1. Elementos da teoria da medida.

Definição 1.1. - Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra se

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ então $\cup_{j \leq n} A_j \in \mathcal{A}$.

Uma álgebra é dita uma σ-álgebra quando vale ainda a seguinte extensão de (iii):

(iv) se $\{A_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$ então $\cup_{j \in \mathbf{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Como $\cup A^c = (\cap A)^c$ uma álgebra (σ-álgebra) é fechada em relação à interseção finita (enumerável) de elementos.

Exemplo 1.2. -

i - Se X é um conjunto qualquer, então $\{\emptyset, X\}$ é uma álgebra, e é a menor álgebra que contém X.

ii - No outro extremo, $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, a família das partes de X é uma álgebra.

iii - Seja $X = \mathbf{R}$ e $\mathcal{A}$ a família formada por uniões finitas de conjuntos da forma $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$. É fácil verificar que $\mathcal{A}$ é uma álgebra. Por outro lado, a união enumerável de tais conjuntos não forma uma σ-álgebra. De fato, $\mathbf{R} \subset \{0\} = \cup(-\infty, -1/n] \cup (1/n, +\infty)$ mas, evidentemente, $\{0\} \notin \mathcal{A}$.

iv - Seja $\mathcal{A}_i$ uma coleção de σ-álgebras. É fácil ver que $\cap \mathcal{A}_i$ é uma σ-álgebra. Dado $E \subset P(X)$, a coleção $\cap_{E \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$ é dita a σ-álgebra gerada por E. Observe que $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ é uma σ-álgebra que contém E, de modo que a definição acima faz sentido.

No que segue consideramos $\overline{\mathbf{R}}^+ = \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ a semi-reta real positiva estendida.

Definição 1.3. - Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de X, uma função $m : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ é dita uma medida se $m(\emptyset) = 0$ e se, para toda sequência enumerável de conjuntos disjuntos A_n de $\mathcal{A}$ tal que $\cup_n^\infty A_n \in \mathcal{A}$, temos que $m(\cup_n^\infty A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Se $m(X) < +\infty$, dizemos que m tem medida finita.

Uma medida é monótona no seguinte sentido.

$$B \subset A \Longrightarrow m(B) \leq m(A). \tag{1.1}$$

Para ver isto, basta escrever $A = B \cup (A \subset B)$. Mais geralmente. se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, $A_n \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ e $B \subset \cup A_n$ então temos a seguinte propriedade de covexidade.

$$m(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \tag{1.2}$$

De fato, suponha primeiramente que $\cup A_n \in \mathcal{A}$. Sejam $P_0 = \emptyset$, $P_n = \cup_{j=1}^{n} A_j$, $Q_n = A_n \subset P_{n-1}$. Então Q_n forma uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\cup A_n = \cup Q_n$, com $m(Q_n) \leq m(A_n)$. Usando a Definição 1.3 e (1.1), obtemos (1.2). Se $\cup A_n \notin \mathcal{A}$, escrevemos $B = \cup(A_n \cap B)$. Usando o anterior, e que $m(A_n \cap B) \leq m(A_n)$, deduzimos (1.2).

A medida tem também a seguinte propriedade de continuidade. Dada uma coleção $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$, tal que $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$ então

$$m(\cup_n A_n) = \lim m(A_n). \tag{1.3}$$

Para ver isto, considere $A_0 = \emptyset$, $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n - A_{n-1}$ para $n > 1$. Então, usando a aditividade da medida, temos que $m(\cup_n A_n) = m(\cup_n B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_n) - m(A_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} m(A_n)$.

Uma consequência de (1.3) é a seguinte. Seja m uma medida finita e $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n-1}$, tal que $\cap_n A_n \in \mathcal{A}$. Tomando $B_n = A_n^c$ e usando o anterior, temos que $m(\cap_n B_n) = m((\cup_n A_n)^c) = m(X) - \lim m(A_n)$ e, portanto,

$$m(\cap_n B_n) = \lim m(B_n). \tag{1.3$'$}$$

Se $m(X) = \infty$ (1.3') pode ser falso. Por exemplo, se $B_n = (n, +\infty)$ então $m(\cap_n B_n) = m(\emptyset) = 0$ enquanto $m(B_n) = +\infty$ para todo n.

Exemplo 1.4. -

i - Se $m(\emptyset) = 0$, $m(X) = +\infty$, então m é uma medida sobre $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$.

ii - Se $X = \mathbf{N}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$, então $m(A) = \#A$, o número de elementos de A, é uma medida.

iii - Seja $\mathcal{A}$ a álgebra gerada pela união de intervalos do Exemplo 1.2 (iii). Seja $m((a,b]) = b-a$, $m((-\infty, b]) = m((a, +\infty)) = m((-\infty, +\infty)) = +\infty$. Se $A = \cup_n I_n$, é uma união disjunta de intervalos do tipo acima, tomamos $m(A) = \sum_n m(I_n)$. Pode-se verificar que m está bem definido e que define uma medida sobre $\mathcal{A}$.

Extensão de medidas.

Pode-se construir medidas definidas sobre álgebras sem dificuldades. No entanto, as álgebras são, em geral, subconjuntos pequenos e insuficientes para a teoria da integração . Veremos agora como se pode estender medidas a σ-álgebras, que, como indica o Exemplo 1.2, são coleções bem maiores de conjuntos.

Definição 1.5. - Seja m uma medida definida sobre uma álgebra $\mathcal{A}$. Dado $E \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$, definimos a medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ gerada por m como

$$\mu^*(E) = inf \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n), \tag{1.4}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências $(A_n) \subset \mathcal{A}$ tais que $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Observação 1.7. -

(i) - Segue imediatamente que, se $E \subset F$, então $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

(ii) - Se $E_1 \subset \cup A_n$ e $E_2 \subset \cup B_n$ então $E_1 \cup E_2 \subset \cup(A_n \cup B_n)$. Segue facilmente que $\mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) \geq \mu^*(E_1 \cup E_2)$.

(iii) Se E_i é uma coleção enumerável. Dado $\delta > 0$, seja $E_i \subset \cup B_{i,j}$ tal que $\mu^*(E_i) \geq \sum \mu^*(B_{i,j}) - 2^{-i}\delta$. Então, $\mu^*(\cup E_i) \leq \sum \mu^*(E_i) - \delta)$. Portanto, $\mu^*(\cup E_i) \leq \sum \mu^*(E_i)$.

(iv) - Se $A \in \mathcal{A}$ então obviamente $\mu^*(A) \leq m(A)$. Por outro lado, de (1.2) temos que $\mu^*(A) \geq m(A)$. Logo, $\mu^*(A) = m(A)$.

Definição 1.6. -Dizemos que um conjunto E é (Lebesgue) mensurável se $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E^c \cap A) = \mu^*(A)$ para todo $A \in P(X)$ e denotamos $\mathcal{A}^*$ à família dos conjuntos mensuráveis. Definimos ainda $\mu(E) := \mu^*(E)$ se $E \in \mathcal{A}^*$.

Teorema 1.8. - *$\mathcal{A}^*$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$ e μ é uma medida sobre $\mathcal{A}^*$ que estende m.*

Demonstração - Será feita em várias etapas.

Etapa 1. - Mostramos primeiro que $\mathcal{A}^*$ é uma álgebra. É imediato ver que $\emptyset \in \mathcal{A}^*$ e que se $E \in \mathcal{A}^*$ então $E^c \in \mathcal{A}^*$. Considere então $E, F \in \mathcal{A}^*$. Temos que $\mu^*(A \cap (E \cap F)^c) = \mu^*(A \cap E \cap F^c) + \mu^*(A \cap E^c)$. Portanto, $\mu^*(A \cap (E \cap F)^c) + \mu^*(A \cap E \cap F) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A)$, o que mostra que $E \cap F \in \mathcal{A}^*$.

Etapa 2. - Se $E, F \in \mathcal{A}^*$ e $E \cap F = \emptyset$, então $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$. De fato, $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$.

Etapa 3. - Vamos verificar que $\mathcal{A}^*$ é uma σ-álgebra. Para isso, seja B_i uma coleção enumerável em $\mathcal{A}^*$, $F = \cup B_i$ e $F_j = \cup_{i \leq j} B_i$. Da Observação 1.7 (ii) segue que $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$. Para mostrar a desigualdade reversa suponhamos, sem perda de generalidade, que a coleção B_i é disjunta. Usando a Etapa 2, temos que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_j) + \mu^*(A \cap (F_j)^c) \geq \sum_{i \leq j} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap F^c)$. Fazendo $j \longrightarrow \infty$ e usando a Observação 1.7 (iii), obtemos o resultado desejado.

Etapa 4. - μ é uma medida. Resulta em particular da Etapa 2, fazendo $A = X$, que μ é aditiva. Basta então mostrar que μ é contavelmente aditiva. Já vimos que $\mu(\cup B_i) \leq \sum \mu(B_i)$. Por outro lado, $\mu(\cup B_i) \geq \mu(\cup_{i \leq j} B_i) = \sum_{i \leq j} \mu(B_i)$. Basta fazer $j \longrightarrow \infty$.

Etapa 5. - μ estende m. Pela Observação 1.7 (iv), basta mostrar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Seja $E \in \mathcal{A}$, $A \in P(X)$ e $B_i \in \mathcal{A}$ tais que $A \subset \cup B_i$ com $\mu^*(A) \geq \sum m(B_i) - \delta$. Entào, $\mu^*(A) \geq \sum m(B_i \cap E) + m(B_i \cap E^c) - \delta \geq \mu^*(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) - \delta$. O resultado segue. $\square$

O resultado de unicidade abaixo é conhecido como o teorema de extensão de Hahn.

Teorema 1.9. - *Seja m uma medida σ-finita definida sobre uma álgebra $\mathcal{A}$. Então existe uma única extensão de m a $\mathcal{A}'$, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.*

Demonstração - Seja μ a restrição da medida definida acima a $\mathcal{A}'$ e seja ρ uma outra medida qualquer. Suponha primeiro que $m(X) < \infty$. Seja $E \in \mathcal{A}'$ e $A_i \in \mathcal{A}$, com $E \subset \cup A_i$. Então, pela sub-aditividade da medida, $\rho(E) \leq \sum m(A_i)$. Portanto, $\rho(E) \leq \mu(E)$. Mas $m(X) = \rho(E) + \rho(E^c) \leq \mu(E) + \mu(E^c) = m(X)$ implica que $\rho(E) = \mu(E)$. Se m é σ-finita, então $X = \cup X_n$, com $X_n \in \mathcal{A}$, $m(X_n) < \infty$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $X_n \subset X_{n+1}$. Dado $E \in \mathcal{A}'$ seja $E_n = E \cap X_n$. Pelo anterior, $\rho(E_n) = \mu(E_n)$. Pela continuidade da medida (1.3) temos que $\rho(E) = \lim \rho(E_n) = \lim \mu(E_n) = \mu(E)$. $\square$

Observação 1.10. -

(i) Uma medida é dita completa, se para todo E mensurável com medida nula e $F \subset E$, temos que F é mensurável, e de medida nula. Mostremos que μ é completa. Seja F com medida exterior nula. Então, $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F^c) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$. Isto mostra que $F \in \mathcal{A}^*$.

(ii) Considere a medida dada pelo comprimento $m([a, b)) = b - a$. A σ-álgebra obtida pela extensão dada pelo Teorema 1.8 é dita de Lebesgue, e a medida exterior definida sobre ela será chamada de medida de Lebesgue. É fácil ver que a σ-álgebra gerada pelos intervalos semi-abertos coincide com a σ-álgebra gerada pelos abertos (ou pelos fechados) e é dita a σ-álgebra de Borel. É possível mostrar que os borelianos estão estritamente contidos nos lebesguianos. No entanto, dado um conjunto de Lebesgue A existe um boreliano $B \subset A$ tal que $\mu(B - A) = 0$.

(iii) Há conjuntos fora da σ-álgebra de Lebesgue. Considere o círculo unitário C e a classe de equivalência $x \equiv y$ se $x - y \in \mathbf{Z}$, onde x é o ângulo que caracteriza cada ponto. Considere o conjunto E_0 que contém um representante de cada classe de equivalência (isto requer o uso do axioma da escolha!) e $E_m = E_0 + m$. Então $C = \cup_m E_m$, sendo E_m uma coleção disjunta. Se E_0 é mensurável, claramente E_m é mensurável para todo m, com mesma medida. Portanto, $2\pi = m(C) = \sum m(E_m)$, um absurdo.

(iv) Seja $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função crescente, contínua à direita. Defina $m((a, b]) = g(b) - g(a)$, onde $g(\pm\infty) = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} g(x)$. m é uma medida sobre a álgebra dos intervalos. Sua extensão à σ-álgebra de Lebesgue é dita a medida de Lebesgue-Stieltjes.

2. A integral de Lebesgue.

A tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$, onde X é um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X e μ uma medida sobre $\mathcal{A}$, é dito um espaço mensurável. No que segue, diremos que X, em vez de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, é um espaço mensurável e denotaremos $\mathcal{A}_L$ a σ-álgebra de Lebesgue gerada a partir da álgebra dos intervalos semi-abertos de $\mathbf{R}$.

Definição 2.1. - Seja X mensurável. Dizemos que $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ é uma função mensurável se $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbf{R}$. Denotamos $M(X)$ ao conjunto das funções mensuráveis. $M^+(X)$ denota o conjunto das funções mensuráveis não-negativas.

Proposição 2.2. - *São equivalentes:*

(i) $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{A}$ *para todo* $a \in \mathbf{R}$.

(ii) $f^{-1}(-\infty, a] \in \mathcal{A}$ *para todo* $a \in \mathbf{R}$.

(iii) $f^{-1}(a, +\infty) \in \mathcal{A}$ *para todo* $a \in \mathbf{R}$.

(iv) $f^{-1}[a, +\infty) \in \mathcal{A}$ *para todo* $a \in \mathbf{R}$.

(v) $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ *para todo* $E \subset \mathbf{R}$ *aberto.*

(vi) $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ *para todo* $E \subset \mathbf{R}$ *fechado.*

(vii) f *ḿensurável.*

Demonstração - Imediata.

Proposição 2.3. - Sejam $f, g \in M(X)$, *e* $k \in \mathbf{R}$. *Então,* $kf, f + g, fg \in M(X)$.

Demonstração - Se $k = 0$, kf *é trivialmente mensurável. Se* $k \neq 0$, *então* $f(x) \in E \Leftrightarrow kf(x) \in kE$. *Logo,* $kf \in M(X)$. *Além disso,* $I_{f+g}(a) = \cup_{r \in \mathbf{Q}} I_f(a - r) \cap I_g(r)$, *onde* $I_g(r) = \{x, g(x) < r\}$. *Isto mostra que* $f + g \in M(X)$. *Como* $fg = ((f + g)^2 - (f - g)^2)/4$ *e como é fácil ver que* $f^2 \in M(X)$ *se* $f \in M(X)$, *terminamos a demonstração .* □

Exercício 2.4. - Seja $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$.

(i) Se f *é constante então* $f \in M(X)$.

(ii) Se X *é a reta boreliana (ou lebesguiana), então* f *contínua implica* $f \in M(X)$.

(iii) Se X *é a reta boreliana (ou lebesguiana), então* f *monótona implica* $f \in M(X)$.

(iv) f *é dita simples se* f *assume um número finito de valores. Mostre que se* f *é simples então* $f \in M(X)$ *se e só se* $f^{-1}(a)$ *é mensurável para todo* $a \in \mathbf{R}$.

Proposição 2.5. - *Seja f_n uma sequência de funções mensuráveis. Então,* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ *são mensuráveis.*

Demonstração - Seja $f(x) = \sup_n f_n(x)$. Então, $\{x, f(x) \leq a\} = \cup_n \{x, f_n(x) \leq a\}$, o que mostra que $f \in M(X)$. A prova para inf f_n é análoga. Além disso, lim sup f_n=inf$_m$ sup$_{n>m}$ f_n, lim inf f_n=sup$_m$ inf$_{n>m}$ f_n. □

As funções simples desempenham um papel central na teoria da integração . Se ψ é uma função simples que assume os valores a_i, $i = 1, \ldots, n$ e se $E_i = f^{-1}\{a_i\}$ então representamos $\psi = \sum_i a_i \chi(E_i)$, onde $\chi(A)$, função característica de A, é definida por $\chi(A)(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi(A)(x) = 0$ se $x \notin A$. Comecemos por definir a integral de uma função simples de $M^+(X)$.

Definição 2.5. - *A integral de ψ sobre X é definida por*

$$\int \psi = \sum_i a_i \mu(E_i). \tag{2.1}$$

Apresentamos a seguir dois lemas envolvendo funções simples.

Proposição 2.6. - *Sejam ψ_1 e ψ_2 duas funções simples em $M^+(X)$ e $c \geq 0$ Então,*

(i) $\int c\psi_1 = c \int \psi_1$

(ii) $\int \psi_1 + \psi_2 = \int \psi_1 + \int \psi_2$

Demonstração - A prova de (i) é trivial. Para mostrar (ii) seja $\psi_1 = \sum_i a_i \chi(E_i)$, $\psi_2 = \sum_j b_j \chi(F_j)$ e $\psi_1 + \psi_2 = \sum_k c_k \chi(G_k)$. Então, $\psi_1 + \psi_2 = \sum_{i,j} a_i + b_j \chi(E_i \cap F_j)$. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que $\int \psi_1 + \int \psi_2 = \sum_{i,j} a_i + b_j \mu(E_i \cap F_j) = \int \psi_1 + \psi_2$. □

Proposição 2.7- *Seja $f \in M^+(X)$. Então existe uma seqûencia crescente de funções simples de $M^+(X)$ que convergem pontualmente para f.*

Demonstração - Dado $n \in \mathbf{N}$, seja $E_{i,n} = \{x \in X, (i-1)2^{-n} < f(x) \leq i2^{-n}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n2^n$, $E_{n2^n+1,n} = \{x \in X, n2^n < f(x)\}$ e $\varphi_n(x) = (i-1)2^{-n}$ se $x \in E_{i,n}$. Então φ_n é uma seqûencia crescente (prove isso) de funções simples de $M^+(X)$. A convergência pontual é deixada como exercício.

Definição 2.8. - *Seja $f \in M^+(X)$. Defimos a integral de f sobre X como*

$$\int f = \sup_{\psi \leq f} \int \psi. \tag{2.2}$$

onde $\psi \in M(X)$ é uma funão simples. Se $E \in \mathcal{A}$ definimos a integral de f sobre E como

$$\int_E f = \int f \chi(E).$$

É fácil ver que esta definição é consistente com a Definição 2.5, no sentido que ambas coincidem para funções simples de $M^+(X)$. Temos a seguinte propriedade de monotonia da integral, cuja demonstração é trivial e será omitida.

Lema 2.9. - Sejam $f, g \in M^+(X)$, com $f \leq g$. Então $\int f \leq \int g$. Em particular, se $E \subset F$, então $\int_E f \leq \int_F f$.

Apresentamos a seguir um resultado central da teoria.

Teorema da Convergência Monótona (Beppo Levi) 2.10. - Seja $\{f_n\} \subset M^+(X)$ uma sequência crescente que converge a f. Então $f \in M^+(X)$ e

$$\int f = \lim \int f_n$$

.

Demonstração - A mesurabilidade de f decorre da Proposição 2.5. Do Lema 2.9 decorre que $\int f \geq \lim \int f_n$. Para mostrar a desigualdade reversa, seja $\alpha \in (0,1)$, $\psi \leq f$ simples e $A_n = \{x \in X, f_n(x) \geq \alpha\psi\}$. Então A_n é uma sequência crescente de conjuntos tal que $\cup_n A_n = X$. Pela continuidade da medida, temos que

$$\int_{A_n} \psi = \sum_i a_i \mu(E_i \cap A_n) \longrightarrow \sum_i a_i \mu(E_i) = \int \psi.$$

Passando ao limite a desigualdade

$$\int f_n \geq \int_{A_n} f_n \geq \alpha \int_{A_n} \psi,$$

vemos que

$$\lim \int f_n \geq \alpha \int \psi.$$

Como α e ψ são arbitrários, obtemos a desigualdade desejada. □

Vejamos algumas consequências do Teorema de Beppo Levi.

Corolário 2.11. - Sejam $f, g \in M^+(X)$ e $c \geq 0$. Então,

(i) $\int cf = c \int f$

(ii) $\int f + g = \int f + \int g$

Demonstração - (i) é trivial. Para mostrar (ii), usando a Proposição 2.7, sejam $\psi_n \nearrow f$, $\varphi_n \nearrow g$ duas sequências crescentes de funções simples. Logo, $\psi_n + \varphi_n \nearrow f + g$. Usando o Teorema da Convergência Monótona, temos que $\int f + \int g = \lim \int \psi_n + \int \varphi_n = \lim \int \psi_n + \varphi_n = \int f + g$.

Corolário 2.12 (Lema de Fatou). - *Seja* $\{f_n\} \subset M^+(X)$. *Então,*

$$\int \textit{lim inf}\, f_n \leq \textit{lim inf} \int f_n.$$

Demonstração - Seja $g_m = \inf_{n \geq m} f_n$. *Então* g_m *é uma sequência crescente em* $M^+(X)$ *que converge a* *lim inf* f_n. *Como* $g_m \leq f_n$ *se* $n \geq m$ *então*

$$\int g_m \leq \textit{lim inf} \int f_n.$$

Passando ao limite em m *e usando o Teorema da Convergência Monótona, temos*

$$\int \textit{lim inf}\, f_n \leq \textit{lim inf} \int f_n.$$

$\square$

Se X *é um espaço de medida infinita e* $f_n = 1/n$, *então* $\int \lim f_n = 0$ *enquanto que* $\lim \int f_n = +\infty$. *Isto mostra que não há, em geral, igualdade no lema de Fatou.*

Corolário 2.13. - *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* f *mensurável. Definimos*

$$\lambda_f(E) = \int_E f \, d\mu,$$

onde $E \in \mathcal{A}$. *Então* $(X, \mathcal{A}, \lambda_{\{})$ *é um espaço de medida.*

Demonstração - É claro que $\lambda_f \geq 0$ *e que* $\lambda_f(\emptyset) = 0$. *Resta mostrar a aditividade enumerável. Seja então,* $E = \cup_n E_n$, $E_n \in \mathcal{A}$ *disjuntos. Definindo* $G_m = \cup_{n \leq m} E_n$ *e* $f_m = f\chi(G_m)$, *temos que* f_m *é uma sequência de funções crescentes de* $M^+(X)$ *que converge a* $f\chi(E)$. *Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona,*

$$\sum_{n \leq m} \lambda_f(E_n) = \int f_m \longrightarrow \int f\chi(E) = \lambda_f(E).$$

$\square$

Corolário 2.14. - *Seja* X *a reta lebesguiana e* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^+$ *contínua. Então as integrais de Riemann e de Lebesgue de* f *sobre* $[a,b]$ *estão bem definidas e coincidem.*

Demonstração - f *é mensurável e, portanto, sua integral de Lebesgue está definida. Consideremos uma sequência de partições de* $[a,b]$, *cada uma obtida a partir da anterior pela divisão dos intervalos pela metade. Seja* ψ_n *a sequência de funções escadas associada ao ínfimo de* f *em cada intervalo. Então* ψ_n *é uma sequência crescentes de funções simples que converge a* f. *Como as integrais de Riemann e de Lebesgue de*

ψ_n coincidem, usando a definição de integral de Riemann e o Teorema da Convergência Monótona obtemos o resultado. □

Proposição 2.15. - *Seja $f \in M^+(X)$. Então $\int f = 0$ se e só se $\mu(\{x, f(x) > 0\}) = 0$.*

Demonstração - Suponha que $\int f = 0$ e seja $A_n = \{x \in X, f(x) \geq 1/n\}$. Como $f \geq 1/n\chi(A_n)$, então $\mu(A_n) = 0$. Seja $A = \{x, f(x) > 0\}$. Então, $A = \cup A_n$ e, portanto, $\mu(A) = 0$. Se $\mu(A) = 0$, onde $A = \{x, f(x) > 0\}$, seja $\psi \leq f$ uma função simples de $M^+(X)$. Então, $\psi = 0$ sobre A^c e, então, $\int \psi = 0$. Portanto, $\int f = 0$. □

Exercício 2.16. - *Sejam $f, g \in M^+(X)$ tais que $\mu(\{x, f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Mostre que $\int f = \int g$.*

Observação 2.17. -

(i) O Corolário 2.13 diz que toda função de $M^+(X)$ pode ser identificada com a medida λ_f. Dizemos que o espaço das medidas estende o espaço das funções mensuráveis positivas. Esta extensão é própria se X é a reta de Lebesgue. De fato, dado $y \in \mathbf{R}$, considere a medida

$$\delta_y(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in E, \\ 0 & \text{se } y \notin E. \end{cases}$$

Então δ_y não provém de uma função . Suponha, por absurdo, que $\delta_y = \lambda_f$ e seja $E = \mathbf{R} - \{y\}$. Então, $\delta_y(E) = 0 = \int_E f$. Por outro lado, da Proposição 2.15 temos que $\int_{E^c} f = 0$. Então $\int f = \int_{E \cup E^c} f = 0$ e $\delta_y \neq \lambda_f$. δ_y é dita a medida de Dirac em y.

(ii) Se $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ é contínua, seja F uma primitiva de f. Seja μ_F a medida de Lebesgue-Stieltjes de F. Então $\lambda_f(a, b] = \int_a^b f = F(b) - F(a) = \mu_F(a, b)$. Pela unicidade da extensão de medidas de Hahn, Teorema 1.9, $\lambda_f = \mu_F$. Por outro lado, considere a função de Heaviside H_y, definida por $H_y(x) = 1$ se $x \geq y$, $H(x) = 0$ se $x < y$. Então $\delta_y(a, b] = H(b) - H(a)$ (ambos são iguais a zero ou a 1) e, como anteriormente, a medida de Lebesgue-Stieltjes de H_y coincide com δ_y.

(ii) Dizemos que uma certa propriedade vale **em quase todo ponto (qtp)** *se ela se verifica em todos os pontos, salvo um conjunto de medida nula. Por exemplo, dizemos que $f = 0$ qtp quando $\mu(\{x, f(x) \neq 0\}) = 0$. A Proposição 2.15 implica que pode-se, em geal, ignorar o que se passa em conjuntos de medida nula. Uma ilustração é dada pela seguinte versão do Teorema de Beppo Levi.*

Teorema da Convergência Monótona. - *Seja $\{f_n\} \subset M^+(X)$ uma sequência crescente que converge a f qtp. Então $f \in M^+(X)$ e*

$$\int f = \lim \int f_n$$

.

Demonstração - Seja N tal que f_n converge a f em N^c e defina $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \notin N$, $\tilde{f}(x) = 0$ se $x \in N$. Defina $\tilde{f}_n$ analogamente. Então $\tilde{f}_n$ converge em todos os pontos a $\tilde{f}$ e $\int \tilde{f}_n = \int f_n$, $\int \tilde{f} = \int f$. O resultado decorre da versão I do teorema. $\square$

De forma análoga, o Lema de Fatou 2.12 também vale se supusermos convergência pontual qtp. Vejamos agora alguns exemplos de espaços de medidas (e integrais correspondentes).

Exemplo 2.18. -

(i) Seja $X = \mathbf{N}$ e $\mu(E) = \#E$ se $E \subset \mathbf{N}$. Então se $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}^+$, $\int f = \sum_n f(n)$ (verifique).

(ii) Seja $X = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ contínua e λ_f a medida associada a f. Se $\psi = \sum a_i \chi(E_i)$ é uma função simples, então $I_\mu(\psi) = \int \psi d\mu = \sum a_i \mu(E_i)$ e $I_f(\psi) = \displaystyle\int \psi d\lambda_f = \sum a_i \lambda_f(E_i) = \sum a_i \int_{E_i} f d\mu = \int f \psi d\mu$. Seja agora $g \in M^+(X)$ e ψ_n uma sequência crescente de funções simples convergindo a g. Então, pelo Teorema de Beppo Levi, $I_f(\psi_n) \longrightarrow I_f(g)$. Por outro lado, $f\psi_n$ converge monotonamente a fg e, portanto, $I_\mu(f\psi_n) = I_\mu(fg)$. Assim, $I_f(g) = I_\mu(fg) = \int fg\, d\mu$. Dizemos que I_f é a integral de Lebesgue com peso f. Pela Observação 2.17, se F é uma primitiva de f, então $\int g\, dF = \int gf\, d\mu$. $\int g\, dF$ é dita a integral de Lebesgue-Stieltjes de g, relativa a F.

(iii) Seja $X = \mathbf{R}$, μ a medida de Dirac em a e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{R})$. Se ψ é simples, é fácil ver que $\int \psi = \psi(a)$. Se g é uma função qualquer e $\psi \leq g$, então $\int \psi = \psi(a) \leq g(a)$. Por outro lado, $\overline{\psi} = g(a)\chi(\{a\}) \leq g$, com $\int \overline{\psi} = g(a)$. Portanto, $\int g = g(a)$ para toda g. Pela Observação 2.17, $\int g\, d\delta_y = \int g\, dH_y$, onde H_y é a função de Heaviside.

(iv) É imediato ver que, se μ, λ são duas medidas e $a, b \in \mathbf{R}^+$, então $\rho = a\mu + b\lambda$ é uma medida. Além disso, $\int g d\rho = a \int g d\mu + b \int g d\lambda$. Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ é contínua por partes e crescente, com um número finito a_i de pontos de descontinuidade, e $d_i = f(a_i^+) - f(a_i^-) \geq 0$ o salto de f em a_i, $i = 1, 2, \ldots$. Podemos escrever $f = \tilde{f} + \sum d_i H_i$, onde H_i é a função de Heaviside de a_i e $\tilde{f}$ é uma função contínua. Desta forma, $\int g\, d\lambda_f = \int g\, d\lambda_{\tilde{f}} + \sum d_i g(a_i)$.

3. Funções Integráveis.

Se $f \in M(X)$ *então* $f^+ = \sup\{f, 0)\}$ *e* $f^- = \sup\{-f, 0)\}$ *são mensuráveis e não-negativas. Além disso,* $f = f^+ - f^-$.

Definição 3.1. - Seja $f \in M(X)$. *Dizemos que* f *é integrável se* $\int f^+$ *e* $\int f^-$ *são finitas. Neste caso, definimos a integral de* f *como* $\int f = \int f^+ - \int f^-$. *O espaço das funções integráveis será denotado por* $L(X)$.

Observe que $|f| = f^+ + f^-$, *de modo que* $f \in L(X)$ *se e só se* f *é absolutamente integrável, isto é,* $|f| \in L(X)$. *Em particular, se* $|g| \leq |f|$ *e* $f \in L(X)$ *então* $g \in L(X)$. *Além disso, se* $f = f_1 - f_2$, *onde* $f_1, f_2 \geq 0$ *é uma decomposição qualquer de* f *com* $\int f_1$ *e* $\int f_2$ *finitas, então* $f \in L(X)$ *e* $\int f = \int f_1 - \int f_2$. *De fato, temos que* $f^+ \leq f_1$ *e* $f^- \leq f_2$ *(verifique), de modo que* $\int f^+$ *e* $\int f^-$ *são finitas. Como* $f_1 - f_2 = f^+ - f^-$, *temos que* $f_1 + f^- = f_2 + f^+$ *e, assim,* $\int f_1 + \int f^- = \int f_2 + \int f^+$. *Logo,* $\int f_1 - \int f_2 = \int f^+ - \int f^- = \int f$.

Proposição 3.2. - Seja $f, g \in L(X)$ *e* $c \in \mathbf{R}$. *Então,*

(i) $f + g \in L(X)$ *e* $\int f + g = \int f + \int g$,

(ii) $cf \in L(X)$ *e* $\int cf = c \int f$,

(iii) se $f \leq g$ *então* $\int f \leq \int g$.

Demonstração - Temos que $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, *de modo que* $f + g$ *é integrável, com* $\int f + g = \int f + \int g$. *Suponha* $c \geq 0$. *Então, como* $cf = cf^+ - cf^-$, *temos (ii). Se* $c < 0$, *escrevemos* $cf = (-c)f^-(-c)f^+$ *e (ii) segue. Se* $h = g - f \geq 0$, *então, de (i) e (ii) temos que* $0 \leq \int h = \int g - \int f$, *o que mostra (iii).* □

Outras propriedades da integral, válidas quando f *é positiva, se estendem para funções integráveis. Por exemplo, se* $f = g$ *qtp então* $\int f = \int g$. *Temos ainda que as funções simples são densas em* $L(X)$, *no sentido que, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* ψ *simples e integrável tal que* $\int |f - \psi| \leq \varepsilon$ *(mostre estes resultados). No que se refere ao limite de seqûencias de funções integráveis, temos o seguinte resultado fundamental da Teoria da Medida e Integração .*

Teorema 3.3.(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - Sejam f_n *uma sequência de funções de* $L(X)$ *tal que* $f_n(x)$ *converge a* $f(x)$ *qtp, com* f *mensurável. Suponha que exista* $g \in L(X)$, *com* $|f_n| \leq g$ *qtp. Então,* $f \in L(X)$ *e* $\int f_n \longrightarrow \int f$.

Demonstração - Seja $\tilde{f}_n = g + f_n \geq 0$. *Podemos usar o Lema de Fatou 2.12 para concluir que* $\int g + f \leq \liminf \int g + f_n = \int g + \liminf \int f_n$. *Portanto,* $\int f \leq \liminf \int f_n$. *Por outro lado, se* $\underline{f}_n = g - f_n \geq 0$, *usando ainda o Lema de Fatou, temos que* $\int g - f \leq \liminf \int g - f_n = \int g - \limsup \int f_n$. *Assim,* $\int f \geq \limsup \int f_n$. *As duas desigulddades provam o teorema.* □

Apresentamos a seguir algumas consequências do Teorema da Convergência Dominada.

Corolário 3.4. *Seja $(a,b) \subset \mathbf{R}$ e $f : (a,b) \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua em $t \in (a,b)$ para todo $x \in X$ e mensurável em x para todo t. Suponha que exista $g \in L(X)$ tal que $|f(t,x)| \leq g(x)$ qtp em x e para todo $t \in (a,b)$. Então, $f(t,.) \in L(X)$ e $\lim\limits_{s \longrightarrow t} \displaystyle\int f(s,.) = \int f(t,.)$.*

Demonstração - Como $|f(t,.)| \leq g$, temos que $f(t,.) \in L(X)$. Seja $s_n \longrightarrow t$ e $f_n(x) = f(s_n, x)$. Do Teorema da Convergência Dominada segue que $\int f(s_n,.) \longrightarrow \int f(t,.)$. Isto mostra o resultado. □

Corolário 3.5. *Seja $f : (a,b) \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função derivável em $t \in (a,b)$ para todo $x \in X$ e tal que $f(t_0,.) \in L(X)$ para algum $t_0 \in (a,b)$. Suponha que exista $g \in L(X)$ tal que $|\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t}| \leq g(x)$ qtp em x e para todo $t \in (a,b)$. Então, $f(t,.) \in L(X)$ para todo t e $\frac{d}{dt} \int f(t,.) = \int \frac{\partial f(t,.)}{\partial t}$.*

Demonstração - Como existe $\bar{t}$ tal que $f(t,x) = f(t_0,x) + \dfrac{\partial f(\bar{t},x)}{\partial t}(t - t_0)$, temos que $|f(t,x)| \leq |f(t_0,x)| + |g(x)|(b-a)$ qtp em x. Logo, $f(t,x) \in L(X)$. Seja $t_n \longrightarrow t$. Então, $\dfrac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t} \leq g(x)$ e , usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que $\displaystyle\int \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\int f(t_n,x) - \int f(t,x)}{t_n - t}$. Como o limite independe da sequência considerada, a igualdade acima mostra que $\int f(t,x)$ é derivável e que $\frac{d}{dt} \int f(t,.) = \int \frac{\partial f(t,.)}{\partial t}$. □

A Proposição 3.2 mostra que $L(X)$ é um espaço vetorial. É fácil ver que $|f|_1 = \int |f|$ é uma semi-norma em $L(X)$. $|f|_1 = 0$ se e só se $f = 0$ qtp em X. A igualdade qtp define uma relação de equivalência. Iremos considerar o espaço quociente das classes de equivalência obtidas módulo igualdade qtp.

Definição 3.6. Seja $[f] = \{f \in L(X), f = g$ qtp em X. Definimos $\int [f] = \int f$ e $\|[f]\|_1 = \int |f|$, onde $f \in [f]$.

Observe que a definição acima faz sentido, já que, se $f = g$ qtp, então $\int f = \int g$. Denotamos $L_1(X)$ ao espaço vetorial destas classes de equivalência. É fácil verificar que $\|[f]\|_1$ define uma norma em $L_1(X)$. Simplificamos a notação escrevendo f no lugar de $[f]$. Mais geralmente, se $p \geq 1$, notamos $L_p(X)$ ao espaço das (classes de equivalência das) funções de $M(X)$ tais que $\int |f|^p$ é finita e definimos $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int |f|^p \right)^{1/p}$. Iremos mostrar a seguir que $\|f\|_p$ é uma norma sobre $L_p(X)$. Além disso, $L_p(X)$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço normado completo. Comecemos por mostrar que $\|f\|_p$ é uma norma se $p > 1$. Para fazer isto, iremos estabelecer dois resultados preliminares.

Lema 3.7. *Sejam $p > 1$ e $0 < r < p$. Se $f \in L_p(X)$ então $|f|^r \in L_{p/r}(X)$ e $\|\, |f|^r \|_{p/r} = \|f\|_p^r$.*

Demonstração - Imediata. □

Dizemos que um par $p, q > 1$ é **conjugado** *se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Temos então o*

Lema 3.8 (Desigualdade de Young). *Sejam p, q conjugados e $a, b > 0$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração - Basta mostrar que $a^{1-p}b \leq \dfrac{1}{p} + \dfrac{a^{-p}b^q}{q}$. Mas $p = (p-1)q$, de modo que a desigualdade acima é equivalente a $x \leq \frac{1}{p} + \frac{x^q}{q}$, onde $x = a^{1-p}b$. É fácil ver que $f(x) = \frac{x^q}{q} - x$, $x > 0$, tem um valor mínimo em $x = 1$, correspondente a $-1/p$, o que termina a prova. $\square$

Uma consequência da Desigualdade de Young é a Desigualdade de Hölder, enunciada abaixo.

Proposição 3.9. *Sejam $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$ onde p, q são conjugados. Então $fg \in L_1(X)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3.1}$$

Demonstração - Seja $a = |f(x)|/\|f\|_p$, $b = |g(x)|/\|g\|_q$. Usando o Lema 3.8, e integrando sobre X, temos que $\dfrac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\displaystyle\int |f(x)g(x)| \leq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, o que encerra a demonstração . $\square$

Proposição 3.10. *$L_p(X)$ é um espaço vetorial e $\|.\|_p$ induz uma norma sobre $L_p(X)$.*

Demonstração - Se $f \in L^p(X)$ e $k \in \mathbf{R}$, então $kf \in L^p(X)$. Além disso, se $f, g \in L^p(X)$, então $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p max\,(f(x), g(x))^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$. Isto mostra que $\int |f(x) + g(x)|^p < \infty$ e, logo, $f + g \in L^p(X)$. Portanto $L^p(X)$ é um espaço vetorial. Mostremos que $\|f\|_p$ é uma norma. Claramente, $\|f\|_p \geq 0$ e $\|kf\|_p = |k|\|f\|_p$ para todo $k \in \mathbf{R}$. Desta forma, basta verificar que vale a chamada desigualdade de Minkowski

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \tag{3.2}$$

para todo $f, g \in L_p(X)$. Temos que

$$\int |f(x) + g(x)|^p \leq \int |f(x) + g(x)|^{p-1}(|f(x)| + |g(x)|). \tag{3.3}$$

Usando o Lema 3.7, vemos que $|f(x) + g(x)|^{p-1} \in L^q(X)$, onde q é o conjugado de p. Usando então a Desigualdade de Hölder (3.1), obtemos

$$\int |f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x)| \leq \|f + g\|_p^{p-1}\|f\|_p$$

e que

$$\int |f(x) + g(x)|^{p-1}|g(x)| \leq \|f + g\|_p^{p-1}\|g\|_p.$$

Usando estas desigualdades em (3.3) vem que

$$\|f+g\|_p^p = \int |f(x)+g(x)|^p \leq \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p),$$

o que dá (3.2). $\square$

Na realidade, $L^p(X)$ é completo, como mostra a proposição abaixo.

Proposição 3.11. $L^p(X)$ *é completo.*

Demonstração - Seja $\{f_n\} \subset L^p(X)$ uma sequência de Cauchy. Escolha $g_1 = f_{n_1}$ onde n_1 é tal que $\|f_{n_1} - f_n\|_p < 1/2$ se $n > n_1$. Escolha ainda $g_2 = f_{n_2}$, $n_2 > n_1$ e tal que $\|f_{n_2} - f_n\|_p < 1/4$ se $n > n_2$. Desta forma, podemos construir uma subsequência g_k de f_n tal que $\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq 2^{-k}$. Seja ainda $h = |g_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$ (se a série é divergente em um certo $x \in X$, então $h(x) = +\infty$). Temos que $\|h\|_p \leq \|g_1\|_p + \sum \|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \|g_1\|_p + 1$. Portanto, $h \in L^p(X)$ e, em particular, $h(x) < +\infty$ qtp. Definamos agora $f = g_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1} - g_k = \lim_k g_k$. Temos que $f(x) < +\infty$ se $h(x) < +\infty$ e $f \in L^p(X)$. Além disso, do Lema de Fatou 2.12,

$$\left\{\int |f-g_k|^p\right\}^{1/p} = \left\{\int |\sum_{i=k-1}^{\infty} g_{k+1} - g_k|^p\right\}^{1/p} \leq \left\{\sum_{i=k-1}^{\infty} \int |g_{k+1} - g_k|^p\right\}^{1/p}.$$

Da Desigualdade de Minkowski (3.2) (verifique que ela pode ser usada para uma série) temos que

$$\left\{\int |f-g_k|^p\right\}^{1/p} \leq \sum_{i=k-1}^{\infty} \left\{\int |g_{k+1} - g_k|^p\right\}^{1/p} \leq 2^{-k}.$$

Isto mostra que $g_k \longrightarrow f$ em $L^p(X)$. Como $\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - g_k\|_p + \|g_k - f\|_p$ e como $\{f_n\}$ é de Cauchy, vemos que a série toda converge a f. $\square$

Observação 3.12. A demonstração acima mostra que se $f_n \longrightarrow f$ em $L^P(X)$ então existe uma subsequência g_k de f_n tal que $g_k \longrightarrow f$ qtp. Em geral, não é verdade que toda a sequência f_n converge a f qtp. Por exemplo, seja

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [(k-1)/n, k/n) \\ 0 & \text{senão ,} \end{cases}$$

onde $1 \leq k \leq n$. Deixamos ao leitor verificar que $f_{n,k} \longrightarrow 0$ em $L^p(X)$ para todo p, mas $f_{n,k}(x)$ não converge a 0 em nenhum ponto $x \in [0,1)$.

Outro espaço vetorial importante nas aplicações é o espaço das funções essencialmente limitadas, definido por

$$L^\infty(X) = \{f \in M(X), \exists M \in \mathbf{R}, \exists E \subset X, com\ \mu(E) = 0, |f(x)| \leq M\, \forall x \in X/E\}.$$

Introduzimos a seminorma $|f|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in X\}$ *e, considerando novamente as classes de equivalência* $[f] = [g]$ *se e só se* $f = g$ *qtp, definimos* $\|[f]\|_\infty = \inf\{|g|_\infty, g \in [f]\}$.

Proposição 3.13. $L^\infty(X)$ *é um espaço normado completo.*

Demonstração - Como anteriormente , escrevemos $\|f\|_\infty$ *em vez de* $\|[f]\|_\infty$. *Deixamos ao leitor ver que* $L^\infty(X)$ *é um espaço vetorial e que* $\|.\|_\infty$ *é uma norma. Seja* $\{f_n\}$ *de Cauchy. Dado* $n, m \in \mathbf{N}$, *existe* $E_{n,m}$, $\mu(E_{n,m}) = 0$, *tal que* $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ *se* $x \notin E_{n,m}$. *Seja* $E = \cup_{n,m} E_{n,m}$ *e redefina* $f_n(x) = 0$ *se* $x \in E$. *Então* $\mu(E) = 0$ *e* $\{f_n\}$ *é uniformemente de Cauchy e, portanto, uniformemente convergente. Daí,* f_n *converge em* $L^\infty(X)$. $\square$

$\|.\|_\infty$ *é dita a norma essencial. A notação se justifica pelo resultado abaixo.*

Proposição 3.14. *Seja* $f \in \cap\{L^p(X), 1 \leq p \leq +\infty\}$. *Então* $\|f\|_\infty = \lim_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p$.

Demonstração - Dado $\varepsilon > 0$ *existe* $E \subset X$ *com* $\mu(E) > 0$ *e tal que* $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. *Então,*

$$\|f\|_p^p \geq \int_E |f|^p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(E).$$

Além disso, $\mu(E) < +\infty$, *caso contrário* f *não pertenceria a nenhum* L^p. *Assim,* $\liminf_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ *e, fazendo* $\varepsilon \longrightarrow 0$, *obtemos*

$$\liminf_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty. \tag{3.4}$$

Consideramos agora várias etapas.

Etapa 1 - caso em que $\mu(X) < \infty$.

Temos que $\int |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \mu(X)$. *Portanto,* $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(X))^{1/p}$ *e, então,*

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty. \tag{3.5}$$

O resultado decorre de (3.4) e de (3.5).

Etapa 2 - Seja $f \in L^p(X)$. *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $E \subset X$ *tal que* $\mu(E) < +\infty$ *e* $\|f\chi(E)\|_p \geq \|f\|_p - \varepsilon$. *Para provar isto, considere* $f_n(x) = f(x)$ *se* $|f(x)| \geq 1/n$ *e* $f_n(x) = 0$ *se* $|f(x)| < 1/n$. *Então* $|f_n|^p \leq |f|^p$ *e* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *para todo* $x \in X$. *Pelo Teorema da Convergência Dominada,* $\|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p$. *Seja* $E_n = supp\ f_n$. *Como* $f \in L^p(X)$, $\mu(E_n) < +\infty$. *Basta tomar* $E = E_n$ *para* n *suficientemente grande.*

Etapa 3 - caso em que $\mu(X) = +\infty$. *Usamos a Etapa 2 e (3.5) para escrever que* $\|f\|_\infty \geq \|f\chi(E)\|_\infty \geq \limsup_{p \longrightarrow \infty} \|f\chi(E)\|_p \geq \limsup_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p - \varepsilon$. *Como* ε *é arbitrário, temos que* $\|f\|_\infty \geq \limsup_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p$. *Desta desigualdade e de (3.4) segue o resultado.* $\square$

Apresentamos a seguir um lema que ajuda a entender o espaço $L^p(X)$, e que será útil mais tarde.

Lema 3.15. *Seja $f \in L^p(X)$, $p < \infty$. Então,*

(i) Dado $\varepsilon > 0$ existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < +\infty$ e $\int_{X/E} |f|^p \leq \varepsilon$.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\displaystyle\int_E |f|^p < \varepsilon$ para todo E tal que $\mu(E) < \delta$.

Demonstração - (i) foi mostrado na Etapa 2 da Proposição 3.14. Para mostrar (ii), seja $f^k(x) = f(x)$ se $|f(x)| < k$ e $f^k(x) = 0$ se $|f(x)| \geq k$. Do Teorema da Convergência Dominada vemos que $f^k \longrightarrow f$ em $L^p(X)$. Isto mostra que $\displaystyle\int_{E_k} |f|^p \longrightarrow 0$ se $k \longrightarrow \infty$, onde $E_k = \{x, |f(x)| > k\}$. Escolhemos k tal que $\displaystyle\int_{E_k} |f|^p \leq \varepsilon/2$. Fixado k, temos que $\int_F |f|^p \leq k\mu(F)$ se $F \cap E_k = \emptyset$. Seja então $\delta = \varepsilon/2k$. Se $\mu(F) \leq \delta$, temos que $F = (F \cap E_k) \cup (F \cap E_k^c)$ e o resultado segue. □

Relações entre os vários tipos de convergência.

Vamos discutir a seguir as relações que existem entre: convergência uniforme, convergência qtp, convergência em $L^p(X)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Antes de mais nada, lembremos que a Observação 3.12 mostra que L^p-convergência para $p < \infty$ implica convergência qtp para uma subsequência. (Obviamente, convergência em L^∞ implica convergência qtp para toda a sequência.) A recíproca não é verdadeira. Podemos mesmo ter convergência uniforme sem convergência L^p, se $p < \infty$ (tome $f_n(x) = 1/n$ para $|x| < n^p$). Claramente, porém, convergência uniforme acarreta convergência em L^∞. Por outro lado, convergência pontual (ou qtp) não implica convergência em L^∞. Por exemplo, se $f_n(x) = x^n$, se $|x| \leq 1$ então $f_n(x) \longrightarrow 0$ qtp mas $\|f_n - 0\|_\infty = 1$.

Há uma grande distinção entre os casos de medida finita e infinita. Tomemos X de medida finita. Se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, então $\int |f_n - f|^p \leq \|f_n - f\|_\infty \mu(X)$ e, portanto, $f_n \longrightarrow f$ em L^p para todo p. Uma generalização deste fato é a seguinte. Se $f_n \longrightarrow f$ em L^p e $r < p$ então $f_n, f \in L^r(X)$ e $f_n \longrightarrow f$ em L^r. De fato, da Desigualdade de Hölder temos que $\displaystyle\int |g|^r = \int 1.|g|^r \leq (\int 1)^{p-r/p}(\int |g|^p)^{r/p}$, isto é, existe $C > 0$ tal que $\|g\|_r \leq C\|g\|_p$. Isto mostra que $g \in L^p(X) \Longrightarrow g \in L^r(X)$. Além disso, usando que $g = f_n - f$ na desigualdade acima, vemos que convergência em $L^p(X)$ implica convergência em $L^r(X)$. Deixamos ao leitor a verificação que estes resultados são falsos se $\mu(X) = \infty$.

No entanto, em qualquer espaço de medida X vale o seguinte resultado de interpolação . Se $1 \leq r < p \leq \infty$ então $f \in L^p(X) \cap L^r(X)$ implica $f \in L^s(X)$ para todo $r < s < p$. Além disso, se $0 < \theta < 1$ satisfaz

$$\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r} = \frac{1}{s},$$

então

$$\|u\|_s \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}.$$

(Mostre isso usando Hölder).

Apresentamos agora uma noção alternativa de convergência.

Definição 3.16. *Uma sequência f_n de funções mensuráveis converge quase-uniformemente a f mensurável se dado $\delta > 0$ existe um conjunto E de X com $\mu(E) < \delta$ e tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em X/E. Temos o seguinte belo resultado.*

Teorema de Egorov 3.17. *Suponha $\mu(X) < \infty$ e seja $f_n \longrightarrow f$ qtp. Então, $f_n \longrightarrow f$ quase-uniformemente.*

Demonstração - Seja $E_{m,n} = \{x, |f_k(x) - f(x)| < 1/m \text{ se } k \geq n\}$. Temos que $X = \cup_n E_{m,n}$ e, portanto, existe $n(m)$ tal que, se $E_m = E_{m,n(m)}$, então $\mu(E_m) > \mu(X) - 2^{-m}\delta$. Assim, $\mu(X/E_m) = m(X) - \mu(E_m) \leq \delta 2^{-m}$. Seja $E = \cup_m X/E_m$. Então $\mu(E) \leq \sum \mu(X/E_m) \leq \delta$ e $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em $X/E = \cap E_m$. □

Seja $f_n(x) = x/n$, $x \in \mathbf{R}$. Então $f_n \longrightarrow 0$ pontualmente mas não quase-uniformemente. Portanto, a hipótese $\mu(X) < \infty$ é essencial. Finalmente introduzimos (mais uma!) noção de convergência.

Definição 3.18. *Uma seqência f_n de funções mensuráveis converge em medida a f mensurável se para todo $\delta > 0$ temos que $\mu(\{x, |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ Este conceito é importante devido à seguinte caracterização de convergência L^p.*

Teorema de Vitali 3.17. *Sejam $f_n, f \in L^p(X)$, $p < \infty$. Considere as condições abaixo.*

(i)$f_n \longrightarrow f$ em medida.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $E \subset X$ com $\mu(E) < \infty$ e tal que $\int_{X/E} |f_n|^p < \varepsilon$ para todo n.

(iii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f_n|^p < \varepsilon$ para todo n e para todo E tal que $\mu(E) < \delta$.

Então, $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(X)$ se e só se (i), (ii) e (iii) se verificam.

Demonstração - Suponha inicialmente que $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(X)$. Dado $\delta > 0$, considere $E_n = \{x \in X, |f_n(x) - f(x)| > \delta$. Então,

$$\int |f_n - f|^p \geq \delta^p \mu(E_n).$$

Logo, $\mu(E_n) \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$ e temos (i). Para mostrar que (ii) é válido, lembremos que do Lema 3.15 (i) temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $F \subset X$ com $\mu(F) < \infty$ e tal que $\int_{X/F} |f|^p < (\varepsilon/2)^p$. Seja N tal que $\|f_n - f\|_p < \varepsilon/2$ se $n > N$. Então, $\left(\int_{X/F} |f_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_{X/F} |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_{X/F} |f_n - f|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$ se $n > N$. Para $n = 1, 2, \ldots, N$ seja F_n tal que $\mu(F_n) < \infty$ e $\int_{X/F_n} |f_n|^p < \varepsilon$. Tomando $E = F \cup_{n \leq N} F_n$, *vemos que E satisfaz (ii). (iii) pode ser provado de forma análoga. Do Lema 3.15 (ii) segue que (iii) é valido para f e para cada f_n, δ_n dependendo de n. Da convergência de f_n a f podemos concluir que existe N tal que podemos tomar δ uniforme para $n > N$. Fazemos então, $\delta = \inf\{\delta', \delta_1, \ldots, \delta_N\}$.*

Suponhamos agora que (i), (ii) e (iii) se verifiquem e fixemos $\varepsilon > 0$. Usando (ii), escolhemos $A \subset X$ tal que $\mu(A) < \infty$ e $\int_{X/A} |f|^p < \varepsilon^p$, $\int_{X/A} |f_n|^p < \varepsilon^p$. Então,

$$\int_{X/A} |f_n - f|^p < (2\varepsilon)^p.$$

De (iii), tomamos $\delta > 0$ tal que $\int_F |f_n|^p < \varepsilon^p$ e $\int_F |f|^p < \varepsilon^p$ se $\mu(F) < \delta$. Seja $E_n = \{x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Usando (i), escolhemos N tal que $\mu(E_n) < \delta$ se $n > N$. Então,

$$\int |f_n(x) - f(x)|^p = \int_{A^c} |f_n(x) - f(x)|^p + \int_{A \cap E_n} |f_n(x) - f(x)|^p + \int_{A \cap E_n^c} |f_n(x) - f(x)|^p \leq 2(2\varepsilon)^p + \mu(A)\varepsilon^p,$$

se $n > N$. Isto mostra que $f_n \longrightarrow f$ em L^p. □

Definição 3.18. Sejam μ e λ duas medidas finitas, definidas sobre uma mesma σ-álgebra. Dizemos que $\rho = \mu - \lambda$ é uma carga sobre esta σ-álgebra. Um conjunto P é dito positivo em relação a uma carga ρ se $\rho(E) \geq 0$ para todo $E \subset P$. N é dito negativo se N é positivo em relação a $-\rho$.

Temos o seguinte resultado de decomposição de cargas.

Teorema de Decomposição de Hahn 3.19. Seja ρ uma carga. Então existe P positivo e N negativo disjuntos com $X = P \cup N$.

Demonstração - Seja $\beta = \sup\{\mu(E), E$ é positivo $\}$. Seja E_n uma sequência de conjuntos positivos tal que $\mu(E_n) \longrightarrow \beta$. Seja ainda $A_n = \cup_{k \leq n} E_k$. Então A_n forma uma uma sequência de conjuntos positivos com $A_n \subset A_{n+1}$ e $\mu(A_n) \nearrow \beta$. Vamos mostrar que $P = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $N = X/P$ formam a decomposição desejada. É fácil ver que P é positivo, com $\mu(P) = \beta$. Basta verificar que N é negativo. Suponha por absurdo que isto é falso. Então, existe $E_1 \subset N$ com $\mu(E_1) > 0$. E_1 não é positivo pois senão $P \cup E_1$ seria positivo, o que contraria a maximalidade de β. Portanto existe $F \subset E$ com $\mu(F) < 0$. Definimos então $\beta' = \inf\{\mu(F), F \subset E_1, \mu(F) < 0\}$. Como anteriormente, podemos encontrar $F_1 \subset E$ com $\mu(F_1) = \beta'$. Neste caso, E_1/F_1 é positivo. De fato, se existisse $E_2 \subset E_1/F_1$ com $\mu(E_2) < 0$, então $\mu(F_1 \cup E_2) < \beta'$, um absurdo. Mas então $P \cup E_1/F_1$ é positivo, com $\mu(P \cup E_1/F_1) > \beta$, outra contradição . Isto encerra a prova.
□

Teorema de Radon-Nikodym 3.20. Sejam λ e μ duas medidas σ-finitas, com λ absolutamente contínua em relação a μ. Então existe $f \in M^+(X)$ tal que

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu,$$

para todo E mensurável. f é univocamente determinada μ qtp.

Demonstração - Consideremos inicialmente que λ e μ têm medidas finitas. Dado $c > 0$, seja $\rho = \lambda - c\mu$ e $P(c)$, $N(c)$ uma decomposição de Hahn de ρ. Seja $A_1 = N(c)$ e $A_k = N(kc) \cup_{j<k} A_j = N(kc) \cap_{j<k} P(jc)$. Seja ainda $B = X \cup_{k=1}^{\infty} A_k = \cap_{k=1}^{\infty} P(kc)$. Se $E \subset A_k$ então

$$(k-1)c\mu(E) \leq \lambda(E) \leq kc\mu(E).$$

Além disso, $kc\mu(P(kc)) \leq \lambda(P(kc)) \leq \lambda(X)$. Isto mostra que $\mu(B) = \lim \mu(P(kc)) = 0$ e, portanto, $\lambda(B) = 0$. Definimos $f_c(x) = (k-1)c$ se $x \in A_k$ e $f(x) = 0$ se $x \in B$. Seja agora E mensurável. Então,

$$\int_E f_c \, d\mu = \sum_k \int_{E \cap A_k} f_c \, d\mu = \sum_k (k-1)c\mu(E \cap A_k) \leq \sum_k \lambda(E \cap A_k) \leq \lambda(E),$$

e

$$\int_E f_c + c \, d\mu = \sum_k \int_{E \cap A_k} f_c + c \, d\mu = \sum_k kc\mu(E \cap A_k) \geq \lambda(E). \tag{3.6}$$

Assim,

$$\int_E f_c \, d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_c \, d\mu + c\mu(X). \tag{3.7}$$

Tomemos agora $c = c_n = 2^{-n}$ e $f_n = f_{c_n}$. Usando (3.6) e (3.7), temos que

$$\left| \int_E f_n - f_m \, d\mu \right| \leq 2^{-n}\mu(X),$$

se $n < m$. Tomando $E_1 = \{x, f_n(x) \leq f_m(x)\}$ e $E_2 = X/E_1$, obtemos que

$$\int_E |f_n - f_m| \, d\mu \leq 2^{-n+1}\mu(X).$$

Assim, f_n é de Cauchy em $L^1(X)$, o que mostra que $f_n \longrightarrow f$. Finalmente, usando (3.6) vemos que $\lambda(E) = \int f \, d\mu$. A unicidade é trivial.

Suponha agora que λ e μ são σ-finitas (a demonstração é a mesma caso apenas uma delas é finita). Então podemos escrever $X = \cup X_n$, com $X_n \subset X_{n+1}$ e tal que $\mu(X_n), \lambda(X_n) < \infty$. Seja f_n tal que $\lambda(E) = \int f_n \, d\mu$ se $E \subset X_n$, $f_n(x) = 0$ se $x \notin X_n$. É fácil ver que $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ se $x \in X_n$. Definimos $f(x) = f_n(x)$ se $x \in X_n$ e podemos usar o Teorema da Convergência Monótona para concluir que $\lambda(E) = \int f \, d\mu$. A unicidade pode ser mostrada facilmente. □

Uma consequência importante do Teorema de Radon-Nikodym é a caracterização $(L^p(X))'$, o espaço dual de $L^p(X)$. Antes de apresentá-la, precisamos mostrar um resultado preliminar. Dizemos que $L \in (L^p(X))'$ é positivo se $L(f) \geq 0$ se $f \geq 0$.

Lema 3.20. Seja $1 \leq p \leq +\infty$ e $L \in (L^p(X))'$. Podemos escrever $L = L^+ - L^-$, onde L^+, L^- são funcionais lineares positivos.

Demonstração - *Dado* $f \geq 0$ *seja* $L^+(f) = \sup\{L(g), 0 \leq g \leq f\}$. *Temos que* $|L(g)| \leq \|L\|\|g\|_p \leq \|L\|\|f\|_p$, *de modo que* $L^+(f) < \infty$. *Se* $f = f^+ - f^-$ *definimos* $L^+(f) = L^+(f^+) - L^+(f^-)$. *Decorre imediatamente da definição que* L^+ *é positivo. Mostremos que* L^+ *é linear.*

Considere $f_1, f_2 \geq 0$. *Se* $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$ *então* $L(g_1) + L(g_2) = L(g_1 + g_2) \leq L^+(f_1 + f_2)$. *Portanto,*

$$L^+(f_1) + L^+(f_2) \leq L^+(f_1 + f_2).$$

Por outro lado, se $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, *seja* $g_1 = \inf\{g, f_1\}$ *e* $g_2 = g - g_1$. *Então,* $0 \leq g_1 \leq f_1$ *e* $0 \leq g_2 \leq f_2$. *Assim,* $L(g) = L(g_1) + L(g_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2)$, *o que implica que*

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Isto mostra que $L^+(f_1 + f_2) = L^+(f_1) + L^+(f_2)$ *se* $f_1, f_2 \geq 0$. *Suponha agora* f, g *quaisquer. Observe que, se* $f = f^+ - f^- = h_1 - h_2$, *com* $h_1, h_2 \geq 0$, *então* $L^+(f^+) + L^+(h_2) = L^+(f^+ + h_2) = L^+(f^- + h_1) = L^+(f^-) + L^+(h_1)$. *Portanto,* $L^+(f) = L^+(h_1) - L^+(h_2)$, *independe da decomposição de* f. *Desta forma,* $L^+(f_1 + f_2) = L^+(f_1^+ + f_2^+ - f_1^- - f_2^-) = L^+(f_1^+ + f_2^+) - L^+(f_1^- + f_2^-) = L^+(f_1) + L^+(f_2)$. *Deixamos ao leitor a verificação que* $L^+(cf) = cL^+(f)$ *se* $c \in \mathbf{R}$. *Da desigualdade* $|L^+(f)| \leq \|L\|\|f\|_p$ *obtemos que* $L^+ \in (L^p(X))'$. *Definindo* $L^-(f) = L^+(f) - L(f)$, *vemos que* L^- *é linear, contínuo e positivo.*

Teorema da Representação de Riesz 3.21. *Se* $1 < p < +\infty$ *então dado* $L \in (L^p(X))'$, *existe* $f \in L^q(X)$ *tal que* $L(g) = \int fg$, *onde* q *é o conjugado de* p. *Além disso,* f *é única a menos de um conjunto de medida nula e* $\|L\| = \|f\|_q$. *As mesmas conclusões são válidas se* $p = 1$ *e* μ *é* σ*-finita.*

Demonstração - *Será feita por etapas.*

Etapa 1 - *caso em que* $p = 1$ *e* μ *é finita. Suponha* L *positivo. Seja* $E \in \mathcal{A}$ *e* $\lambda(E) = L(\chi(E))$. *Então,* $\lambda(E) \geq 0$ *com* $\lambda(\emptyset) = 0$. *Suponha* $E = \cup E_i$, *com* $E_i \in \mathcal{A}$ *disjuntos. Seja* $F_n = \cup_{j \leq n} E_j$. *Então* $\chi(F_n) \nearrow \chi(E)$. *Pelo Teorema da Convergência Monótona,* $\chi(F_n) \longrightarrow \chi(E)$ *em* L^1. *Logo* $\sum_{j \leq n} \lambda(E_j) = L(\chi(F_n) \longrightarrow L(\chi E) = \lambda(E)$. *Isto mostra que* λ *é uma medida. Do Teorema de Radon-Nikodym vem que existe* $f \in M^+(X)$ *tal que* $L(\chi(E)) = \int_E f$ *para todo* $E \in \mathcal{A}$. *Por linearidade* $L(\psi) = \int f\psi$ *para toda* ψ *simples e, por passagem ao limite, obtemos que* $L(g) = \int fg$ *se* $g \in L^1(X)$. *Agora, se* $L \in (L^p(X))'$, *pelo Lema 3.20, escrevemos* $L = L^+ - L^-$, *e vemos que existe* f *tal que* $L(g) = \int fg$ *se* $g \in L^1(X)$. *Para mostrar a unicidade, sejam* f_1 *e* f_2 *são tais que* $\int f_1 g = \int f_2 g$ *para todo* $g \in L^p(X)$ *e* $F = \{x, f_1(x) > f_2(x)\}$. *Para* $g = \chi(F)$ *temos que* $\int_F f_1 - f_2 = 0$, *o que mostra que* $\mu(F) = 0$. *Invertendo papéis, vemos que* $f_1 = f_2$ *qtp. Resta mostrar que* $f \in L^\infty(X)$ *com* $\|f\|_\infty = \|L\|$. *Observe que* $|\int_E f| = |L(\chi(E))| \leq \|L\|\mu(E)$. *Considere* $E_n = \{x, f(x) > \|L\| + 1/n$. *Então,* $(\|L\| + 1/n)\mu(E_n)| \leq \displaystyle\int_{E_n} f = L(\chi(E_n)) \leq \|L\|\mu(E_n)$ *e, portanto,* $\mu(E_n) = 0$. *Logo, por continuidade da medida,* $\mu(\{f(x) \geq \|L\|\}) = 0$, *isto é,* $f(x) \leq \|L\|$ *qtp. Analogamente,* $-f(x) \leq \|L\|$ *qtp. Isto mostra que* $f \in L^\infty(X)$ *com* $\|f\|_\infty \leq \|L\|$. *Por outro lado,* $|L(g)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ *implica que* $\|L\| \leq \|f\|_\infty$. *Desta forma* $\|L\| = \|f\|_\infty$.

Etapa 2 - caso em que $p > 1$ e μ é finita. A existência e unicidade de f tal que $L(g) = \int fg$ já foi mostrada na Etapa 1. Falta mostrar que $f \in L^q(X)$ e que $\|L\| = \|f\|_q$. Seja $E_n = \{x \in X, |f(x)| < n\}$ e $f_n = f\chi(E_n) \in L^r(X)$ para todo r. Temos que $\displaystyle\int |f_n|^q = L(f_n\ sgn(f_n)|f_n|^{q-1}) \leq \|L\|\|f_n\|_q^{q/p}$, onde sgn é a função sinal. Assim, $\|f_n\|_q \leq \|L\|$. Como $|f_n| \nearrow |f|$, pelo Teorema da Convergência Monótona temos que $f \in L^q(X)$ com $\|f\|_q \leq \|L\|$. Mas, pelo Desigualdade de Hölder, $|L(g)| \leq \|f\|_q\|g\|_p$, donde $\|L\| \leq \|f\|_q$ e, portanto, $\|L\| = \|f\|_q$.

Etapa 3 - μ é σ-finita. Seja $X = \cup X_n$, com $X_n \subset X_{n+1}$ e $\mu(X_n) < \infty$. Então, existe $f_n \in L^q(X_n)$. Estendendo $f_n = 0$ fora de X_n, podemos considerar que $f_n \in L^q(X)$. Pela unicidade, podemos definir $f(x) = f_n(x)$ se $x \in X_n$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona aplicado a $|f_n|$ concluímos que $f \in L^p(X)$, se $p < \infty$ (se $p = \infty$ a conclusão é óbvia). Usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que $L(g) = \int fg$ para todo $g \in L^p(X)$.

Etapa 4 - caso geral para $p > 1$. Seja f_n tal que $\|f_n\|_p = 1$, com $L(f_n) \longrightarrow \|L\|$. Seja $X_n = \{x \in X, |f_n(x)| > 0\}$. Então X_n é σ-finita (prove isso) e, logo, $\tilde{X} = \cup_n X_n$ é σ-finita. Seja $g \in L^p(X)$ tal que $g = 0$ em $\tilde{X}$. Temos que

$$L(f_n + tg) \leq \|L\|\|f_n + tg\|_p = \|L\|(1 + t^p\|g\|_p^p)^{1/p}.$$

Dividindo por t e fazendo $n \longrightarrow \infty$,

$$L(g) \leq \|L\|\frac{(1 + t^p\|g\|_p^p)^{1/p} - 1}{t}.$$

Se $t \longrightarrow 0$ vemos que $L(g) \leq 0$. Analogamente, $-L(g) = L(-g) \leq 0$. Logo, $L(g) = 0$ se $g = 0$ em $\tilde{X}$ e podemos tomar f dado pela Etapa 3 sobre $L^p(\tilde{X})$. □

O Teorema 3.21 permite fazer a identificação $(L^p(X))' \approx L^q(X)$ se $p < \infty$. Não é verdade que $(L^\infty(X))' \approx L^1(X)$. De fato, seja $X = [0,1] \subset \mathbf{R}$ munido da medida usual de Lebesgue e $C(X)$ o espaço das funções contínuas sobre X, com a norma do máximo. Considere $L(g) = g(1/2)$. Claramente, $L \in (C(X))'$. Como $C(X)$ é um subespaço fechado de $L^\infty(X)$, o Teorema de Hahn-Banach garante que existe $\tilde{L} \in (L^\infty(X))'$ que estende L. $\tilde{L}$ não pode ser identificada a uma função f de $L^1(X)$. De fato, se isto fosse verdade, teríamos $g(1/2) = \int fg$ para toda $g \in C(X)$, um absurdo.

1. Medida produto e integração múltipla.

Consideremos agora $(X, \mathcal{A}_x, \mu_x)$ e $(Y, \mathcal{A}_y, \mu_y)$ dois espaços de medida. Dados $A \subset \mathcal{A}_x$ e $B \subset \mathcal{B}_y$, seja $R = A \times B \subset Z$ um retângulo. Como $(A \times B)^c = A^c \times B \cup A \times B^c$ e como $A_1 \times B_1 \cap A_2 \times B_2 = A_1 \cap A_2 \times B_1 \cap B_2$, é fácil ver que A_z, a união finita de retângulos R é uma álgebra sobre Z. Definimos $\mu_z(A \times B) = \mu_x(A) \times \mu_y(B)$ e $\mu_z(R) = \sum \mu_z(R_i)$ se R é a união finita e disjunta de retângulos R_i.

Lema 1.22. μ_z *é uma medida sobre* A_z.

Demonstração - Precisamos mostrar que, se $A \times B = \cup A_i \times B_i$ *é uma união enumerável de retângulos disjuntos, então* $\mu_x(A)\mu_y(B) = \sum \mu_x(A_i)\mu_y(B_i)$. *Observemos que* $\chi(A \times B)(x,y) = \chi(A)(x)\chi(B)(y) = \sum \chi(A_i)(x)\chi(B_i)(y)$. *Fixando* y, *temos que* $\sum_{i=1}^{n} \chi(A_i)(x)\chi(B_i)(y)$ *converge a* $\sum_{i=1}^{\infty} \chi(A_i)(x)\chi(B_i)(y)$ *monotonamente. Portanto, integrando em* x *obtemos* $\mu_x(A)\chi(B)(y) = \sum \mu_x(A_i)\chi(B_i)(y)$. *Repetindo o argumento para* y, *vemos que* $\mu_x(A)\mu_y(B) = \sum \mu_x(A_i)\mu_y(B_i)$. □

Podemos então estender μ_z *a uma medida sobre* $\mathcal{A}_z$, *a* σ*-álgebra gerada por* A_z *(extensão única se* X *e* Y *são* σ*-finitas). Esta estensão é dita a medida produto* $\mu_x \oplus \mu_y$, *que iremos denotar por* μ_z. *Dados* $E \subset \mathcal{A}_z$, $f \in M(Z)$ *e* $x \in X$, *definimos a seção* $E_x = \{y \in Y, (x,y) \in E\}$ *e a restrição* $f_x : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ *tal que* $f_x(y) = f(x,y)$. *Definimos analogamente* E_y *e* f_y *para cada* $y \in Y$.

Lema 1.23. *Temos que*

(i) se $E \subset Z$ *é mensurável então* E_x *e* E_y *são mensuráveis para todo* x, y.

(ii) Se f *é mensurável então* f_x *e* f_y *são mensuráveis para todo* x, y.

Demonstração - Basta mostrar que E_x *e* f_x *são mensuráveis. Seja* $Z' = \{E \subset \mathcal{A}_z, E_x \in \mathcal{A}_y \, \forall x \in X\}$. *Afirmamos que* Z' *é uma* σ*-álgebra. Primeiramente,* $\emptyset \in Z'$. *Como* $(E^c)_x = (E_x)^c$, *se* $E \in Z'$ *então* $E^c \in Z'$. *Além disso,* $(\cup E_i)_x = \cup (E_i)_x$. *Logo, se* $E_i \in Z'$ *então* $\cup (E_i)_x \in Z'$. *Isto mostra que* Z' *é uma* σ*-álgebra. Se* $R = A \times B$ *é um retângulo tal que* $A \in \mathcal{A}_x$ *e* $B \in \mathcal{A}_y$, *então* $R_x = B$ *se* $x \in A$ *e* $R_x = \emptyset$ *se* $x \notin A$. *Desta forma,* $R \in Z'$. *Portanto,* Z' *é uma* σ*-álgebra que contém os retângulos, o que mostra que* $\mathcal{A}_z \subset Z'$. *Mostremos agora (ii). Fixados* $x \in X$ *e* $a \in \mathbf{R}$, $\{y, f_x(y) < a\} = \{y, f(x,y) < a)\} = \{(x,y), f(x,y) < a)\}_x$. *Decorre de (i) que* $\{y, f_x(y) < a\}$ *é mensurável, o que mostra (ii).* □

Dado $f \in M^+(Z)$ *seja* $F_x = \int f_x \, d\mu_y$ *e* $F_y = \int f_y \, d\mu_x$. *Pelo lema acima,* F_x *e* F_y *estão bem definidos (podendo eventualmente serem iguais a* $+\infty$*). Queremos discutir as relações entre* $\int f \, d\mu_z$, $\int F_x \, d\mu_x$ *e* $\int F_y \, d\mu_y$. *Para isto, introduzimos a seguinte definição .*

Definição 1.24. *Dado* X *um conjunto qualquer, uma coleção* M *de subconjuntos de* X *é dita uma classe monotônica se satisfaz*

(i) Se $E_i \in M$ *com* $E_i \subset E_{i+1}$ *para todo* $i \in \mathbf{N}$ *então* $\cup E_i \in M$.

(ii) Se $E_i \in M$ *com* $E_i \subset E_{i-1}$ *para todo* $i \in \mathbf{N}$ *então* $\cap E_i \in M$.

É fácil ver que a interseção de um conjunto de classes monotônicas é uma classe monotônica. Como X *é uma classe monotônica, faz sentido definir a classe monotônica gerada por um conjunto* $A \subset X$ *como a menor classe monotônica que contém* A.

Lema 1.25. *Seja A uma álgebra e M a classe monotônica gerada por A. Então M é a σ-álgebra gerada por A.*

Demonstração - Dado $E \subset X$ seja $M(E) = \{F \subset M, E/F, F/E, E \cap F \in M\}$. É fácil ver que $X \in M(E)$ e que $M(E)$ é uma classe monotônica. Se $E \in A$ então $A \subset M(E)$. Como M é a classe monotônica gerada por A, segue que $M(E) = M$. Portanto, se $F \in M$ e $E \in A$, $F \in M(E)$ e, logo, $E \in M(F)$. Assim, $A \subset M(F)$ e, então, $M = M(F)$. Desta forma, se $F \in M = M(X)$, então $F^c \in M$. Além disso, se $F, E \in M$, $F \in M(E)$ e, logo, $F \cap E \in M$. Isto mostra que M é uma álgebra. Uma álgebra que é uma classe monotônica é uma σ-álgebra. □

Lema de Cavalieri 1.26. *Sejam X e Y espaços de medida σ-finita e $E \in \mathcal{A}_z$. Então, $\mu_y(E_x)$ e $\mu_x(E_y)$ são mensuráveis e*

$$\mu_z(E) = \int \mu_y(E_x)\, d\mu_x = \int \mu_x(E_y)\, d\mu_y.$$

Demonstração - Suponha primeiro que X e Y têm medidas finitas e seja M a coleção dos E para os quais vale o lema. Se $R = A \times B$ então $\mu_y(E_x) = \mu_y(B)\chi(A)$. Assim, $\int \mu_y(E_x)\, d\mu_x = \mu_y(B)\mu_x(A) = \mu_z(R)$. Analogamente, $\int \mu_x(E_y)\, d\mu_y = \mu_z(R)$ e, portanto, $R \in M$. Deixamos ao leitor a verificação que A_z, a álgebra gerada pelos retângulos, está contida em M. Além disso, M é uma classe monotônica. De fato, mostremos (i) da Definição 1.24. Seja $E = \cup E_i$ com $E_i \subset E_{i+1}$ e $E_i \in M$. Segue da monotonicidade da medida que $\mu_y(E_x) = \lim \mu_y(E_i)_x$ é mensurável e que $\mu_z(E) = \lim \mu_z(E_i)$. Do Teorema da Convergência Monótona temos que $\int \mu_y(E_x)\, d\mu_x = \lim \int \mu_y(E_i)_x\, d\mu_x = \lim \mu_z(E_i) = \mu_z(E)$. Como X e Y têm medidas finitas, mostramos analogamente (ii) da Definição 1.24. Segue então do Lema 1.25 que $\mathcal{A}_z \subset M$.

Consideremos agora o caso em que $X = \cup X_n$, $Y = \cup Y_n$ com X_n e Y_n de medidas finitas. Seja $E \subset \mathcal{A}_z$ e $E^n = E \cap X_n \times Y_n$. Do anterior temos que

$$\mu_z(E^n) = \int \mu_y(E^n_x)\, d\mu_x = \int \mu_x(E^n_y)\, d\mu_y.$$

Mas $\mu_z(E^n) \longrightarrow \mu_z(E)$, $\mu_x(E^n_y) \longrightarrow \mu_x(E_y)$ e $\mu_y(E^n_x) \longrightarrow \mu_y(E_x)$ e, pelo Teorema da Convergência Monótona, $\int \mu_x(E^n_y)\, d\mu_y \longrightarrow \int \mu_x(E_y)\, d\mu_y$, $\int \mu_y(E^n_x)\, d\mu_x \longrightarrow \int \mu_y(E_x)\, d\mu_x$. Passando ao limite,

$$\mu_z(E) = \int \mu_y(E_x)\, dmu_x = \int \mu_x(E_y)\, d\mu_y.$$

□

Teorema de Tonelli 1.27. *Sejam X e Y espaços de medida σ-finita e $f \in M^+(Z)$. Então $F_x = \int f_x\, d\mu_y$ e $F_y = \int f_y\, d\mu_x$ são mensuráveis e*

$$\int f\, d\mu_z = \int F_x\, d\mu_x = \int F_y\, d\mu_y.$$

Demonstração - O Lema de Cavalieri mostra que o teorema vale se $f = \chi(E)$. Por linearidade, vale também para funções simples isto é

$$\int \psi^n \, d\mu_z = \int \int \psi_x^n \, d\mu_y \, d\mu_x = \int \int \psi_y^n \, d\mu_x \, d\mu_y. \tag{1.9}$$

Seja agora $f \in M^+(Z)$ e $\psi^n \nearrow f$, ψ^n simples. Temos que $\psi_x^n \nearrow f_x$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona $\int \psi_x^n \, d\mu_y \nearrow \int f_x \, d\mu_y$, com $\int f_x$ mensurável. Mais uma vez o Teorema da Convergência Monótona garante que podemos passar ao limite a equação (1.9), terminando a prova. □

Antes de considerar o caso de uma função f que muda de sinal, observe que se $X = Y = [0,1]$, X com a medida de Lebesgue e Y com a medida da contagem, $D = \{(x,y), x = y\}$ e $f = \chi(D)$, então $\int \int f_x \, d\mu_y \, d\mu_x \neq \int \int f_y \, d\mu_x \, d\mu_y$. Isto mostra que a hipótese de σ-finitude é essencial no Teorema de Tonelli. Vejamos agora o caso geral.

Teorema de Fubini 1.28. *Sejam X e Y espaços de medida σ-finita. Se $f \in L^1(Z)$ então $F_x = \int f_x \, d\mu_y$ e $F_y = \int f_y \, d\mu_x$ são bem definidas e integráveis qtp e*

$$\int f \, d\mu_z = \int F_x \, d\mu_x = \int F_y \, d\mu_y.$$

Demonstração - Temos que f^+ e f^- têm integral finita. Pelo Teorema de Tonelli, F_x^+ e F_x^- têm integral finita qtp em Y. Logo, F_x está bem definida qtp em Y. O resultado segue da aplicação do Teorema de Tonelli para f^+ e f^-. □

Seja $X = Y = [0,1]$ com a medida usual de Lebesgue e $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$. Então, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) \, dx) \, dy = \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) \, dy) \, dx = 0$. Por outro lado, como $B(0,1) \subset Q = [0,1] \times [0,1]$, temos que $\int_Q |f(x,y)| \, dxdy \geq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\sin\theta\cos\theta|}{r} \, d\theta dr = +\infty$. Portanto, a existência da integral iterada de f não implica que $f \in L^1(X \times Y)$.