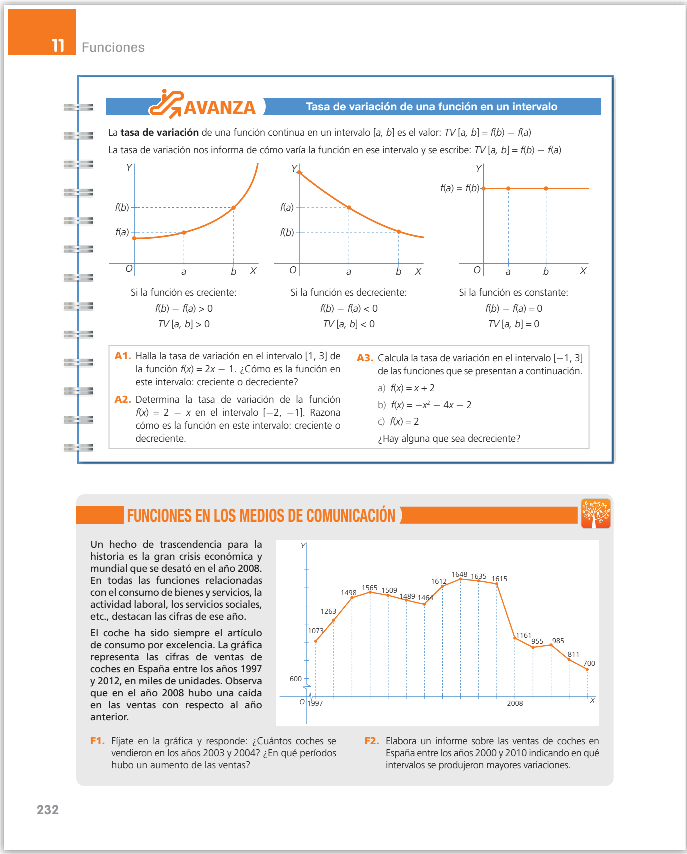
¿Cuáles son los datos necesarios para trazar el perfil de una etapa?

Es necesario conocer los kilómetros totales de la etapa y la altitud, sobre el nivel del mar, en cada punto kilométrico.

Trabajo cooperativo



Avanza. Tasa de variación de una función en un intervalo


11 Funciones

AVANZA Tasa de variación de una función en un intervalo

La **tasa de variación** de una función continua en un intervalo $[a, b]$ es el valor: $TV[a, b] = f(b) - f(a)$

La tasa de variación nos informa de cómo varía la función en ese intervalo y se escribe: $TV[a, b] = f(b) - f(a)$

Si la función es creciente: $f(b) - f(a) > 0$, $TV[a, b] > 0$

Si la función es decreciente: $f(b) - f(a) < 0$, $TV[a, b] < 0$

Si la función es constante: $f(b) - f(a) = 0$, $TV[a, b] = 0$

A1. Halla la tasa de variación en el intervalo [1, 3] de la función $f(x) = 2x - 1$. ¿Cómo es la función en este intervalo: creciente o decreciente?

A2. Determina la tasa de variación de la función $f(x) = 2 - x$ en el intervalo $[-2, -1]$. Razona cómo es la función en este intervalo: creciente o decreciente.

A3. Calcula la tasa de variación en el intervalo $[-1, 3]$ de las funciones que se presentan a continuación.

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = -x^2 - 4x - 2$

c) $f(x) = 2$

¿Hay alguna que sea decreciente?

FUNCIONES EN LOS MEDIOS DE COMUNICACIÓN

Un hecho de trascendencia para la historia es la gran crisis económica y mundial que se desató en el año 2008. En todas las funciones relacionadas con el consumo de bienes y servicios, la actividad laboral, los servicios sociales, etc., destacan las cifras de ese año.

El coche ha sido siempre el artículo de consumo por excelencia. La gráfica representa las cifras de ventas de coches en España entre los años 1997 y 2012, en miles de unidades. Observa que en el año 2008 hubo una caída en las ventas con respecto al año anterior.

F1. Fíjate en la gráfica y responde: ¿Cuántos coches se vendieron en los años 2003 y 2004? ¿En qué períodos hubo un aumento de las ventas?

F2. Elabora un informe sobre las ventas de coches en España entre los años 2000 y 2010 indicando en qué intervalos se produjeron mayores variaciones.

232

Sugerencias didácticas

En esta sección se introduce el concepto y el procedimiento de cálculo de la tasa de variación de una función continua en un intervalo.

El aprendizaje de qué es la tasa de variación y cuál es la relación entre su valor y la monotonía de una función se debe introducir mediante ejemplos gráficos de funciones.

Pondremos especial atención en el cálculo de tasas de variación en intervalos cuyos extremos sean números negativos.

Soluciones de las actividades

A1. Halla la tasa de variación en el intervalo [1, 3] de la función $f(x) = 2x - 1$. ¿Cómo es la función en este intervalo: creciente o decreciente?

$TV[1, 3] = f(3) - f(1) = 5 - 1 = 4 > 0$

Es creciente.

A2. Determina la tasa de variación de la función $f(x) = 2 - x$ en el intervalo $[-2, -1]$. ¿Cómo es la función en este intervalo: creciente o decreciente?

$TV[-2, -1] = f(-1) - f(-2) = 3 - 4 = -1 < 0$

Es decreciente.

A3. Calcula la tasa de variación en el intervalo $[-1, 3]$ de las funciones que se presentan a continuación.

a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = -x^2 - 4x - 2$ c) $f(x) = 2$

¿Hay alguna que sea decreciente?

a) $TV[-1, 3] = f(3) - f(-1) = 5 - 1 = 4 > 0$

c) $TV[-1, 3] = f(3) - f(-1) = 2 - 2 = 0$

b) $TV[-1, 3] = f(3) - f(-1) = -7 - 1 = -8 < 0 \rightarrow$ Decreciente

Funciones en los medios de comunicación

Sugerencias didácticas

Como cierre de la unidad podríamos plantear la actividad de esta sección como un reto periodístico, en el que los alumnos deben escribir un artículo aportando los datos de las preguntas planteadas. Al observar el gráfico deberán ser capaces de relacionar lo estudiado en la unidad con la información extraída de un medio de comunicación. Se debe insistir en la importancia de tener una cultura matemática para tratar aspectos del mundo empresarial.

Soluciones de las actividades

F1. Fíjate en la gráfica y responde: ¿Cuántos coches se vendieron en los años 2003 y 2004? ¿En qué períodos hubo un aumento de las ventas?

Se vendieron 1 612 000 + 1 464 000 = 3 076 000 coches

Hubo aumento de ventas de 1997 a 2000, de 2003 a 2005 y de 2009 a 2010.

F2. Elabora un informe sobre las ventas de coches en España entre los años 2000 y 2010 indicando en qué intervalos se produjeron mayores variaciones.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
N.º de coches (en mill.)	1,565	1,509	1,489	1,464	1,612	1,648	1,635	1,615	1,161	0,955	0,985

Del año 2003 al 2005 se produjo un importante aumento en las ventas pero fue en 2008 donde se produjo una reducción en las ventas de 454 000 coches, respecto al año anterior.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN
PRUEBA A

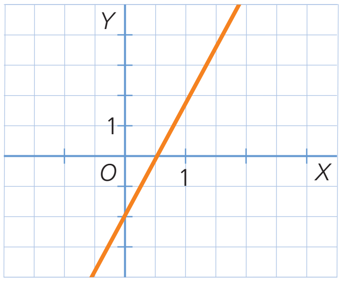
1. Dada una función que transforma cada número en su cuádruplo menos 2 unidades.

a) Representa la función.

b) Escribe su expresión algebraica.

c) Halla los puntos de corte con los ejes.

d) Estudia el crecimiento y decrecimiento.

a) 

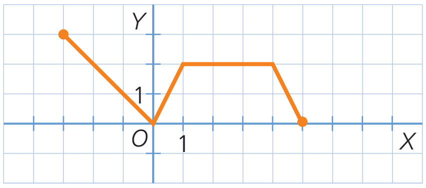
b) $f(x) = 4x - 2$

c) Punto de corte con el eje *X*: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: $(0, -2)$

d) La función es creciente en todo su dominio.

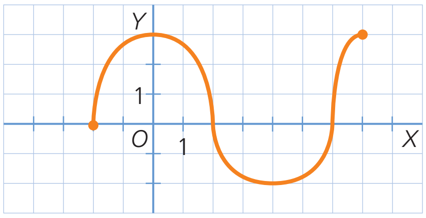
2. Halla el dominio y el recorrido de la siguiente función.



Dom $f = [-3, 5]$

Recorrido: $[0, 3]$

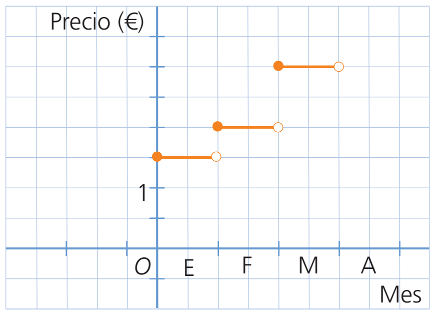
3. Escribe las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo de la gráfica.



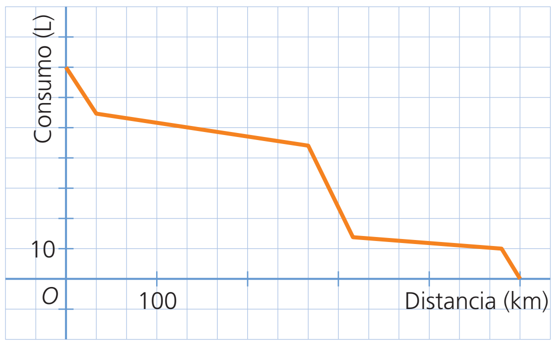
Máximo: $(0, 3)$

Mínimo: $(4, -2)$

4. Dibuja la función que represente el precio del kilo de mandarinas desde enero hasta abril, sabiendo que el 1 de enero era de 1,50 €, y que este precio se mantuvo hasta el 1 de febrero, fecha en que subió a 2 €. El primer día del mes de marzo, el precio experimentó otra subida: el kilo de mandarinas quedó fijado en 3 €, importe que se mantuvo también a lo largo del mes de abril.



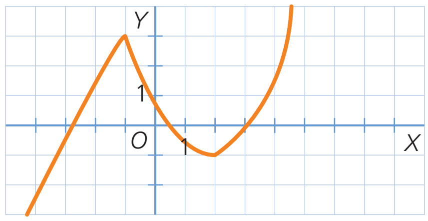
5. Una familia sale en coche hacia Orense desde un pueblo cercano a Madrid. Al comenzar el viaje tiene el depósito de gasolina lleno. El consumo depende del trazado de las vías por donde circulan: es más alto en ciudades y carreteras secundarias y más bajo en autovías. En la gráfica puedes ver el combustible que va quedando en el depósito a lo largo del viaje. Determina el tipo de vías por las que circula el coche en cada uno de los cinco tramos diferenciados del trayecto.



- Pueblo de Madrid: del kilómetro 0 al 40.
- Autovía: del kilómetro 40 al 260 y del kilómetro 320 al 480.
- Carretera secundaria: del kilómetro 260 al 320.
- Orense: del kilómetro 480 al 500.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN
PRUEBA B

1. Halla el dominio, los puntos de corte con los ejes, la monotonía y los puntos críticos de la función.



Dom $f = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X:* (−2, 0), (1, 0) y (3, 0)

Puntos de corte con el eje *Y:* (0, 4)

Es creciente en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Es decreciente en (−1, 2).

Máximo: (−1, 3) Mínimo: (2, −1)

2. Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes funciones.

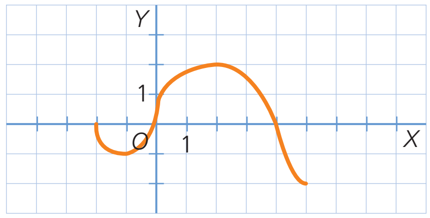
a) $f(x) = x^2 + x - 6$

b) $f(x) = \sqrt{x+9}$

a) Puntos de corte con el eje *X*: (2, 0) y (−3, 0)
Puntos de corte con el eje *Y:* (0, −6)

b) Puntos de corte con el eje *X*: (−9, 0)
Puntos de corte con el eje *Y:* (0, 3)

3. Representa gráficamente una función que cumpla todas las características indicadas.



- Dom $f = [-2, 5]$
- Tiene un máximo en (2, 2).
- Pasa por el origen de coordenadas.
- Corta al eje *X* en (4, 0).

4. Clasifica las siguientes funciones según su simetría.

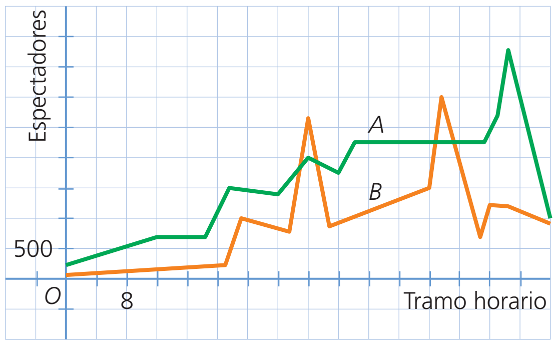
a) $f(x) = x^3 - 6x$

b) $f(x) = x^6 - 6$

a) $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x$
$-f(x) = -(x^3 - 6x) = -x^3 + 6x$
La función tiene simetría impar.

b) $f(x) = x^6 - 6$
$f(-x) = (-x)^6 - 6 = x^6 - 6$
La función tiene simetría par.

5. La gráfica representa los niveles de audiencia de dos cadenas televisivas desde las 7 h a las 24 h, en un día cualquiera de programación.



Responde razonadamente.

a) ¿Qué cadena es la que tiene mayor audiencia?

b) Teniendo en cuenta que las noticias se emiten a las 15 h y las 21 h, ¿qué cadena prefieren los telespectadores para informarse?

c) ¿En qué cadena y a qué hora se emite el programa de mayor audiencia?

d) El número de telespectadores se mantiene constante en una cadena y en un tramo horario. Di cuál es la cadena en la que ocurre esto y cuál es el tramo.

a) La cadena *A*.

b) La cadena *B*.

c) En la cadena *A*, a las 23 h.

d) En la cadena *A*, entre las 17 h y las 22 h.